Respuesta Temporal de Circuitos RLC Serie

Nocetti, Matías, matiasnocetti@hotmail.com
Blenkmann, Alejandro, alejandroblenkmann@hotmail.com

Laboratorio de Física II – Universidad Favaloro 2002

Resumen

En este informe se analizaran los distintos tipos de respuesta de los circuitos RLC serie. Se llego a la conclusión que estos tipos de circuitos se pueden describir con una ecuación diferencial de segundo orden. Las respuestas de estos circuitos varían según sus componentes R, L y C. Se obtuvieron los valores de L y C experimentalmente, se realizaron diagramas de Bode para mostrar el desfasaje entre tensión y corriente en la bobina y en el capacitor.

Introducción

En este trabajo de investigación haremos un análisis detallado de la respuesta en tiempo de los circuitos **RLC** en **serie**. La motivación principal de nuestro experimento fue analizar la respuesta temporal de estos circuitos, dado que las mismas son aplicables a muchos sistemas físicos.

El objetivo principal de nuestro experimento es encontrar las leyes que determinen la respuesta de estos sistemas. Para esto haremos un desarrollo teórico del circuito e intentaremos demostrar que los datos experimentales coinciden con este desarrollo.

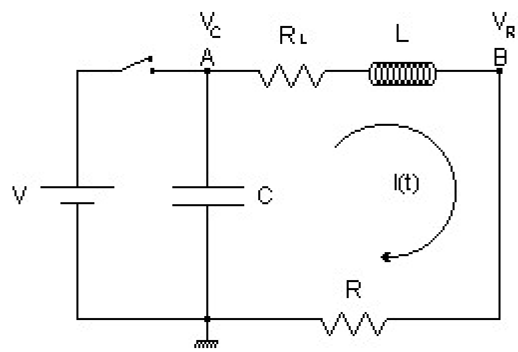


Figura 1. Representación gráfica del circuito RLC. R_L es la resistencia interna del inductor.

Desarrollo Teórico

Para el circuito de la figura 1 se analizo la respuesta de la tensión en el capacitor, teniendo como condición inicial, que el interruptor A se mantuvo cerrado por un largo tiempo previo a t=0, cuando se abre y se deja evolucionar al sistema. Utilizando las leyes de Kirchoff, que relaciona las tensiones con las corrientes del circuito, se llega a una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{V}{LC} = \frac{d^2}{dt^2} V_c + \frac{R_T}{L} \cdot \frac{d}{dt} V_C + \frac{V_C}{LC} \quad \textbf{(1)}$$

donde R_T=R+R_L.

Si definimos la frecuencia de resonancia ω_o = $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, α = $\frac{R}{2L}$, la frecuencia natural ω_a = $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ y γ = $\frac{\alpha}{\omega_0}$. Las condiciones iniciales del circuito son V_C = V e i(0)=V/R_T . Podemos entonces establecer tres soluciones distintas para el sistema, dependiendo del valor de γ.

Si **γ > 1** la respuesta es ***Sobreamortiguada***, de la forma:

$$V_C(t) = a_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + a_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad \textbf{(2)}$$

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \qquad a_1 = V - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\frac{V}{RC} - V\lambda_1 \right)$$

$$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \qquad a_2 = V - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\frac{V}{RC} - V\lambda_1 \right)$$

Si **γ < 1** la respuesta es ***Subamortiguada***, de la forma:

$$V_C(t) = b_1 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot Cos(\omega_a \cdot t) + b_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot Sin(\omega_a \cdot t) \quad \textbf{(3)}$$

$$b_1 = V$$

$$b_2 = \frac{\frac{V}{RC} + \alpha \cdot V}{\omega_a}$$

Si **γ = 1** la respuesta es ***Críticamente amortiguada***, de la forma:

$$V_C(t) = d_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t} + d_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \quad \textbf{(4)}$$

$$d_1 = \frac{V}{RC} + \alpha \cdot V$$

$$b_2 = V$$

Método Experimental

El circuito analizado (*ver figura 1*) constaba de una llave, la cual se mantenía cerrada hasta un tiempo t=0, en el que se abría y a partir del cual se tomaban las datos. Se realizaron las mediciones de tensión con un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora (MPLI de Vernier). Estas fueron sobre los puntos **A** y **B** con respecto a tierra, definidos como **V**c y $\mathbf{V_R}$ respectivamente. Los valores de **R** y $\mathbf{R_L}$ fueron medidos con un multímetro. Los valores $\mathbf{V_L}$ e **I** fueron obtenidos indirectamente de la siguiente forma:

$$V_L = V_C - V_R \cdot \frac{R_T}{R}$$

$$I = \frac{V_R}{R}$$

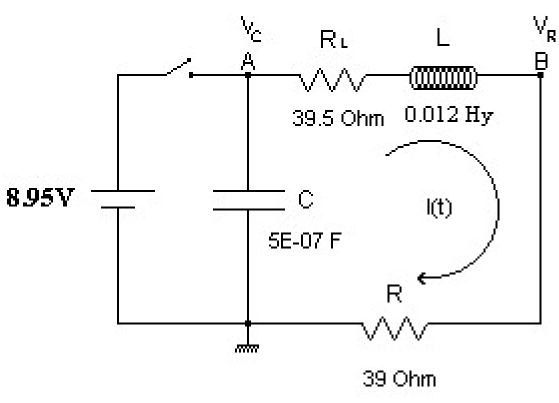
Las mediciones de **L** y **C** se hicieron de forma experimental. Calculamos **L** como la pendiente entre $\mathbf{V_L}$ y $\frac{dI}{dt}$**,** y **C** como la pendiente entre **I** y $\frac{dV_C}{dt}$, siguiendo el procedimiento descripto en la Ref. 1.

Resultados

Se fueron variando los valores de **R**, **L** y **C** para obtener los distintos tipos de respuestas.
En este informe se han incluido solo dos circuitos a modo de ejemplo. El análisis de los otros circuitos (no incluidos) a sido idéntico al de estos dos.

Respuesta Subamortiguada:

Para el circuito de la figura 2, se puede apreciar la respuesta subamortiguada de la tensión en el capacitor (Vc) y la tensión en la resistencia (Vr) en la figura 3. Vr es directamente proporcional a la corriente. La figura 4 muestra la curva teórica(línea continua) y los valores experimentales (en círculos).



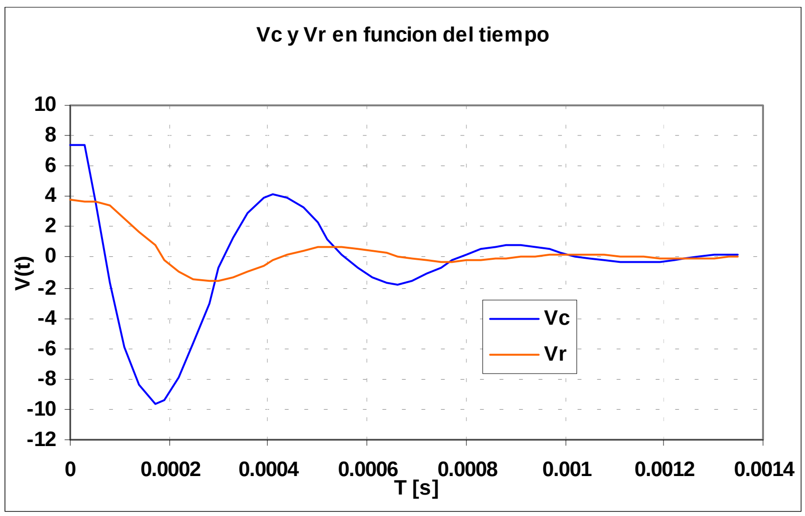


Fig 2. (izq.) Diagrama del circuito

Fig 3.(der.) Valores experimentales Vc y Vr en función del tiempo. Se puede apreciar el desfasaje entre ambas señales.

