

## Circuitos RLC resonantes acoplados

**Cano, Ramiro**  
cramirocano@com.ar

**Díaz, Federico**  
Facil27@hotmail.com

**Trebisacce, Carlos**  
trevicjt@hotmail.com

**Universidad Favaloro, Facultad de Ingeniería – Bs. As. Argentina**

### Resumen

Se quiere estudiar la forma en la cual los circuitos resonantes interactúan, en este caso se utilizó un circuito **RLC** serie, (resistencia, inductor, y capacitor). La idea principal es ver como varia la frecuencia de resonancia de cada circuito en función de la distancia relativa entre las mismas.

### Introducción

La cualidad de los circuitos **RLC** radica en que su respuesta depende de la frecuencia. Un caso particular es cuando el circuito RLC entra en resonancia, esto sucede cuando se comporta como un resistivo puro, o fasorialmente nos encontramos que la corriente en el circuito y la diferencia de tensión que la genera están en fase.

Este caso particular corresponde a un solo valor de frecuencia y se la denomina frecuencia de resonancia natural ( $\omega_0$ ), y en un circuito **RLC** serie depende de la siguiente expresión, (formula 1).

$$\Rightarrow \text{Frecuencia de resonancia natural: } \omega_{0-n} = \frac{1}{\sqrt{L_n \cdot C_n}}, \quad (1)$$

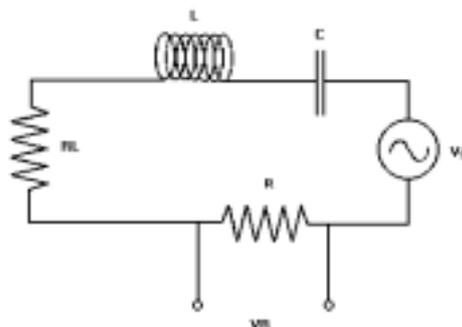
siendo L la inductancia del circuito y C su capacitancia.

Por otra parte, las bobinas generan campos magnéticos que pueden estar afectados por diferentes causas, en nuestro caso con la cercanía entre ellas. La idea principal del experimento es estudiar el comportamiento para un número finito de circuitos y luego extenderlo en una generalización.

### Experimento

Para la realización del experimento se contó con tres circuitos resonantes. Se intentó que sus componentes fueran lo más cercanos en valor posibles, para lograr respuestas en frecuencia similares, un punto importante para esta realización fue el cálculo de la bobina<sup>1</sup> el cual determinó el valor de los otros componentes.

Para encontrar experimentalmente la frecuencia de resonancia, se armó el siguiente circuito de prueba, (figura 1).

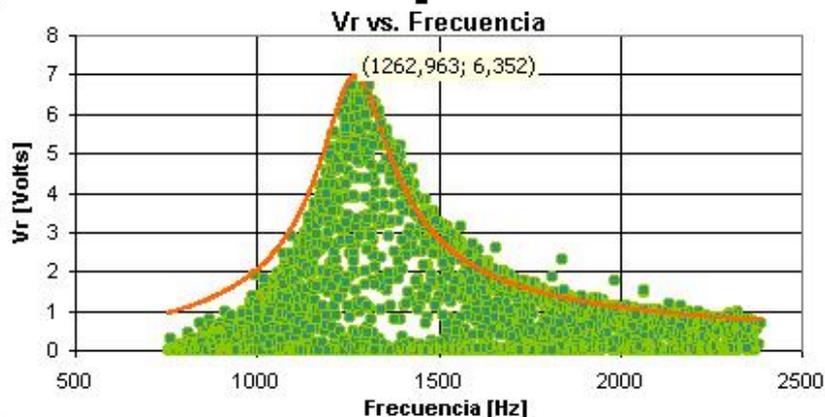


**Figura 1**

*Circuito de prueba para hallar la frecuencia de resonancia.*

<sup>1</sup> Física Re-Creativa. S. Gil y E. Rodríguez, Prentice hall. 2001 Bs. As. ModuloIII, Pag. 155

