

Unidad 3

Mediciones indirectas

Propagación de incertidumbres

Hay magnitudes que no se miden directamente, sino que se derivan de otras que sí son medidas en forma directa. Por ejemplo, para conocer el área de un rectángulo se miden las longitudes de sus lados; para determinar la velocidad de un vehículo se miden independientemente distancias e intervalos de tiempo. La pregunta que queremos responder aquí es cómo las incertidumbres en las magnitudes que se miden directamente se *propagarán* para contribuir a la incertidumbre de la *magnitud derivada* que se calcula usando una expresión. Sólo daremos los resultados, para mayor detalle se recomienda consultar la bibliografía citada. La Fig. 3.1 ejemplifica el concepto de propagación cuando una magnitud y y su incertidumbre Δy se calculan a partir de otra x a la cual conocemos su mejor valor x_0 y su incertidumbre Δx .

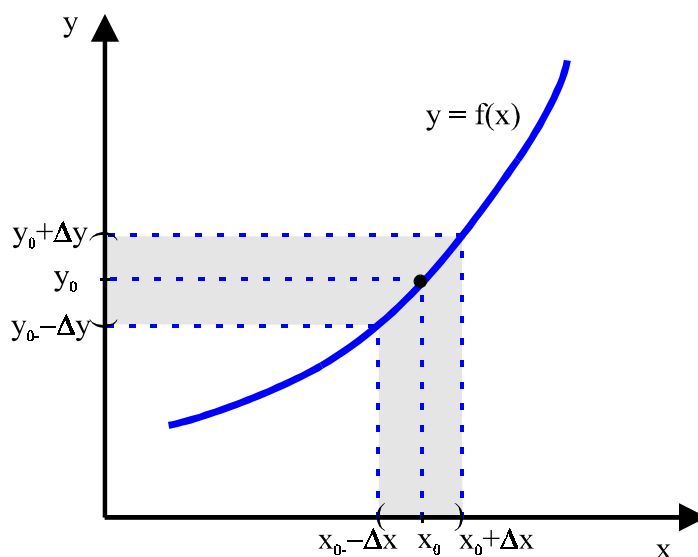


Fig. 3.1 Influencia de la incertidumbre de una magnitud x en la determinación de la incertidumbre de una magnitud derivada.

Tomemos un caso general en el que una magnitud V sea una función de varias magnitudes $x, y, z, \dots$:

$$V = V(x, y, z, \dots), \quad (3.1)$$

y que $x, y, z, \dots$, todas independientes entre sí, se midieron directamente y que conocemos sus valores $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \dots$ e incertidumbres $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$. Se puede demostrar que la incertidumbre de V , ΔV , está dada por^[1]:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \dots} \quad (3.2)$$

Esta ecuación es la *fórmula de propagación de incertidumbre*. La notación $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, ... indica derivación parcial de la función V respecto de las variables independientes $x, y, z, \dots$ y la fórmula se evalúa para los valores $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \dots$.

En el caso especial en que la función $V(x, y, z, \dots)$ sea factorizable en potencias de $x, y, z, \dots$, la expresión anterior puede ponerse en un modo muy simple. Supongamos que la función en cuestión sea:

$$V(x, y, z) = a \cdot \frac{x^n \cdot y^m}{z^l} \quad (3.3)$$

donde a es una constante. La aplicación de la fórmula de propagación da:

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{n^2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2 \cdot \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + l^2 \cdot \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2} \quad (3.4)$$

Para cálculos preliminares, esta expresión puede aproximarse por:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx n \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + m \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + l \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right|. \quad (3.5)$$

Otro caso particular de interés es

$$Z = x \pm y.$$

Usando la Ec. (3.2) obtenemos:

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \quad (3.6)$$



En muchas ocasiones no disponemos de una función analítica que represente a la magnitud de interés en función de las variables de las que sabemos que depende y, por lo tanto, no podemos aplicar la Ec. (3.2) para propagar la incertidumbre.

Tomemos el caso de un experimento que requiera como dato la densidad del agua a la temperatura ambiente. Supongamos que decidimos no medir la densidad del agua sino que vamos a obtenerla de una tabla de densidades, frecuentemente incluidas en manuales de física y química.

