

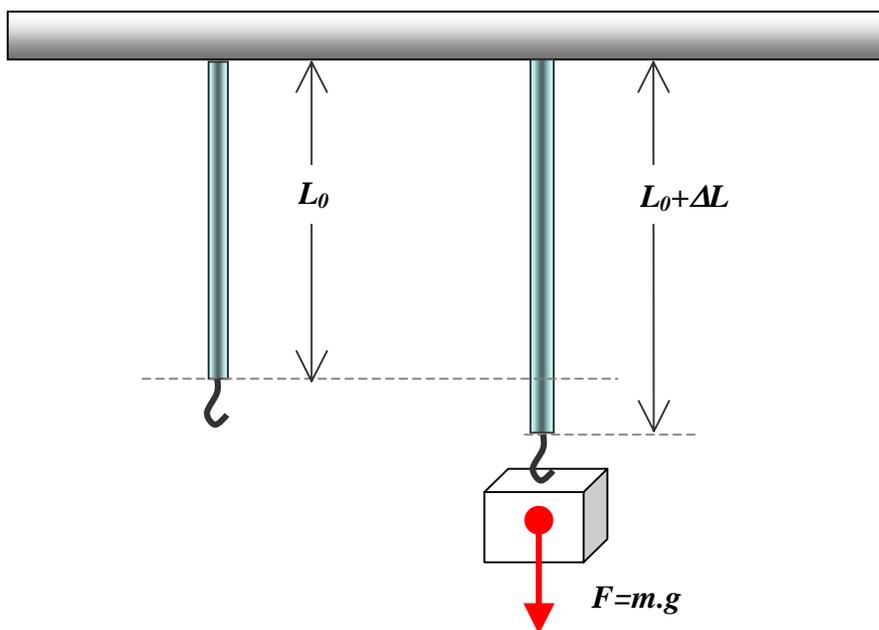
# Introducción a la Teoría de la Elasticidad

S. Gil

HOMINES, DVM DOCENT, DISCVNT  
(Los hombres, enseñando, aprenden)  
Séneca (I a.c.)

Si un material es sometido a tracción, es decir si el mismo es solicitado desde sus extremos en direcciones opuestas, de modo similar a como se ilustra en la Fig. 1, la longitud del mismo aumenta y eventualmente, si la fuerza es grande, el material puede romperse. En esta sección estudiaremos la conexión entre los efectos de las fuerzas y las deformaciones que las mismas causan sobre una muestra de material. Si una muestra cilíndrica de material, de sección transversal  $A$ , y longitud inicial  $L_0$  es sometida a tracción, mediante una fuerza  $F$  que actúa a lo largo de su eje, la misma sufrirá un estiramiento de magnitud  $\Delta L$ . Si  $\Delta L/L_0 \ll 1$ , se encuentra experimentalmente que para un rango limitado de las fuerzas aplicadas,  $\Delta L$  es proporcional a la fuerza aplicada ( $F$ ), a su longitud original ( $L_0$ ) e inversamente proporcional al área de su sección transversal ( $A$ ), es decir:

$$\Delta L \propto \frac{F \cdot L_0}{A} \quad (1)$$



**Figura 1.** Barra cilíndrica de longitud original  $L_0$ , sometida a tracción. Ley de Hooke

Esta relación la notó primero Robert Hooke (1635-1703), un contemporáneo y rival de Newton. Esta expresión fenomenológica, válida para una gran variedad de materiales, pero no de carácter universal (como las leyes de Newton o la Ecuaciones de Maxwell), se puede escribir como:

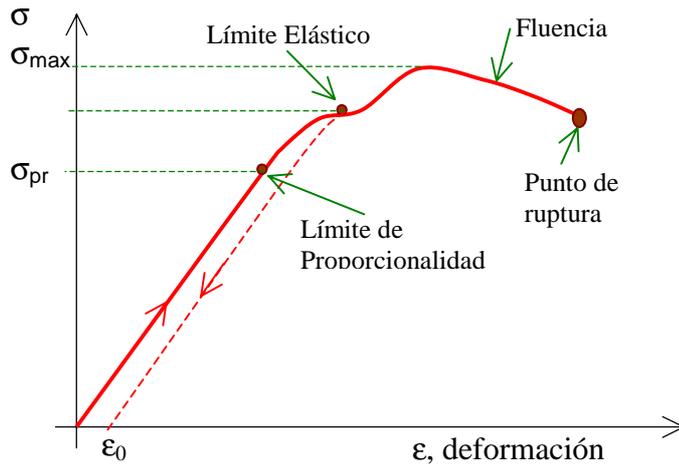
$$E \cdot \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{F}{A} \quad (2)$$

Donde  $E$  es una constante característica de del material que forma el objeto y que se denomina módulo de Young o módulo de elasticidad, al modulo de elasticidad también

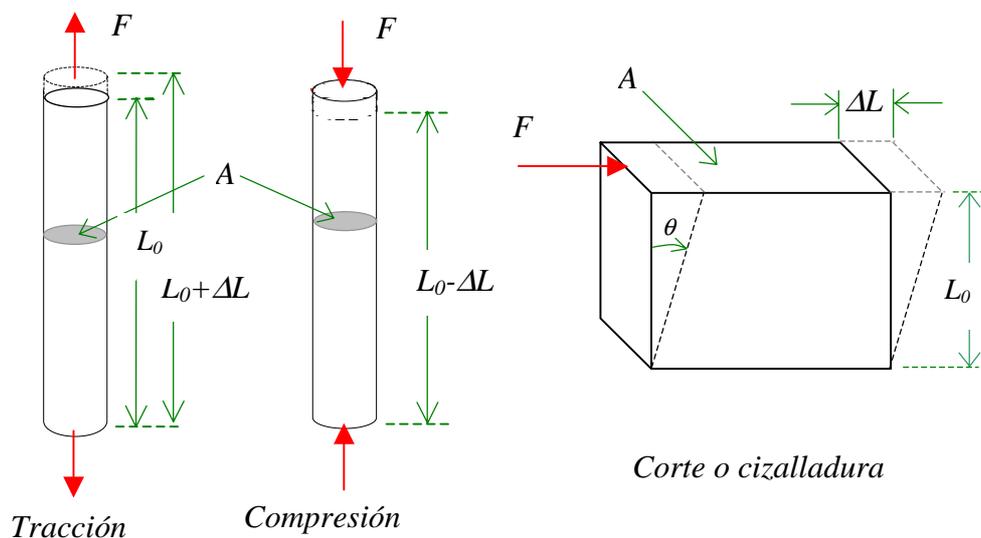
se los suele designar con la letra  $Y$ . En rigor esta relación solo vale en la llamada zona de proporcionalidad (Fig. 2). El cociente  $F/A$  se denomina *esfuerzo* (stress) y se denota con la letra  $\sigma$ , sus unidades son las mismas que las de presión (Pa). Al cociente  $\Delta L/L_0$  se lo denomina *deformación unitaria* (strain) y se la denota con la letra  $\epsilon$ , esta magnitud es adimensional (no tiene unidades). Con esta notación la expresión (1) se puede escribir como:

$$\sigma = E \cdot \epsilon = Y \cdot \epsilon \quad (3)$$

En la figura 2 se muestra una curva a típica de la deformación con respecto al esfuerzo.



**Figura 2.** Relación entre el esfuerzo aplicado  $\sigma$  y la deformación unitaria  $\epsilon$ . Cuando se sobrepasa el límite elástico, y se suprime el esfuerzo aplicado, el material queda permanentemente deformado, este hecho se indica en el gráfico por medio de las flechas. El valor  $\epsilon_0$ , indica la magnitud de la deformación permanente. Hasta el límite de proporcionalidad  $\epsilon_0 < 10^{-4}$ .