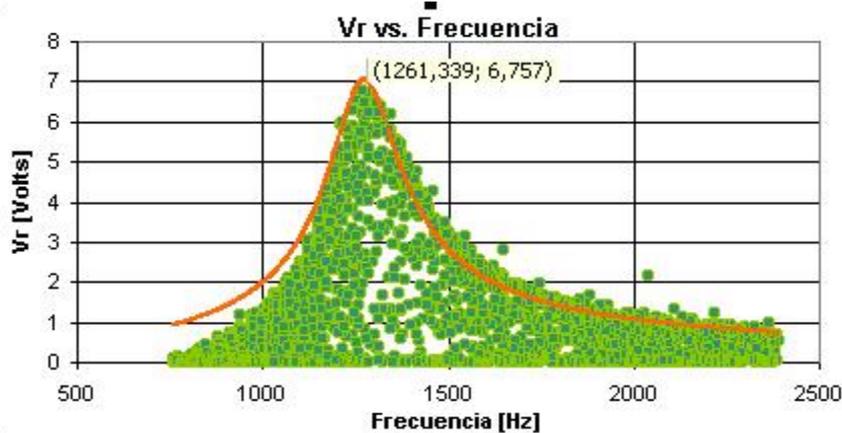
En un principio se estudiaron las características de cada circuito por separado, utilizando un simulador realizado en Microsoft Excel® y luego en forma experimental. Contrastando estas dos formas obtuvimos los siguientes gráficos para cada circuito.



**Circuito A**

Representa la respuesta a un barrido en frecuencia, de un circuito RLC, y su curva teórica, con los siguientes valores:

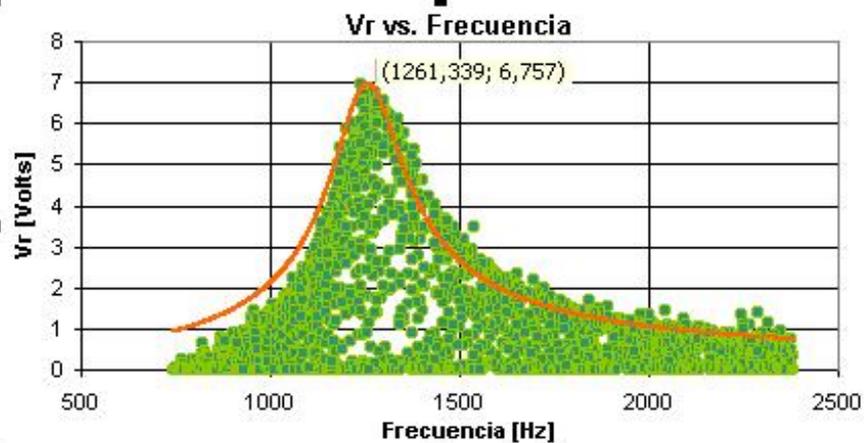
$$R = 30 \pm 1 \Omega, R_L = 30.35 \pm .05, L = 51 \pm 8 \text{ mHy}, C = 307.5 \pm 0.5 \text{ nf.}$$



**Circuito B**

Representa la respuesta a un barrido en frecuencia, de un circuito RLC, y su curva teórica, con los siguientes valores:

$$R = 30 \pm 1 \Omega, R_L = 29.65 \pm .05, L = 52 \pm 6 \text{ mHy}, C = 299.5 \pm 0.5 \text{ nf.}$$



### Circuito C

Representa la respuesta a un barrido en frecuencia, de un circuito RLC, y su curva teórica, con los siguientes valores:

$$R = 30 \pm 1 \Omega, R_L = 30.35 \pm 0.05, L = 52 \pm 2 \text{ mHy}, C = 312.5 \pm 0.5 \text{ nf.}$$

Las graficas obtenidas mediante la simulación corresponden al método teórico de la tensión de la resistencia del circuito, (formula 2), cuando  $\omega = \omega_0$  la parte reactiva se anula y se comporta como un circuito resistivo puro.