Si la temperatura medida es $T = (23.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$, ¿cómo obtenemos de la tabla el dato de la densidad y cómo le asignamos su incertidumbre?

Lo que hacemos es ingresar a la tabla* y obtener la densidad $\langle\rho\rangle$ a la temperatura $\langle T \rangle = 23.0^\circ\text{C}$. De la tabla extraemos:

$$\text{a } \langle T \rangle = 23^\circ\text{C} \quad \rightarrow \quad \langle\rho\rangle = 0.997538 \text{ g/cm}^3.$$

También extraemos de la tabla la densidad para los valores extremos del intervalo de temperatura:

$$\begin{aligned} \text{a } \langle T \rangle - \Delta T = 22.5^\circ\text{C} &\quad \rightarrow \quad \rho_1 = 0.997655 \text{ g/cm}^3 \\ \text{a } \langle T \rangle + \Delta T = 23.5^\circ\text{C} &\quad \rightarrow \quad \rho_2 = 0.997418 \text{ g/cm}^3. \end{aligned}$$

Estos valores ρ_1 y ρ_2 dan un margen de incertidumbre al dato de la densidad del agua debido a la incertidumbre de la medición de la temperatura. También vemos que el valor $\langle\rho\rangle$ no está en el centro del intervalo que definen los valores extremos ρ_1 y ρ_2 (intervalo de incertidumbre asimétrico debido a la variación no-lineal de la densidad del agua con la temperatura). Podemos proponer $\Delta\rho$ como

$$\Delta\rho \approx (\rho_1 - \rho_2)/2 \approx 0.0001 \text{ g/cm}^3,$$

con lo que resulta

$$\rho = (0.9975 \pm 0.0001) \text{ g/cm}^3,$$

cuyo valor e incertidumbre usaríamos en los cálculos sucesivos que involucren a la densidad del agua en los experimentos.

* Ver, por ejemplo, Handbook of Chemistry and Physics (The Chemical Rubber Co.).

 **Truncación de números:** Se desea determinar la densidad de un cuerpo y para ello se procede a medir su volumen, que da como resultado $V = (3.5 \pm 0.2) \text{ cm}^3$ ($\varepsilon_V\% = 6\%$) y su masa $m = (22.7 \pm 0.1) \text{ g}$ ($\varepsilon_m\% = 0.4\%$). A la densidad la calculamos por su definición operacional: $\rho = m / V$. Si realizamos este cociente con una calculadora que presenta resultados con 10 cifras, obtenemos:

$$\rho = 22.7 / 3.5 = 6.485714286 \text{ g / cm}^3.$$

La mayoría de estas cifras no son significativas y debemos truncar el resultado. Para saber dónde hacerlo, debemos propagar la fórmula de la densidad, encontrar su incertidumbre y luego ver qué cifra del resultado afecta. Usando la Ec. (3.5) obtenemos

$$\Delta\rho/\rho \approx 0.06.$$

Por lo tanto,

$$\Delta\rho \approx 0.4 \text{ g/cm}^3,$$

que indica que el valor de la densidad debe incluir una sola cifra decimal como cifra significativa. Sin embargo, al truncar el número 6.4857... debemos tener en cuenta que el número más cercano a él y con una sola cifra decimal es 6.5 y no 6.4, siendo éste último lo que resultaría de un corte automático de dígitos. Finalmente, el valor que obtenemos para ρ es:

$$\rho = (6.5 \pm 0.4) \text{ g/cm}^3 \quad \text{y} \quad \varepsilon_\rho\% = 6\%.$$

Es importante tener en cuenta este criterio de truncación toda vez que realizamos una operación usando una calculadora o computadora.

☺ **Midiendo π :** Sabemos que el perímetro (p) de un círculo está relacionado con su diámetro (d) por la expresión $p = \pi \cdot d$, por lo tanto a través de mediciones de diámetro y perímetro es posible “medir π ”. Diseñe un experimento que le permita realizar esta medición. Obtenga π con este método y dé la incertidumbre del resultado, $\Delta\pi$. Compare con el valor tabulado de esta constante. Consulte sobre otros métodos para obtener π experimentalmente. En particular discuta si con el experimento de [Buffon](http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/1719/) se puede obtener mayor precisión.

