

Oscilación de un dipolo magnético en un campo magnético.

Lorena Cedrina (lovc@infovia.com.ar) y Paula Villar (coco77@sinectis.com.ar)

Laboratorio 5, Departamento de Física - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

En este trabajo se estudiaron las oscilaciones de un dipolo magnético en presencia de un campo magnético originado por un par de bobinas de Helmholtz, de forma teórica y experimental. Su estudio utiliza ideas básicas de la mecánica y del electromagnetismo. Comparamos los resultados obtenidos con los resultados derivados de un simple análisis teórico del problema y comprobamos que son bastante aproximados. En el análisis de resultados, se muestra como ahondando en el modelo experimental físico, los resultados entre la teoría y la práctica son aún más semejantes.

I. Introducción

En este trabajo analizamos las oscilaciones, de un pequeño imán, a lo largo del eje de una bobina circular. La magnitud experimental que observamos es la frecuencia de oscilación.

Comparamos los valores experimentales obtenidos para la frecuencia con los valores teóricos de dos maneras diferentes:

- suponiendo que la bobina puede considerarse infinitamente delgada y el imán
- considerando el espesor de la bobina y la longitud del imán

II. Teoría

Calculamos la frecuencia de oscilación del imán, en primer termino, tratando al imán como un dipolo magnético y a la bobina como infinitamente delgada. Luego calculamos la frecuencia de oscilación considerando que el imán tiene una longitud finita y la bobina tiene una sección transversal no despreciable.

i) Cálculo de la frecuencia en condiciones ideales. Considero una bobina circular de radio R , N vueltas por la que circula una corriente I . El campo magnético en el eje de la bobina está dado por:

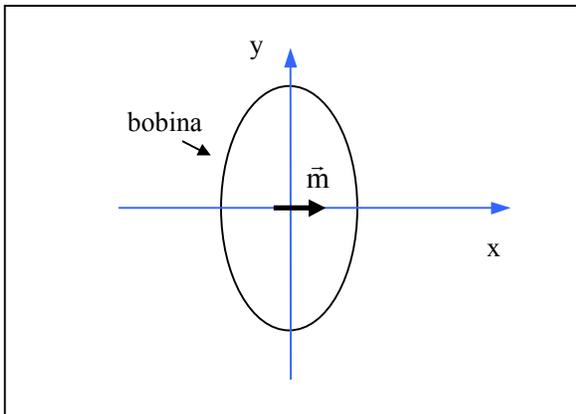


Figura 1: Esquema de la bobina y el dipolo magnético.

$$B(x) = \frac{\mu_0 I N R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Donde x es la distancia desde el centro de la bobina (figura 1). Consideramos el imán como un dipolo magnético de momento \vec{m} . El dipolo se ubica en un punto x el eje de la bobina y paralelo al eje x , su momento magnético está dado por: $\mathbf{m} = m \hat{x}$. El potencial al que está sometido el dipolo debido al campo magnético de la bobina es:

$$U_B(x) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(x) = -\frac{\mu_0 I N R^2 m}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (2)$$

En este experimento el dipolo, además está unido a

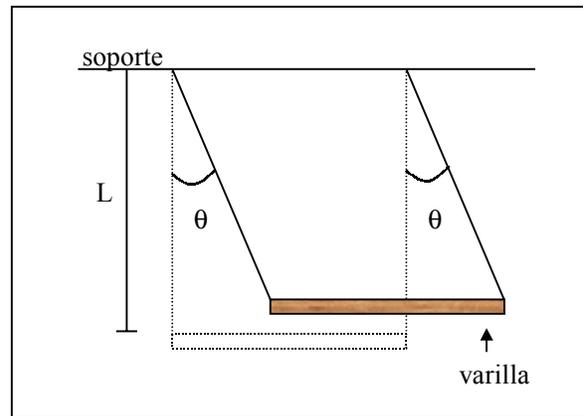


Figura 2: Esquema del péndulo plano.

un péndulo plano como muestra la figura 2. Por estar unido al péndulo plano el imán también está sometido a un potencial:

$$U_g(x) = \frac{Mg}{2L} x^2 \quad (3)$$

donde M es la suma de la masa de la varilla y del imán, g la aceleración de la gravedad y la distancia L se indica en la figura 2.

El potencial total al que está sometido el imán es:

$$U(x) = U_B + U_g = -\frac{\mu_0 I N R^2 m}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{M g}{2L} x^2 \quad (4)$$

Primero analizamos el potencial que produce el campo magnético.