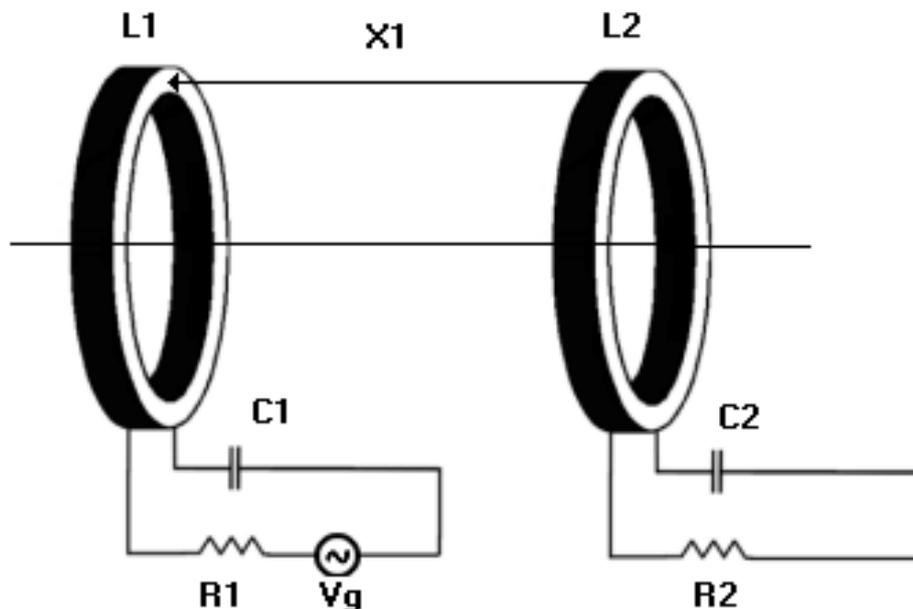
⇒ Tensión en la resistencia del circuito **RLC**: 
$$V_R = \frac{V \cdot R}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}}, \quad (2)$$

Cabe destacar que en el modelo teórico falta tener en cuenta la resistencia que aporta las conexiones y equipos utilizados, por lo tanto éste modelo tiene un factor de calidad<sup>2</sup> diferente.

Como se puede ver y calcular, para el

|                    |                                    |                               |
|--------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| <b>Circuito A:</b> | $\omega_0$ experimental = 1262.952 | $\omega_0$ teorico = 1261.051 |
| <b>Circuito B:</b> | $\omega_0$ experimental = 1267.601 | $\omega_0$ teorico = 1269.235 |
| <b>Circuito C:</b> | $\omega_0$ experimental = 1261.339 | $\omega_0$ teorico = 1259.210 |

Una vez obtenidos estos datos se pasó a armar el montaje del experimento para la medición del acople de los campos magnéticos. Estas mediciones se basan en que las bobinas estén alineadas, para ello se utilizó un tubo de acrílico donde fueron montadas. Solo uno de los circuitos **RLC** es excitado por un generador de funciones, para poder realizar un barrido en frecuencia, y se varió además la distancia entre bobinas. Para más detalle fijarse en la figura 2.



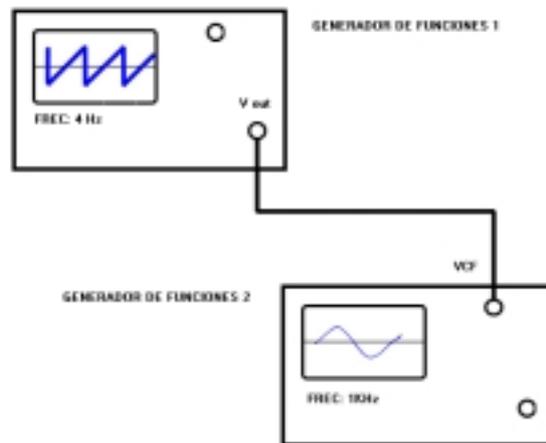
**Figura 2**

Esquema físico empleado para la medición del acople y corrimiento de las frecuencias de resonancia.