**Figura 3.** Barra cilíndrica de longitud original  $L_0$ , sometida a tracción, compresión y corte.

Al principio del estiramiento, la deformación es proporcional al esfuerzo, es zona de validez de la Ley de Hooke. Esto ocurre hasta que el esfuerzo aplicado alcanza un valor

llamado “*Límite de proporcionalidad*” ( $\sigma_{pr}$ ). Si el material es sometido hasta este valor de esfuerzo, al suprimir el mismo, el material retoma su forma original sin sufrir deformación permanente.

Más allá del Límite de proporcionalidad, la gráfica se desvía de la recta y no existe una relación sencilla entre  $\sigma$  y  $\epsilon$ . Sin embargo, hasta el límite elástico, el objeto regresará a su longitud original si se remueve la fuerza aplicada, es decir los esfuerzos aplicados no producen deformaciones permanentes (caracterizada por el valor de deformación residual  $\epsilon_0$ ) en el material. Más cuantitativamente, por lo general se requiere que hasta el límite de elástico  $\epsilon_0 < 10^{-4}$ . La zona desde el origen hasta el límite elástico se llama *zona elástica*. Si el objeto se somete a un esfuerzo más allá del límite elástico, entra a la *región plástica* y no regresará a su longitud original al retirar la fuerza aplicada, sino que quedará permanentemente deformado, esto es el material presenta efectos de histéresis. Si el esfuerzo continua incrementándose más allá del límite elástico, se alcanza de ruptura. Entre el límite elástico y el punto de ruptura, a menudo existe una zona de fluencia, donde el material se deforma fácilmente, sin necesidad de aumentar el esfuerzo (región plana de la curva). Dependiendo del tipo de material, esta región de fluencia puede o no existir. Si se desea que una muestra no se rompa, es importante no superar el esfuerzo asociado al límite de fluencia  $\sigma_Y$  (*Yield Strength o Tensile Strength*).

Material	Módulo de Young $E$ [GPa]	Tensión de Fluencia $\sigma_F$ [Mpa]	Módulo de Corte $G$ [Gpa]	Módulo de Volumen $K$ [Gpa]	$\alpha \times 10^6$ Coef. Exp. [1/°C]	$\mu$ Coef. Poiss.
Hierro Colado	100		40	90		
Hierro	150-170	180	60	120	11.7	
Acero Inox.	195	550			17.3	0.24 0.28
Acero	200		80	140		0.25 0.30
Latón	100		35	80		0.32 0.42
Aluminio	70		25	70	21.0	0.32 0.36
Cobre	110-120	300	38	120	16.5	0.33
Níquel	204	460			13.3	
Bronce	90					
Plata	82.7					0.37
Concreto	20 (compresión)	5- 35 (compresión)			11.7	0.1 0.15
Vidrio	48-78					0.2 0.3
Mármol	50			70		0.10 0.15
Madera, pino	1 a 10	40 – 80				
Nylon	5	40-100				0.35
Hueso de extremidades	15					

**Tabla 1** – Módulo de elasticidad (unidades  $1 \text{ Kg/mm}^2 = 9.8 \text{ MPa}$ ,  $1 \text{ Kg/cm}^2 = 0.098 \text{ Mpa}$ ,  $100 \text{ PSI} = 0.689 \text{ MPa}$ )<sup>7,8,9</sup>

Cuando una muestra cilíndrica se somete a tracción, además de sufrir un estiramiento en la dirección de la fuerza aplicada, la muestra sufre un estrechamiento en sus dimensiones transversales. Si denominamos con  $d$  el diámetro de una muestra cilíndrica, por efecto del esfuerzo aplicado, el mismo disminuirá en una magnitud  $\Delta d$ .