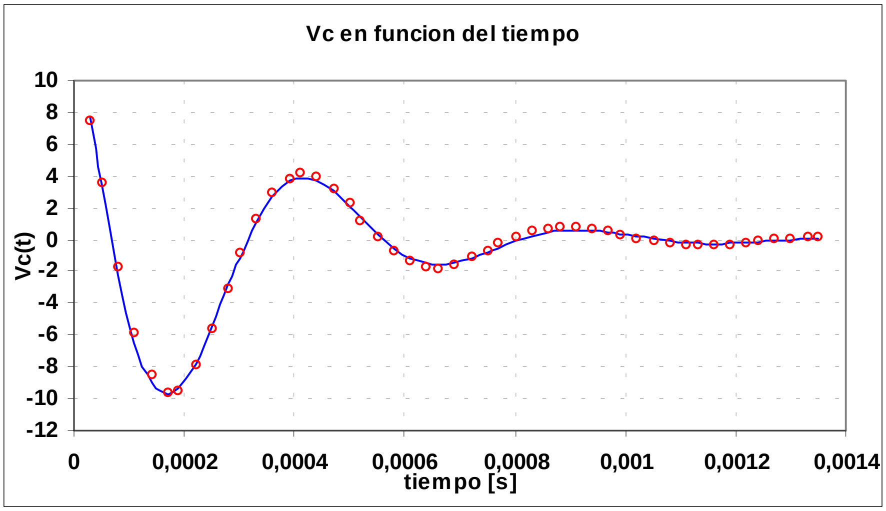


Fig. 4. Tensión en el capacitor en funcion del tiempo (*teórica* - curva continua, *experimental* - círculos)

Respuesta Sobreamortiguada:

Para el circuito de la figura 4, se puede apreciar la respuesta sobreamortiguada de la tensión en el capacitor (Vc) y la tensión en la resistencia (Vr) (figura 5).
La figura 6 muestra en azul la curva teórica y los círculos en rojo los valores experimentales.

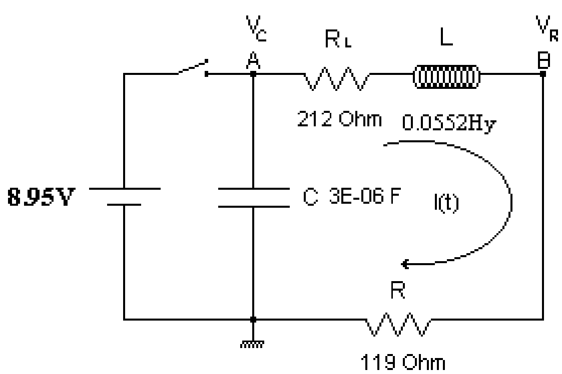


Fig 4.(izq) diagrama del circuito

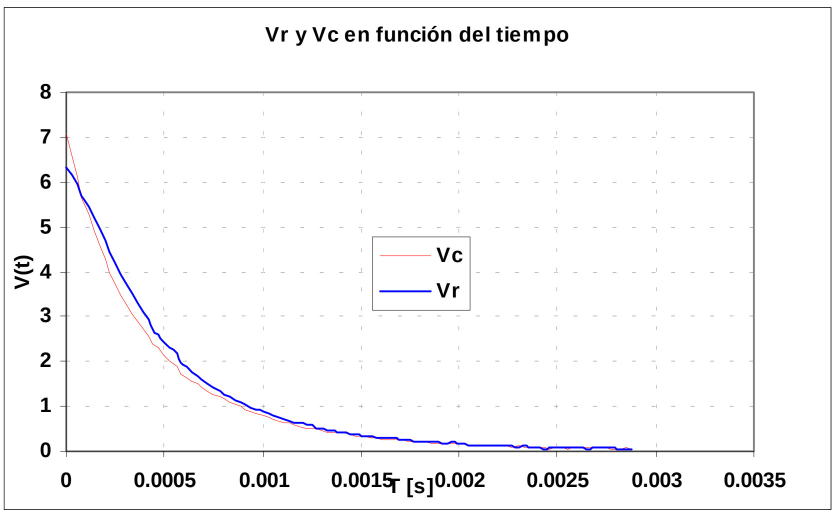


Fig 5.(der.) Valores experimentales de Vc y Vr en función del tiempo

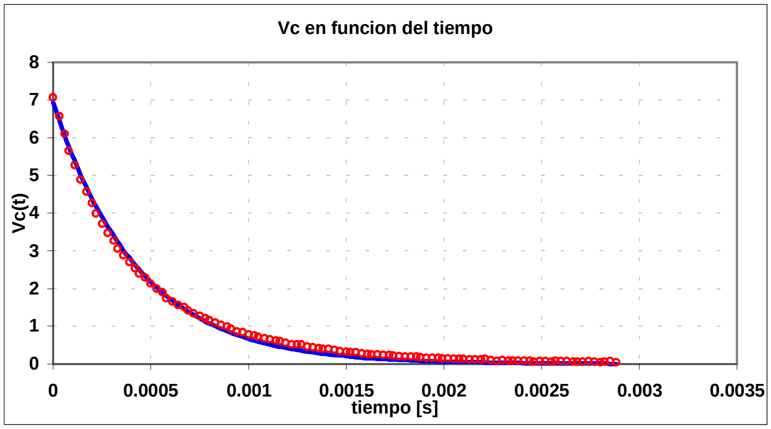


Fig. 6. Tensión en el capacitor en funcion del tiempo (*teórica* - curva continua, *experimental* - círculos)

Discusión

Como se puede apreciar en los gráficos anteriores, el modelo teórico propuesto realizo una buena aproximación a los datos obtenidos experimentalmente.