Para el barrido de la frecuencia se utilizó un par de generadores, donde uno de ellos generaba una señal triangular de alrededor de los 4Hz y 10 volt-pico, esta señal manejaba la frecuencia del segundo

<sup>2</sup> El factor de calidad es el cociente entre la potencia reactiva y la potencia activa, y fija la selectividad en frecuencia del circuito RLC.

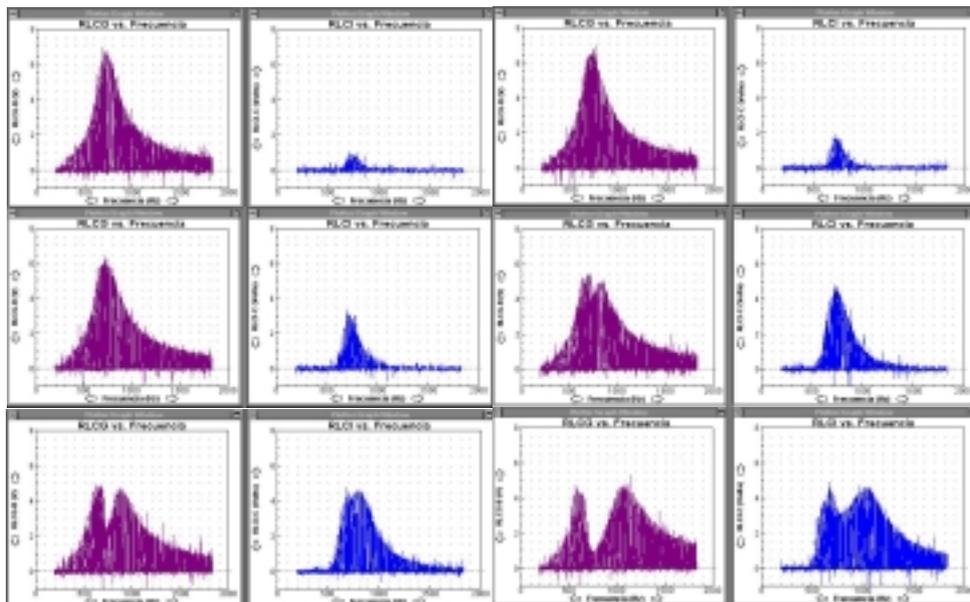
mediante una entrada auxiliar, ver (figura 3), con ésto y la posibilidad del sistema de tomas de datos (MPLI) de contar con un trigger, pudimos hacer una medición muy completa. Otra ventaja es que la señal triangular es proporcional a la frecuencia, con lo cual también pudimos medirla con el MPLI.



**Figura 3**

*Juego de generadores de frecuencias para el barrido del circuito RLC y referencia en tensión para la frecuencia.*

Con todas estas partes implementadas proseguimos con la medición del comportamiento en frecuencia de las bobinas acopladas. Como primer caso analizamos el comportamiento entre el **circuito A**, el cual era excitado por el generador, y el **circuito C**. Con lo cual pudimos observar lo siguiente, (figura 4).