Definimos la deformación transversal  $\varepsilon_T = \Delta d/d$ . En general  $\varepsilon_T$  es proporcional a  $\varepsilon$ , esto es:

$$\varepsilon_T = \mu \cdot \varepsilon, \quad (4)$$

la constante  $\mu$ , se denomina *coeficiente de deformación transversal o coeficiente de Poisson*. Para una muestra incompresible, el valor sería  $\mu = 0.5$ , para una material isótropo se espera  $\mu = 0.25$ <sup>1,2</sup>. Experimentalmente su valor varía usualmente entre 0.25 a 0.5, siendo típicamente 0.3 para muchos materiales (Ver tabla 1).

Los esfuerzos de tracción son solo un tipo de los múltiples formas en que un material puede ser solicitado. En la figura 3 se muestran dos tipos comunes de esfuerzos aplicados a un material, el de compresión y el de corte o cizalladura. Desde luego también existen esfuerzos de torsión. En el caso de los esfuerzos de corte, el mismo se define como el cociente entre la fuerza que produce la deformación y el área de la cara paralela a la fuerza (cara superior en la Figura 3). Por su parte la deformación unitaria, es el cociente del desplazamiento de la cara superior a la altura de la muestra. Para muchos metales, la relación entre esfuerzo y deformación es la misma para la compresión y la tracción, pero desde luego no es universal, existen muchos materiales, en que las propiedades de compresión y tracción son muy diferentes, por ejemplo el concreto, la piedra, vidrio, mármol, etc.

Para el caso de deformaciones de corte o cizallamiento la relación entre esfuerzo y deformación, en la zona proporcional viene dada por:

$$\sigma = G \cdot \frac{\Delta L}{L_0} = G \cdot \varepsilon_c = G \cdot \tan \theta \quad (5)$$

donde  $G$  se denomina el módulo de corte o cizallamiento y  $\theta$  representa el ángulo en que rota el lado vertical (Fig.2) como consecuencia de la deformación. El módulo de corte esta relacionado con el módulo de Young por la relación:<sup>1,2,9</sup>

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (6)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de Poisson. Similarmente, si una muestra se somete a una compresión en todas las direcciones, por ejemplo cuando el cuerpo se sumerge en un fluido dentro del cual su presión exterior se incrementa en una cantidad  $\Delta P$ , su volumen decrecerá en una magnitud  $\Delta V$ , a partir de su volumen su inicial  $V_0$ . En este caso la relación entre deformación y presión viene dada por:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta P}{K} \quad (7)$$

donde, en la zona proporcional, la constante  $K$ , llamada módulo de compresibilidad, se vincula con el módulo de Young por la relación:<sup>1,2,9</sup>

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)} \quad (8)$$

Incidentalmente, si  $\mu \rightarrow 0.5$ ,  $G \rightarrow \infty$ , o sea el material sería incompresible. Si una muestra cilíndrica de longitud  $L_0$  y área transversal  $A$ , se somete a una torsión a lo largo de su eje por efecto de un par o cupla aplicado  $M$ , la muestra se deformará, rotando sus cara (perpendicular a su eje) un ángulo  $\theta$ . Dentro de la relación proporcional, se cumple:

$$\theta = \frac{M \cdot L_0}{G \cdot I_p} \quad (9)$$

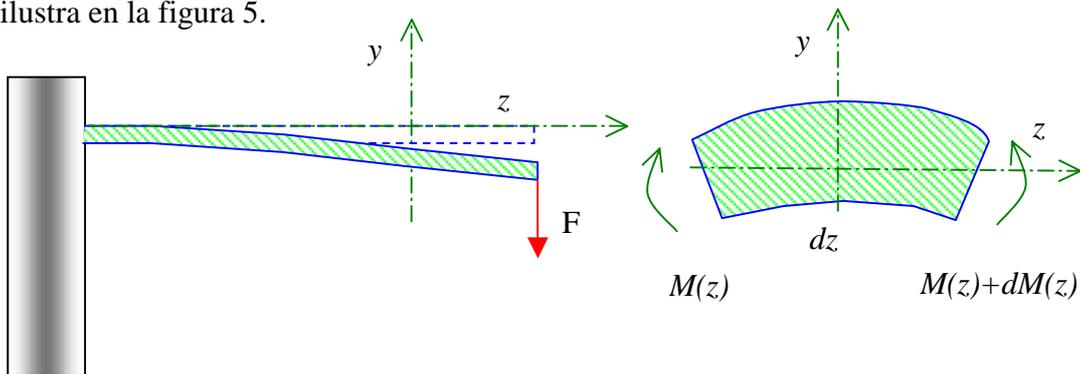
o bien en forma diferencial

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{M}{G \cdot I_p} \quad (10)$$

