Actividad II.xx - Parábolas y Catenarias

Objetivo

Estudiar experimentalmente la forma que adopta una cuerda flexible o una cadena sostenida por sus extrememos y comparar estos resultados con las expectativas teóricas usando las leyes de la estática.

Introducción. Es una experiencia común encontrar cuerdas, cables flexibles y cadenas suspendidas de dos puntos. Un ejemplo imponente y bello lo constituyen los cables de los puentes colgantes, como por ejemplo el Golden Gate de San Francisco. El problema de describir matemáticamente la forma de una cadena suspendida por sus extremos fue resuelto por Jakob Bernoulli en 1690, muchos científicos prominentes trataron este problema, entre otros Galileo, Leibniz, Huygens y Euler. Consideremos una cadena de longitud L_c y masa M_c suspendida de sus extremos como se ilustra en la figura 1. Si suponemos que la distancia horizontal entre los puntos de suspensión es L y las alturas de dichos puntos de suspensión, medidos respecto del punto más bajo de la cuerda, que tomamos como origen de coordenadas, son h_1 y h_2. La forma que adopta la cuerda o cadena (catenaria) viene descripta por la función y(x), donde x es la coordenada horizontal.

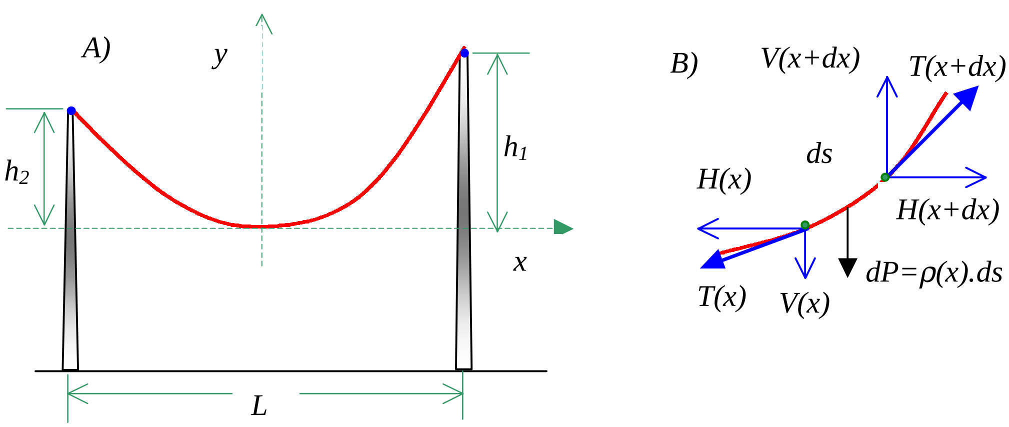

Figura 1. A) Cadena o cuerda flexible suspendida por sus extremos de dos puntos fijos. Las coordenadas de dichos puntos son $(-L_2,h_2)$ y (L_1,h_1), con $L_1+L_2=L$. B) Fuerzas que actúan sobre un segmento infinitesimal de cuerda de longitud ds.

El peso del elemento infinitesimal de longitud ds es $dP=\rho(x).g.ds$, siendo g el valor de la aceleración de la gravedad y $\rho(x)$. la masa por unidad de longitud de la cuerda o cadena, o sea su densidad lineal de masa en el punto de coordenadas x, si dicha densidad fuese constante, entonces $\rho(x)=M_c/L_c$.. $T(x)$ designa el valor de la tensión de la cuerda o cadena en el punto de coordenada x, en la dirección de la tangente a la curva $y(x)$. $V(x)$ y $H(x)$ designan las componentes horizontales y verticales de la tensión $T(x)$. Del requerimiento físico de equilibrio de las fuerzas en la dirección x e y tenemos:

$$H(x+dx) = H(x) = H_0 \tag{1}$$

donde H_0 representa la tensión de la cuerda o cadena en su vértice, donde *dy/dx=0* y

$$V(x+dx)-V(x)=dV=dP=\rho(x)\cdot g\cdot ds \qquad (2)$$

de la geometría del problema, podemos escribir:

$$\frac{V(x)}{H(x)}=\frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Combinado (1),(2) y (3) tenemos:

$$dV=\frac{dV}{dx}\cdot dx=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot H_0\cdot dx=\rho(x)\cdot g\cdot ds \qquad (4)$$

como $ds=\sqrt{1+(dy/dx)^2}$, (4) se puede escribir como:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\rho(x)\cdot g}{H_0}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (5)$$

si definimos:

$$\lambda(x)=\rho(x)\cdot\frac{g}{H_0} \qquad (6)$$

la ecuación diferencial de la forma de la cadena (5) se puede escribir como:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\lambda^2(x)\cdot\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \qquad (7)$$

Si definimos *z(x)=dy/dx*, la ecuación (7) puede integrarse fácilmente.