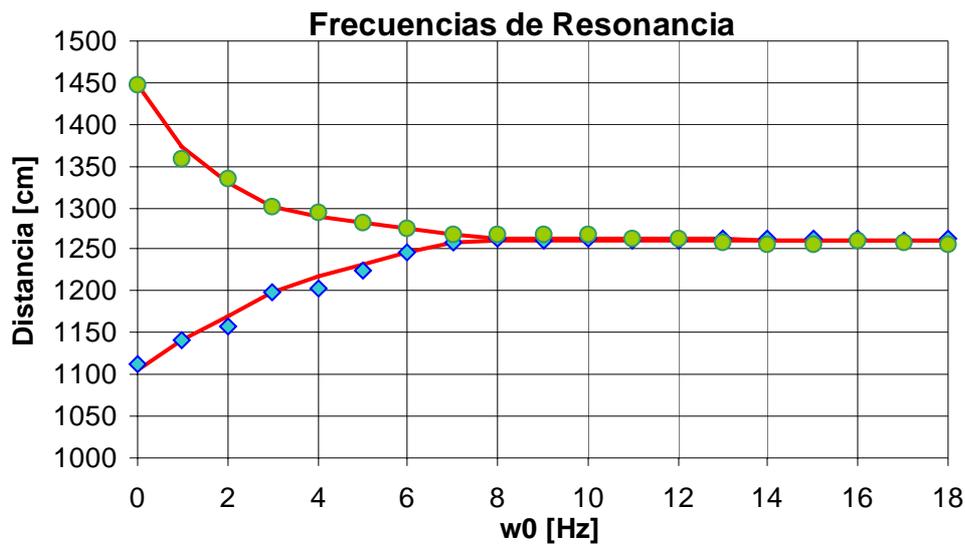


**Figura 4**

*Secuencia de diferentes distancias entre las bobinas, mostrando como influye en la frecuencia de resonancia el acople.*

La secuencia que podemos observar se interpreta viendo de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, en pares de gráficos. Las distancias en cada uno son la siguiente: 16cm, 12cm, 8cm, 4cm, 2cm, 0cm de separación.

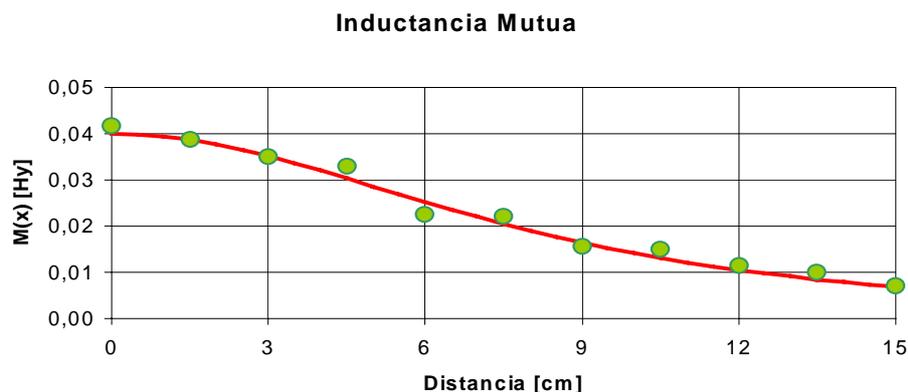
Con lo cual pudimos realizar el gráfico  $\omega_0$  vs. distancia, (figura 5), el cual aproximamos mediante una curva teórica en la cual se tuvo en cuenta la inductancia parásita generada por el acople, para hallarla se hicieron varias suposiciones que se detallan en el apéndice.



**Figura 5**

$\omega_0$  vs. distancia, en la cual también se puede observar la curva teórica.

Para poder comprender este comportamiento se calculó, tanto teóricamente como experimentalmente, la variación de la inductancia de los circuitos RLC en función de la distancia. Debido a las inductancias inducidas entre las bobinas, denominada inductancia mutua, como se puede ver en la (figura 6), para mayor información ver apéndice.



**Figura 6**

$M(x)$  vs. distancia, en la cual también se puede observar la curva teórica.

### Comentario

La resonancia de los circuitos **RLC** serie no es un proceso complicado de medir ya que hay mucha información al respecto, lo cual nos facilitó la primera parte del estudio.

Pero en el análisis del acople surgieron los problemas, ya que el análisis del circuito compuesto fue complicado y tuvimos que adquirir algunos de los conocimientos básicos. Por lo tanto no pudimos completar el análisis con tres bobinas y por ende la generalización del modelo teórico.