donde  $I_p$  representa el momento areal polar (Ver Fig. 5),  $G$  y  $M$  el momento o par torsor.

### Pandeo de Vigas (Lectura optativa)

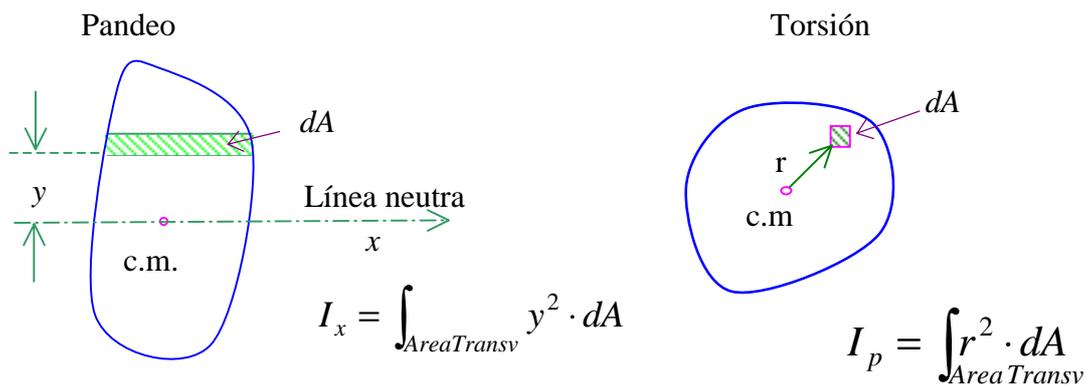
Cuando una viga de sección uniforme se flexiona, como se ilustra en la Fig. 4, parte de la misma se tracciona (parte superior) y parte de la misma esta sometida a compresión (parte inferior). En general, una magnitud importante que determina sus propiedades para el pandeo, depende del momento areal de sus sección transversal respecto de una línea recta, llamada línea neutra, que pasa por el centro de gravedad de la sección, como se ilustra en la figura 5.



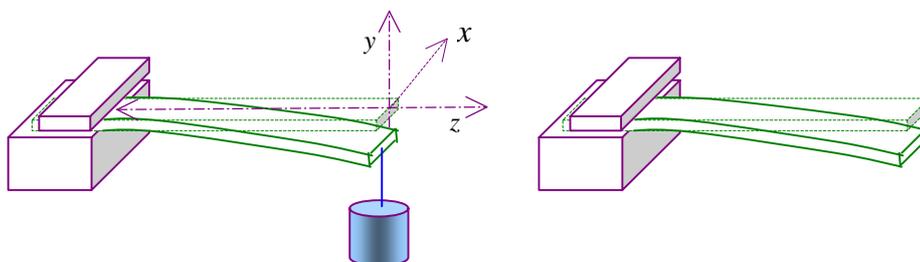
**Figura 4.** Barra cilíndrica de longitud original  $L_0$ , pandeo. A la izquierda se muestra un segmento infinitesimal de la barra sometida a pandeo.  $M(x)$  representa el momento o par flector.

La relación entre el par o cupla flectora y la deformación en este caso viene dada por la relación:

$$E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = M(z) \quad (11)$$



**Figura 5.** Definición del momento areal de una barra de sección uniforme. La línea neutra pasa por el centro de gravedad de la figura (izquierda) y la integral se supone se realiza sobre toda la sección. A la derecha se muestra como se calcula el momento areal polar, de utilidad para calcular las torsiones,  $dA$  representa el elemento diferencial de área.