Los valores **teóricos** de α y ω_a se obtuvieron de realizar los cálculos indicados a continuación de la Ec. (1). Los valores de L y C se obtuvieron experimentalmente de las figuras que se muestran a continuación (Fig. 7 y 8).

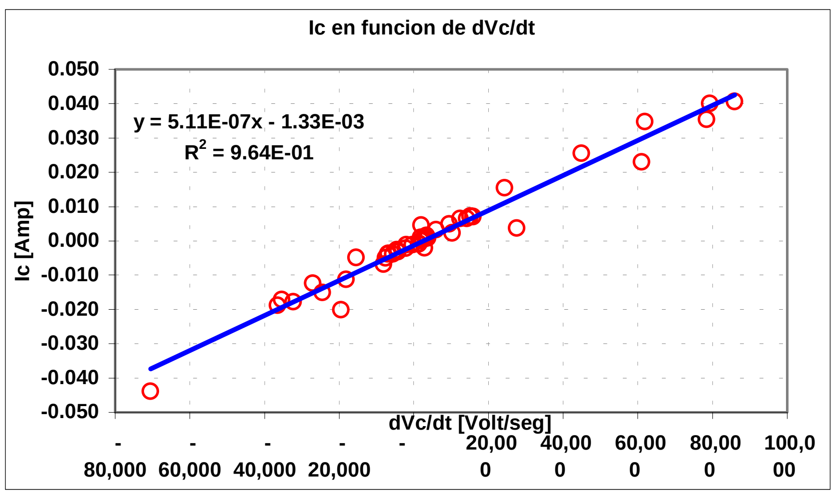


Fig 7. Corriente en función de dVc/dt (medición del valor de C (*pendiente*))
Valor real 0.5µF

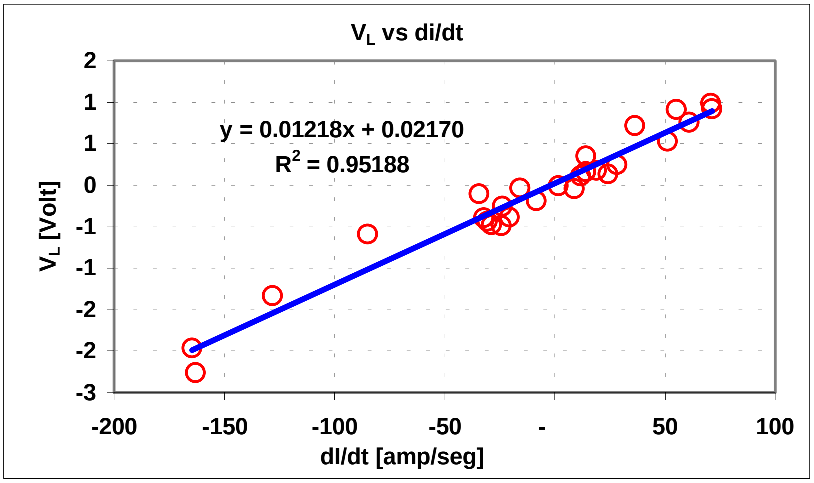


Fig 8. V_L vs Derivada de la corriente (medición del valor de L (*pendiente*))

Se estimaron los valores **experimentales** de α y ω_a hasta reducir al mínimo el error entre la curva de aproximación y los datos experimentales (ver Chi Cuadrado [1]).

La siguiente tabla muestra algunos de los valores experimentales y su relación con los valores teóricos propuestos.