Puede encontrarse información adicional en las páginas de Internet:

<http://www.angelfire.com/wa/hurben/code5.html> y
<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/1719/>

Elección de los instrumentos

Un aspecto importante a tener en cuenta antes de proceder a realizar una medición, es la elección de los instrumentos más apropiados para medir con la tolerancia o error requerido. Ignorar este paso puede acarrear importantes pérdidas de tiempo y dinero. Si se excede la tolerancia requerida, seguramente se dilapidó esfuerzo y recursos innecesariamente; por el contrario, si se realizó la medición con menos precisión que lo requerido, la medición podría ser inútil para los fines perseguidos.

Para ver cómo operar frente a esta elección de instrumental supongamos que nuestro problema es determinar con una precisión del 1% el volumen de un alambre, cuyo diámetro es $d \approx 3 \text{ mm}$ y su longitud $L \approx 50 \text{ cm}$. ¿Qué instrumentos debemos usar para lograr nuestro objetivo con el menor costo?

Lo que debemos lograr es $\Delta V/V \approx 0.01$. Como $V = \pi \cdot d^2 L/4$, tenemos que:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L}$$
$$0.01 \approx 0.001 + 0.006 + 0.002$$

La primera expresión es una aplicación de la Ec.(3.5), siendo esta aproximación útil y suficiente para este análisis preliminar. La asignación de valores de la segunda línea es en cierto modo arbitraria, pero hemos respetado que la incertidumbre relativa no supere el 1% requerido. Al número π le asignamos una incertidumbre relativa pequeña, y con esto determinaremos con cuántas cifras usaremos π sin que el error de truncación de π afecte significativamente nuestra medición. Nótese que la calidad de la medición del diámetro tiene mayor incidencia (su incertidumbre relativa está multiplicada por 2) que la de la longitud L y esto es porque el volumen es proporcional a d^2 y solo proporcional a L a la primera potencia. Por esta razón hemos asignado mayor tolerancia (mayor precisión) a la medición de d que a la medición de L . Con esta asignación preliminar decidimos cuáles instrumentos son los más adecuados para realizar el experimento (en general, los más adecuados son los que hacen la medición más fácil, en menor tiempo, con el menor costo y que cumplan los requisitos exigidos).

Como

$$\frac{\Delta d}{d} \approx 0.003 \Rightarrow \Delta d \approx 0.003 \cdot d = 0.003 \cdot 3\text{mm} \approx 0.009\text{mm} \approx 0.01\text{mm},$$

debemos usar, cuanto menos, un tornillo micrométrico para medir d .

De manera similar tenemos para la medición de L :

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.002 \Rightarrow \Delta L \approx 0.002 \cdot L = 0.002 \cdot 50\text{cm} \approx 1\text{mm},$$

por lo tanto una regla común graduada en milímetros será suficiente para medir L .

Para π tenemos:

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} \approx 0.001 \Rightarrow \Delta \pi \approx 0.001 \cdot \pi = 0.001 \cdot 3 \approx 0.003,$$

que indica que debemos usar π con 3 o más cifras decimales para que el error de truncamiento tenga una incidencia despreciable. Por lo tanto, la elección $\pi = 3.1416$ sería adecuada en el presente caso.

Nótese que hasta ahora todo es preliminar y solo hemos elegido los instrumentos a medir. Luego de esta elección, llevamos a cabo las mediciones usando estos instrumentos y procedemos para la medición de d y L . Nótese también que para elegir los instrumentos a usar debemos conocer el valor aproximado de los valores a medir, lo que parecería una paradoja. No obstante, para este análisis preliminar sólo es necesario tener una idea de los órdenes de magnitud y no un valor muy exacto. Este orden de magnitud se puede obtener por una inspección visual o una medición rápida. Finalmente, una vez que realicemos las mediciones de d y L debemos usar la fórmula correcta de propagación de la Ec.(3.2) para calcular la incertidumbre combinada ΔV .

Bibliografía

1. P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).
2. *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 1st ed., International Organization of Standardization (ISO), Suiza (1993); <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html>.