**Figura 6.** Barra de longitud  $L$ , soportada por una morsa y con el otro extremo libre. A la izquierda con una sobrecarga en su extremo y a la derecha sin sobrecarga y vibrando.

La ecuación de movimiento de una barra con vibración transversal viene dada por

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (12)$$

y definiendo

$$c_0^2 = \frac{E \cdot I_x}{A \cdot \rho} \quad (13)$$

la ecuación (2) se transforma en:

$$c_0^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

Si existen fuerzas de fricción (internas del material o externas, p.ej. medio viscoso), caracterizada por un coeficiente de fricción  $b$  (por unidad de longitud) y además existe una fuerza impulsora  $F(z,t)$  por unidad de longitud (dirección  $z$ ), la ecuación de movimiento (13) o (14) de transforma en:

$$E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = F(z,t) \quad (15)$$

Un caso de interés práctico es la forma que toma una barra de longitud  $L$  soportada por una morsa y de la que pende una sobrecarga  $m$  de su extremo como se ilustra en la Figura 6. La forma de la curva que forma la barra viene dada por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{m \cdot g}{E \cdot I_x} \cdot (L - z) \quad (16)$$

cuya solución es:

$$y(z) = -\left(\frac{m \cdot g}{2E \cdot I_x}\right) \cdot \left(L \cdot z^2 - \frac{z^3}{3}\right) \quad (17)$$

Si la barra vibra sin sobrecarga (es decir con su extremo libre) la frecuencia de vibración se obtiene a partir de (14) con las condiciones de bordes ( $y(z=0)=0$ ,  $\partial y / \partial z \Big|_{z=0} = 0$ ,  $\partial^2 y / \partial z^2 \Big|_{z=L} = 0$  y  $\partial^3 y / \partial z^3 \Big|_{z=L} = 0$ ), la frecuencia fundamental viene dada por la expresión siguiente expresión<sup>3,4,5</sup>:

$$f_1 = \frac{0.28}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_x}{A \cdot \rho}} = \frac{0.28}{L^2} \cdot c_0 \quad (18)$$

Similarmente, para una barra con sus dos extremos libres, la solución de (14) conduce a las siguientes frecuencia propias<sup>3,4,5,6</sup>:

$$f_1 = \frac{1.7908}{L^2} \cdot c_0 \quad \text{si } n=1 \quad (19)$$

y

$$f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot c_0 \quad \text{si } n > 1 \quad (20)$$

En presencia de roce o fricción, (Ec. 15), las frecuencias se modifican ligeramente, si  $\omega_{0k}$  es la frecuencia natural sin roce (Ec. 18,19, 20) y las correspondientes frecuencias con roce son  $\omega_k$ , entonces:

$$\omega_k^2 = \omega_{0k}^2 + \delta^2 \quad \text{con} \quad \delta = \frac{I_x \cdot E}{2 \cdot A \cdot \rho} \cdot b = \frac{c_0^2}{2} \cdot b \quad (21)$$

en esta ecuación  $d$  representa el factor de atenuación que determina como la amplitud de oscilación decrece en el tiempo, o sea que para un dado punto de la barra, la oscilación en el tiempo puede escribirse como:

$$y(z_0, t) = B(z_0) \cdot \exp(-\delta \cdot t) \cdot \sin(\omega_k t + \varphi(z_0)) \quad (22)$$

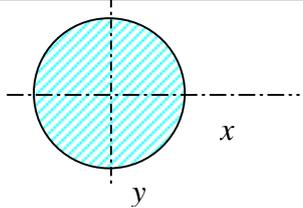
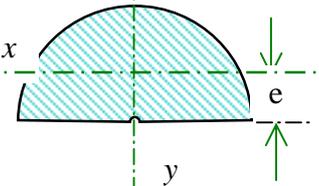
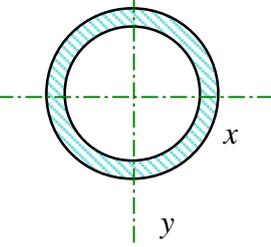
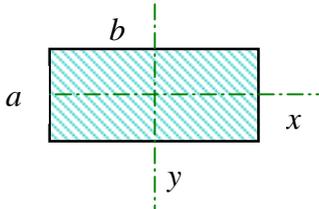
aquí,  $z_0$  indica la coordenada de la barra en la que se observa la oscilación.