Suponemos que el imán realiza pequeñas oscilaciones, es decir, que las oscilaciones se producen la zona en que $\frac{x}{R} \ll 1$. En estas

condiciones el péndulo oscila apartándose muy poco del eje de la bobina por lo que se desprecia este apartamiento. Desarrollando U_B en serie de potencias de $\frac{x}{R}$ alrededor de $x = 0$:

$$U_B = -\frac{\mu_0 I N m}{2R} + \frac{3\mu_0 I N m}{4R} \frac{x^2}{R^2} - \frac{15\mu_0 I N m}{16R} \frac{x^4}{R^4} + \dots \quad (5)$$

El primer termino es la energía potencial en el origen y no influye en el movimiento. El segundo termino es la energía potencial de un oscilador armónico. El tercer termino, así como los de orden superior, son despreciables comparados con el termino de oscilador armónico cuando $\frac{x}{R} \ll 1$.

Para encontrar la frecuencia de oscilación escribimos el potencial completo al que esta sometido el imán y lo comparamos con el potencial de un oscilador armónico:

$$U(x) = \frac{1}{2} M \omega_i^2 x^2 :$$

$$U(x) = \frac{3\mu_0 I N m}{4R^3} x^2 + \frac{M g}{2L} x^2 = \left(\frac{3\mu_0 I N m}{4R^3} + \frac{M g}{2L} \right) x^2 = \frac{1}{2} M \omega_i^2 x^2 \quad (6)$$

Entonces la frecuencia de oscilación está dada por:

$$\omega_i^2 = \frac{3\mu_0 I N m}{2MR^3} + \frac{g}{L} \quad (7)$$

ii) Modelo

El cálculo teórico presentado anteriormente se puede mejorar considerando los siguientes puntos:

- Para generar un campo magnético suficientemente intenso es necesario usar una bobina con muchas vueltas. Esto aumenta las dimensiones de la bobina y deja de valer la hipótesis de bobina infinitamente delgada usada en el calculo anterior.
- El imán tiene una longitud finita y no puede ser considerado como un simple dipolo magnético de longitud despreciable.

En primer termino calculamos como se modifica el campo magnético de la bobina cuando esta tiene una sección no despreciable.

Calculando el campo magnético a una distancia r del centro de una bobina circular de radio R (figura 3).

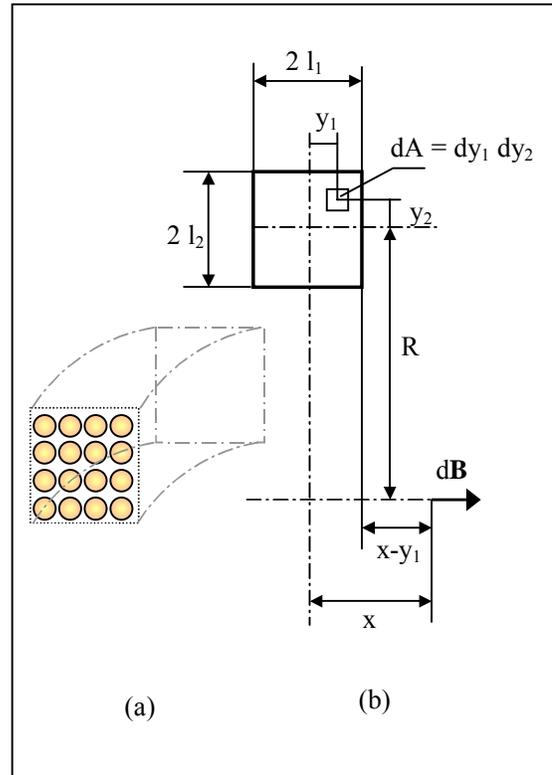


Figura 3: Sección de la bobina, (a) sección de la bobina, (b) esquema de la sección de la bobina.

La bobina tiene N vueltas y por cada una de ellas circula una corriente I .

El campo magnético se calcula por superposición. Considerando las coordenadas y_1 e y_2 , el origen está localizado en el centro de la sección de la bobina y a una distancia R del centro de la bobina. Estas coordenadas parametrizan toda la sección transversal de la bobina que considero ahora formada por pequeños rectángulos de área infinitesimal $dy_1 dy_2$. Cada pequeño rectángulo representa la sección de una espira de radio $R + y_2$ por la que circula una corriente:

$$dI = \frac{dy_1 dy_2 N I}{4 l_1 l_2} \quad (8)$$

El campo magnético generado por esta bobina está dado por:

$$B(x) = \frac{\mu_0 dI N (R + y_2)^2}{2 [R^2 + (x - y_1)^2]^{3/2}} \quad (9)$$

Superponiendo las contribuciones de todas las espiras de sección diferencial se obtiene la siguiente integral:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu_0 IN}{8l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{(R + y_2)^2 dy_1 dy_2}{[R^2 + (x - y_1)^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 IN}{8l_1 l_2} \left((x - l_1) \ln \left(\frac{R + l_2 + \sqrt{(R + l_2)^2 + (x - l_1)^2}}{R - l_2 + \sqrt{(R - l_2)^2 + (x - l_1)^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (x + l_1) \ln \left(\frac{R + l_2 + \sqrt{(R + l_2)^2 + (x + l_1)^2}}{R - l_2 + \sqrt{(R - l_2)^2 + (x + l_1)^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Esta es la expresión que se obtiene para el campo magnético considerando que la bobina tiene una sección no nula.