	Figura 2		*Figura 4*	
	ω_a	α	ω_a	α
Teo.	13003.3	3568.18	287.6	2800.3
Exp.	12700 ± 100	3698 ± 11	249 ± 12	2779 ± 35

Tabla 1. Valores experimentales y teóricos

En el circuito de la figura 2 se utilizo una resistencia de 39.5 ± 0.1 Ω ,junto a la resistencia de la bobina 39.0 ± 0.1 Ω. Los valores de capacidad e inductancia se midieron indirectamente como las pendientes entre las curvas de **I** en función de **dVc/dt** (*Fig. 7*) y $\mathbf{V_L}$ en función de **dI/dt** (*Fig. 8)* respectivamente.

Realizamos también dos diagramas de Bode donde se puede apreciar el desfasaje entre la tensión y la corriente en el capacitor (figura 9) y entre la tensión y la corriente en la bobina (figura 10). Se puede ver también como se disminuyen las señales debido a la disipación de energía en forma de calor en las resistencias del circuito.

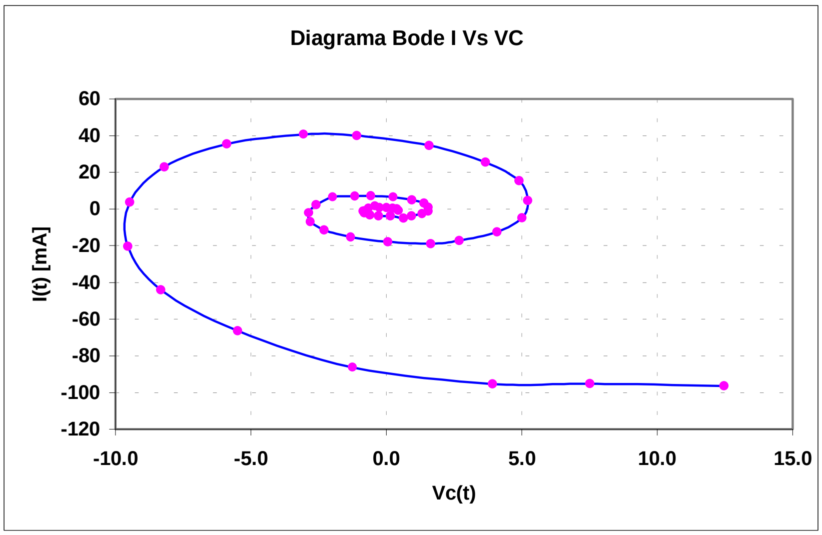


Fig. 9. Diagrama de Bode entre la tensión y la corriente en el capacitor. La linea continua que une los puntos se incluyo para indicar la trayectoria que sigue el sistema

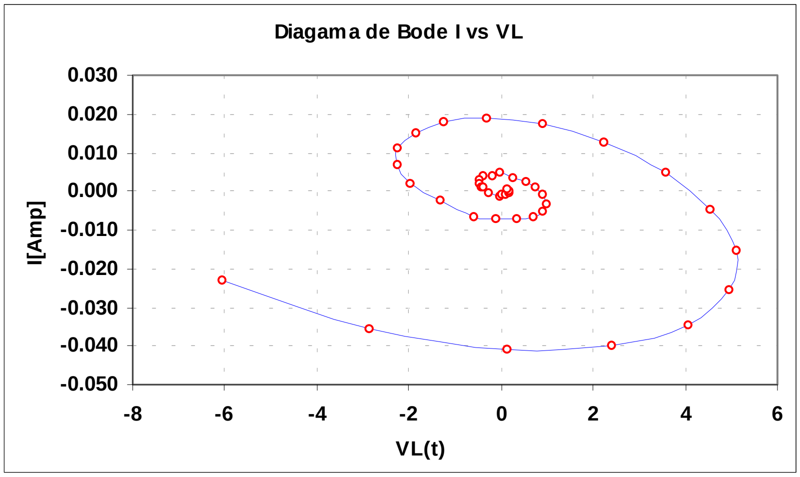


Fig. 10. Diagrama de Bode entre la tensión y corriente en la bobina

En el circuito de la figura 4 se utilizo una resistencia de 119 +-1 Ω ,junto a la resistencia de la bobina 212 +- 1 Ω. Los valores de capacidad e inductancia se midieron con el método mostrado anteriormente

Conclusión

Podemos concluir nuestro trabajo dado que se ha demostrado que los valores obtenidos experimentalmente concuerdan con el modelo teórico propuesto.

Referencia

1 _ Fisica Re-Creativa, Salvador Gil y Eduardo Rodriguez, Prentice Hall, Buenos Aires 2001.