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\int\lambda(x)\cdot dx \quad\Rightarrow\quad z=Sinh(\lambda\cdot u(x)) \qquad (8)$$

donde

$$u(x)\equiv\int\lambda(x)\cdot dx \qquad (9)$$

Si la densidad de masa fuese constante, $\rho(x)=M_c/L_c$ y $\lambda=M_c.g/(H_0.L_c)$. Las expresiones anteriores conducen a:

$$z(x)\equiv\frac{dy(x)}{dx}=Sinh(\lambda\cdot x)+c_1 \qquad (10)$$

Si elegimos nuestro sistema de ejes coordenadas tal que el origen coincide con el punto más bajo de la cadena, donde la tangente (*z=dy/dx*) es nula, $c_1=0$. Integrando una vez más, obtenemos la ecuación de la cadena o catenaria *y(x)* buscada:

$$y(x)=\frac{1}{\lambda}Cosh(\lambda\cdot x)+c \qquad (11)$$

Las constantes c y λ se pueden determinar haciendo cumplir las condiciones de borde: para $x=L_1$, $y=h_1$ y $x=-L_2$, $y=h_2$. Por simplicidad, en los que sigue supondremos que $h_1=h_2=h$ y $L_1=L_2=L/2$. Bajo estas condiciones, tenemos:

$$h=\frac{1}{\lambda}Cosh(\lambda\cdot L/2)+c \qquad (12)$$

como $y(x=0)=0$, tenemos:

$$0=\frac{1}{\lambda}Cosh(0)+c \qquad (13)$$

Por lo tanto, la ecuación de la catenaria es:

$$y(x)=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(Cosh(\lambda\cdot x)-1\right). \qquad (14)$$

La longitud de la cadena puede obtenerse de (12) como:

$$L_C=2\cdot\int_0^{L/2}\sqrt{1+(dy/dx)^2}\cdot dx=\frac{2}{\lambda}\cdot Sinh(\lambda\cdot L/2). \qquad (15)$$

Combinando (12) con (15) obtenemos la condición:

$$\frac{\lambda\cdot L_c}{2\cdot(\lambda\cdot h+1)}=Tanh(\lambda\cdot L/2) \qquad (16)$$

Esta expresión indica que los parámetros: L, L_c, h y λ están relacionados. Si se conoce L, L_c y h, es posible determinar el valor de λ resolviendo la ecuación trascendente (16). Un método sencillo para ello, consiste en realizar un gráfico de tanto de el primer y segundo miembro de (16) como función de λ. Los valores λ de par los que las curvas se interceptan nos dan las raíces de la ecuación(16).

A veces es útil tener la expresión de la catenaria tomando como origen de coordenadas el extremo superior izquierdo de donde se cuelga la cadena, en este caso es fácil demostrar, la expresión (12) se convierte en:

$$y(x)=\pm\frac{1}{\lambda}\cdot\left(Cosh\left[\frac{\lambda\cdot L}{2}\right]-Cosh\left[\lambda\cdot(x-\frac{L}{2})\right]\right). \qquad (17)$$

donde el signo + o - se adopta según si el eje y se adopta apuntando hacia abajo o hacia arriba respectivamente, en este caso $y(x=0)=0$, para el vértice de la catenaria, que esta en la coordenada $x=L/2$, .vale: $y(L/2)=\pm h$**.**

- ✓ Demuestre que las expresiones (14) y (17) son equivalentes como se enuncio previamente.
- ✓ Para una cadena de Lc=2 m y L=1m y h=0.8 m resolviendo la ecuación(14), demuestre que λ=2.030 y 4.86. ¿Cuál es el significado de tener dos raíces?
- ✓ Si se tuviese una cadena con una densidad lineal de masa variable $\rho(x)$, a partir de las expresiones (8) y (9) determine cual debería ser la forma de dicha densidad para que la forma adoptada por la cadena sea una parábola de la forma $y(x)=a.x^2$. Discuta como debería cargar a una cadena común para que la misma adopte una forma parabólica.