Por otra parte, nos gratificó en gran manera poder ir más allá que nuestros predecesores en la obtención de circuitos **RLC** casi idénticos y en la comprobación de todas las piezas del rompecabezas para el acople e interferencia de dos circuitos resonantes. Esperamos que nuestro trabajo sirva de base a futuros emprendimientos en el tema como nos ha servido a nosotros el anterior.

### Conclusión

Con el experimento se demostró y falseó las fórmulas propuestas (1) y (2), la existencia de la frecuencia de resonancia así como el comportamiento circuital y teórico previsto. Gracias a esto se pudo comprobar el acople e interferencia entre las bobinas, lo cual falseó todos los pasos teóricos desarrollados, como se puede observar en las figuras (4), (5), y (6). Por lo tanto podemos decir que el modelo teórico que simula al comportamiento es lo suficientemente robusto.

### Apéndice

Para el cálculo de la inductancia mutua, se llegó a las siguientes ecuaciones:

$$\Rightarrow \text{Ecuación final de la variación de } \omega: \omega_0^2 = \omega_{12}^2 \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\Delta\omega_0^4 + \frac{4 \cdot M_{(x)}^2}{L_1 \cdot L_2}} \quad (3)$$

Las nuevas expresiones se desarrollan a continuación:

$$\Rightarrow \omega_{12} \text{ es: } \omega_{12}^2 = \frac{\omega_{0-1}^2 + \omega_{0-2}^2}{2}, \text{ en donde } \omega_{0-1} \text{ y } \omega_{0-2} \text{ son las } \omega_0 \text{ de cada bobina.} \quad (4)$$

Para recordar  $\omega_{0-n}$  se expresa en la formula (1).

$$\Rightarrow \Delta\omega^4 \text{ es: } \Delta\omega^4 = (\omega_{0-1}^2 - \omega_{0-2}^2)^2 \quad (5)$$

Por ultimo tenemos la formula teórica de la inductancia mutua  $M_{(x)}$ :

$$\Rightarrow M_{(x)} \text{ es: } M_{(x)} = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N_1 \cdot N_2}{2 \cdot (R^2 + X^2)^{3/2}} \quad (6)$$

En donde R es el radio de la bobina,  $N_n$  es el numero de vueltas, y X es la distancia entre las mismas.

Todas estas ecuaciones responden a un planteo teórico del sistema, por lo tanto en el experimento su medición fue un tanto diferente. Se tuvo en cuenta la siguientes ventajas en los aparatos de medición, que en este caso fueron testers. Los cuales miden señales senoidales periódicas, mostrándonos su valor eficaz. La otra consideración fue que la tensión en la bobina es la derivada de la corriente por la inductancia. De estos dos planteos pudimos decir que:

$$\Rightarrow \text{Módulo de la corriente en la bobina: } |I_{(t)}| = A \quad (7)$$

$$\Rightarrow \text{Módulo de la derivada de la corriente en la bobina: } \left| \frac{dI_{L(t)}}{dt} \right| = A \cdot \omega \quad (8)$$

$$\Rightarrow \text{tensión en la bobina: } |V_{L(t)}| = (L \pm M_{(x)}) \cdot \frac{dI_{(t)}}{dt} \quad (9)$$

Por último sólo se tiene que hacer un pequeño barrido de frecuencia para cada distancia, y realizando un gráfico de  $V_{L(t)}$  vs.  $dI_{(t)}/dt \cdot \omega$ , al aplicarle una línea de tendencia nos dará la variación de la inductancia en función de la distancia. Luego juntando éstas en un gráfico de  $M_{(x)}$  vs. Distancia, podremos ver experimentalmente como varía la misma si se acercan o se alejan las bobinas.

### Bibliografía

- ⇒ Física Re-Creativa. S. Gil y E. Rodríguez, Prentice hall. 2001 Bs. As.