## Bibliografía

1. Theory of elasticity - S. Timoshenko and J.N. Goodier, Mc Graw-Hill NY 1951
2. Introducción a la mecánica de los sólidos - P.A.A. Laura y M.J. Maurizi - EUDEBA Buenos Aires 1979.
3. Vibraciones Mecánicas – Seto - Mc Graw-Hill NY 1970
4. Introducción a la Teoría de las Vibraciones Mecánicas - F. L. Babio y H.M. Cortés - Ed. Labor S.A. Barcelona 1970
5. Matemáticas superiores para Ingenieros y Científicos – L.A. Pipes - Mc Graw-Hill NY 1970
6. A Student Project on Wind Chimes – G.W. Baxter and K.M. Hagenbuch – Phys. Teach. **36**, 204 (1998) y Phys. Teach. **36**, 209 (1998)
7. Manual del Ingeniero - Hütte - Ed. Gustavo Gili S.A. Barcelona 1980
8. Handbook of Chemistry and Physics – CRC - Lide, D.R. (Ed.) - Springer - 80th ed. 1999
9. Manual de Física Elemental – N.I. Koshkin y M.G. Shirkévich – MIR Moscú 1975

## Apéndice

Momentos areales para distintas secciones transversales

Sección Transversal	Momentos	Distancia al c.m.
	<p>Circulo de radio R</p> $I_x = I_y = \frac{\pi}{4} \cdot R^4$ $I_p = \frac{\pi}{2} \cdot R^4$	
	<p>Seimi-circulo de radio R</p> $I_x = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \cdot R^4$ $I_y = \frac{\pi}{8} \cdot R^4$	$e = \frac{4}{3\pi} \cdot R$
	<p>Tubo de radios R (exterior) y r (interior)</p> $I_x = I_y = \frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$ $I_p = \frac{\pi}{2} \cdot (R^4 - r^4)$	
	<p>Rectángulo de lados a y b</p> $I_x = \frac{b \cdot a^3}{12} \quad I_y = \frac{b^3 \cdot a}{12}$	

## Termometría.

La temperatura se mide en el sistema SI en grados Celsius (centígrado). Mientras que las temperaturas absolutas se realizan en grados Kelvin, la relación entre ambas es:

$$T [K] = T [^{\circ}C] + 273.15 \quad (1)$$

La escala Celsius se relaciona con la escala Fahrenheit por:

$$T [^{\circ}C] = \frac{5}{9} \cdot (T [^{\circ}F] - 32) \quad (2)$$

**Expansión térmica:** En general cuando se calienta una barra de un sólido, su longitud aumenta. Este hecho físico se resume en las siguientes relaciones:

$$\Delta L = L(T) - L(T_0) = L(T_0) \cdot (\alpha \cdot (T - T_0)) \quad (3)$$

o bien

$$\frac{dL}{L} = \alpha \cdot dT \quad (4)$$

Aquí,  $L(T)$  es la longitud de la barra a la temperatura  $T$ ,  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmico (lineal) característico de cada sustancia.

Similarmente, el volumen, tanto para un sólido como para un líquido, en general aumenta siguiendo la relación:

$$V(T) = V(T_0) \cdot (\beta \cdot (T - T_0)) \quad (5)$$

Aquí  $\beta$  es el coeficiente de expansión volumétrica.

Para el caso de sólidos isotrópicos y homogéneos, es fácil probar que el coeficiente de dilatación de área es  $2\alpha$  y el volumétrico  $\beta = 3\alpha$ .