Equipamiento recomendado: Una cámara digital de resolución igual o mejor de 460x600 pixeles o imágenes digitalizadas de cuerdas y cadenas sostenidas por sus extremos. Una cadena de 1 a 3 m de longitud y una cuerda flexible de dimensiones similares.

Proyecto 1. Usando una cámara digital, adquiera imágenes de la cadena sujeta por sus extremos. La separación entre los puntos de suspensión es L y los mismos están a la misma altura. Asimismo, suponemos conocida la longitud de la cadena L_c. Es recomendable colocar dos reglas graduadas, tanto verticalmente como horizontalmente, de modo de poder reconstruir en la imagen las escalas reales. Una sugerencia de mucha utilidad en este experimento consiste en contar con una plomada en fondo del cuadro, y una línea horizontal bien nivelada. Luego trate de nivelar la cámara en una posición tal que las línea vertical de la plomada y la línea horizontal sean lo más paralelas posible a los márgenes del fotograma. De este modo el sistema de coordenadas de píxeles del fotograma resultaran paralelos a los ejes x (horizontal) e y (vertical), lo que hará muy simple la conversión entre ambos sistemas de coordenadas. También es conveniente ubicar la cámara en una posición que permita tomar todas las fotos necesarias para el experimento desde una misma posición, de modo que la conversión y calibración de escalas de las fotos sea haga una sola vez.

- ✓ Adquiera varias imágenes de la cadena para distintos valores de L. Usando algún programa de visualización de imágenes, por ejemplo *Microsoft photo editor*. Este programa, a igual que muchos otros, permite obtener las coordenadas de cada punto donde se encuentra el mouse en unidades de píxeles.
- ✓ Cargue cada una de las imágenes, para cada una, usando el cursor del mouse, obtenga las coordenadas de los extremos de las reglas verticales y horizontales, de modo de lograr transformar las coordenadas de cada punto de la imagen en una coordenada en dimensiones reales. Seguidamente, proceda a obtener las coordenadas de varios puntos de la cadena, de modo de caracterizar lo mejor posible su forma.
- ✓ Transfiera estos puntos a una planilla de cálculo y transforme estas coordenadas a dimensiones reales. Elija el origen de coordenadas del modo que le resulte más conveniente. Una forma adecuada de elegir el origen, seria usar como tal el punto más bajo de la cadena, de este modo es posible comparar los resultados experimentales directamente con las expresiones teóricas discutidas más arriba.
- ✓ Grafique los valores experimentales de y en función de x^2. Discuta si es posible linealizar los datos experimentales. ¿Puede descartar la hipótesis de que la forma de la catenaria es cuadrática?, ¿Puede descartar la hipótesis de que la forma de la catenaria es polinomial?

- ✓ Compare los resultados obtenidos con los obtenidos con las expresiones (14) y (17). Para poder hacer esta comparación, es necesario resolver la ecuación (16), lo cual puede hacerse usando alguna procedimiento numérico para encontrar la raíz de una ecuación trascendental, por ejemplo el método de la secante o el de Newton, o bien puede usar algún programa como Mathematica o MatLab. Una vez determinado el valor de λ para cada valor de h, L_c y L, compare los valores obtenidos experimentalmente para (x,y) con los correspondientes valores predichos por las expresiones (14) o (17), graficando ambos en una misma figura. Discuta sus resultados.

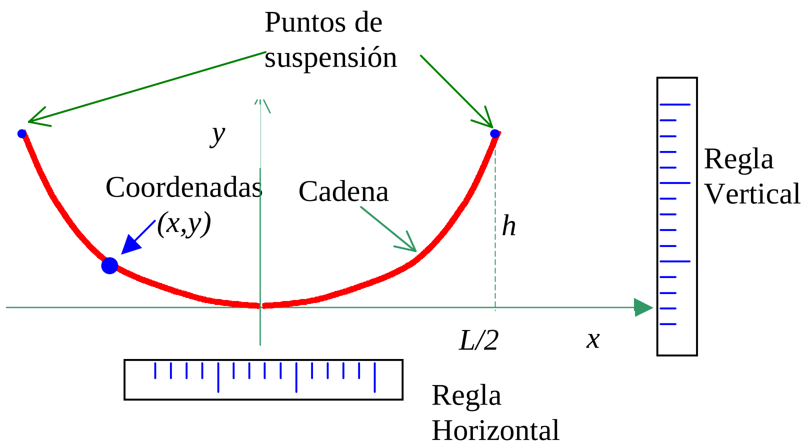

Figura 2. Cadena o cuerda flexible suspendida por sus extremos de dos puntos fijos, las reglas graduadas, permiten definir una escala absoluta para medir las distancias. Es aconsejable colocar la cámara sobre un eje perpendicular al plano de la catenaria y que pase cerca del origen de coordenadas. Asegúrese de que las reglas estén bien verticales y horizontales respectivamente.

Figura 3. Jefferson memorial en Saint Louis, Mo EE.UU.

Proyecto 2. Usando imágenes digitalizadas de cuerdas y cadenas de distintos masas por unidad de longitud, pero de longitudes (L_c) iguales, realice en mismo estudio propuesto en el proyecto anterior.

- ✓ Varía la forma de las cuerdas y cadenas con la densidad lineal de masa.
- ✓ ¿Cómo explica sus resultados?

Proyecto 3. Usando imágenes digitalizadas de puentes colgantes, por ejemplo el Goden Gate, usando el procedimiento descripto anteriormente, obtenga la mayor cantidad de puntos de los tensores. No se preocupe por la determinación de una escala absoluta. Para esta actividad puede trabajar con la escala de pixeles.

- ✓ Transfiera estos puntos a una planilla de cálculo y realice una representación gráfica de sus resultados.

- ✓ A partir de sus datos estime el valor de L_c de la curda, en unidades de píxeles. Un modo de hacer esto es simplemente usar el teorema de Pitágoras entre puntos adyacente y sumar las longitudes. Un modo más sofisticado sería usar un programa de interpolación que pase por los puntos medidos, luego estimar la longitud a partir de la curva interpolada.
- ✓ Usando los valores de L_c, L y h obtenidos de sus determinaciones (en unidades de píxeles), determine el valor de λ usando la ecuación (14). Usando la expresión (12) compare la forma de la curva teórica con los resultados experiménteles. ¿Está la forma de los tensores bien representada por una catenaria?

Proyecto 4. Usando imágenes de Jefferson memorial en Saint Louis, Mo EE.UU. y utilizando la metodología descripta en las anteriores actividades, trate de determinar la forma de dicho arco. ¿Qué puede concluir de su estudio?, ¿Puede justificar la forma elegida por los constructores de dicho arco?

Proyecto 5. Cuerda cargada-Parábola. A partir del estudio realizado, respecto a la densidad de masa variable de la cuerda, diseñe un esquema de colgar pesos el lugares equidistantes sobre cadena de modo que la misma adopte una forma parabólica. Usando la cámara digital, verifique si la forma que adopta la cadena es realmente parabólico .la forma de dicho arco. ¿Qué puede concluir de su estudio?, ¿Puede justificar la forma elegida por los constructores de dicho arco?

Bibliografía

1. http://www.du.edu/~jcalvert/math/catenary.htm
2. http://www.carondelet.pvt.k12.ca.us/Family/Math/03210/page5.htm
3. http://www.inventionfactory.com/history/RHAbridg/sbtd/
4. http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Catenary_dir/catenary.html
5. Famous Curves Index: Catenary Diagram, history, and connections to other curves.
6. Hanging with Galileo Suspension bridges and the parabola. Hanging Chains and the catenary.
7. The Catenary: A Curve of Low Potential Energy An activity for students to compare parabolas with hanging chains, calculate potential energy, and find the equations of the Gateway Arch.
8. Build an Arch Understanding the catenary arch and its strength.
9. The Catenary: The Statics of a Hanging Chain Geometry, physics, and differential equations.
10. Jefferson National Expansion Memorial Gateway Arch Architecture in the Parks: A National Historic Landmark Theme Study
11. Jefferson who? Gateway to what? *Why is the arch unique in American architecture?* Arch History & Architectural Information Historical and architectural overview including equations, materials, and construction. Compare the Gateway Arch to other monuments.