Otro de los aspectos que hay que considerar es que el imán tiene longitud finita. Como el radio del imán es mucho menor que el radio de la bobina puedo considerar que en la región que ocupa el imán el campo magnético es uniforme y está dado por la ecuación 10. Sin embargo, la longitud del imán no se puede despreciar en la dirección paralela a la magnetización ya que las variaciones del campo a lo largo de la longitud del imán son importantes. Además, la región en que se producen las oscilaciones son del mismo orden que la longitud

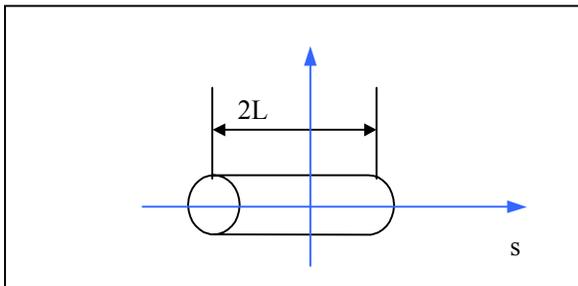


Figura 4: Dimensiones del imán.

del imán.

Calculando el potencial de un dipolo magnético de longitud $2L$ (figura 4) y considerando la coordenada

s que parametriza la longitud del imán, $s = 0$ corresponde al centro del imán. Suponemos que el dipolo de longitud $2L$ está formado por dipolos puntuales de longitud ds , cada uno con un momento magnético dado por:

$$dm = \left(\frac{m}{2L} \right) ds \quad (11)$$

Llamo x_m a la distancia entre el centro de la bobina y el centro del dipolo.

La energía potencial de un dipolo infinitesimal ubicado en s es:

$$U_B(x_m) = -\frac{m}{2L} \int_{-L}^L B(x_m + s) ds \quad (12)$$

Donde B es el campo magnético dado por la ecuación 10. Igual que antes, calculamos el potencial y desarrollamos en serie de potencias para obtener la frecuencia de oscilación:

$$\omega_m^2 = \frac{\mu_0 INm}{8Ll_1 l_2 M} \left[\ln \left(\frac{k_-}{k_+} \right) + A_- - A_+ \right] \quad (13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} R_+ &= R + l_2 \\ R_- &= R - l_2 \\ L_+ &= L + l_1 \\ L_- &= L - l_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$k_+ = \frac{R_+ + \sqrt{R_+^2 + L_+^2}}{R_- + \sqrt{R_-^2 + L_+^2}} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_+ &= L_+^2 R_- \sqrt{R_-^2 + L_+^2} - R_+ \sqrt{R_+^2 + L_+^2} - 4Rl_2 / \\ &\quad / ((R_+ \sqrt{R_+^2 + L_+^2} + R_+^2 + L_+^2) * \\ &\quad * (R_- \sqrt{R_-^2 + L_+^2} + R_-^2 + L_+^2)) \end{aligned} \quad (16)$$

Los valores de k_- y A_- se obtienen realizando la siguiente modificación en las ecuaciones 15 y 16:

$$L_+ \rightarrow L_-$$

En todas las expresiones anteriores aparece el momento magnético (m) del imán que estamos considerando. Para determinar este momento magnético utilizamos un péndulo de torsión y un par de bobinas de Helmholtz. Para construir el

péndulo de torsión se utiliza un hilo con momento de torsión muy bajo de manera que pueda despreciarse frente al momento realizado por el campo magnético de las bobinas de Helmholtz. Este campo magnético se supone uniforme en la región en la que oscila el imán, con intensidad:

$$B = \frac{8}{5^{3/2}} \frac{\mu_0 IN}{R}$$

Para un imán que oscila en campo magnético uniforme, unido a un péndulo de torsión la frecuencia está dada por:

$$\omega^2 = \frac{8}{5^{3/2}} \frac{\mu_0 INm}{RI_M}$$

donde I_M es el momento de inercia del imán. Suponemos que el campo magnético terrestre no modifica esta frecuencia porque la posición de equilibrio, alrededor de la que el imán realiza pequeñas oscilaciones, es perpendicular a la dirección del campo magnético terrestre. De esta manera, al apartarse el imán de la posición de equilibrio se produce una variación en la intensidad y dirección del campo magnético muy pequeña que puede despreciarse.

II. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Con el objetivo de comprobar el modelo teórico presentado en el paper antes mencionado, se incorporó a la práctica un par de bobinas de Helmholtz. Este par tenía 200 vueltas y un radio de 12 cm, distancia que las separaba.

El primer paso a seguir, consistió en medir el momento magnético de los imanes. Para eso se utilizó el dispositivo de la figura 5. Como se puede ver, se colgaron los imanes de un hilo, sin torsión, que pasaba por el centro de las bobinas, atravesándolas a lo largo. Cerca de los imanes se colocó una bobina auxiliar de 36 vueltas, la cual estaba conectada a la PC a través del programa MPLI.

Una precaución importante que se tuvo que tener en cuenta, fue ubicar el eje de la bobina de forma perpendicular al campo Magnético terrestre, para minimizar así los efectos de este último.

(Figura 5, archivo adjunto con el nombre FOTO 5)

Con esta configuración, se hacía circular corriente por el par de bobinas. Esto originaba un campo magnético homogéneo en el centro de las bobinas, justo donde estaban ubicados los imanes. Al haber un campo magnético distinto de cero, los imanes comenzaban a oscilar. Este movimiento inducía una corriente en la bobina auxiliar, la cual se podía leer en la computadora con el MPLI.

Se realizaron varias mediciones para distintas corrientes. Con estos datos (obtenidos de las mediciones), se hizo un ajuste lineal sabiendo que la pendiente que ajustaba dichos datos era $m \cdot B/I$, donde m es el momento magnético, B es el campo generado por el par de bobinas y I es el momento de inercia de los imanes. Con la fórmula del campo B producido por un par de bobinas de Helmholtz, se pudo conocer el valor del momento magnético de los imanes.

Los imanes que se utilizaron eran 4 imanes de 4mm de espesor y 12mm de diámetro. Para poder hacer mas mediciones y estudiar la validez del modelo teórico, se colocaron arandelas entre los imanes para variar su longitud y momento magnético.

Una vez conocido el momento magnético, se dedicó el tiempo para medir la frecuencia de oscilación de los imanes en un campo magnético. Para ello se utilizó una madera de 36.72 gramos, suficientemente larga para que las oscilaciones sean en un plano. Esta madera tiene el fin de sostener a los imanes. Está centrada en el eje de una de las Bobinas del par de Helmholtz.

La idea era que los imanes estuvieran suspendidos en el aire, pero ante la falta de elementos prácticos, se incorporó la madera y se consideró el movimiento del sistema madera+imanes.

(figura 6, archivo adjunto con el nombre FOTO 4)

Entonces para poder medir la frecuencia de oscilación del dipolo, se utilizó la bobina auxiliar para medir la corriente inducida con el MPLI. Pero este método presentaba mucho ruido y no nos daba resultados de confianza.

Por lo tanto, se optó por usar la configuración de la figura 6. Como se ve, se colocó un pequeño papel de modo que interfiriera un haz de láser, cuya intensidad era medida con un diodo láser. Se realizó una medición para cada corriente (desde 0 a 1 A), y en cada medición se midió, con la ayuda de un osciloscopio, el período de una oscilación. De esta forma se conoció el valor de la frecuencia de oscilación del sistema.

Para verificar estos valores, se utilizó un diodo láser que se podía conectar a la PC (trabajaba con el programa MPLI). De esta forma, nos aseguramos de obtener mayor precisión en nuestras mediciones. El procedimiento con la PC fue similar al del osciloscopio, también se midieron los períodos de oscilación para distintas corrientes. Para poder hacer mas predicciones sobre el modelo, se hicieron estas mediciones con los distintos momentos magnéticos que ya habían sido medidos y calculados en las clases anteriores.

Finalmente, para poder conocer cuán importante era el rozamiento con el aire, se utilizó la configuración de la figura 6. Se perturbó al sistema y se lo dejó oscilar por el tiempo de 10 minutos en ausencia de campo magnético.

III.RESULTADOS

Los momentos magnéticos medidos fueron:

Longitud del dipolo magnético (mm)	Momento magnético (Am^2)
16	1.35 ± 0.01
20.3	1.62 ± 0.01
23.3	1.63 ± 0.02
26.8	1.58 ± 0.03

Tabla I: momentos magnéticos medidos para los distintos dipolos magnéticos utilizados en las distintas mediciones.

En la figura 7,8,9,10 se presentan los gráficos de la frecuencia experimental elevada al cuadrado en función de la corriente, para cada una de las longitudes de los imanes. En ellos se incluyen las curvas teóricas que corresponden a la frecuencia ideal (ecuación 7) y a la frecuencia dada por el modelo (ecuación 13).

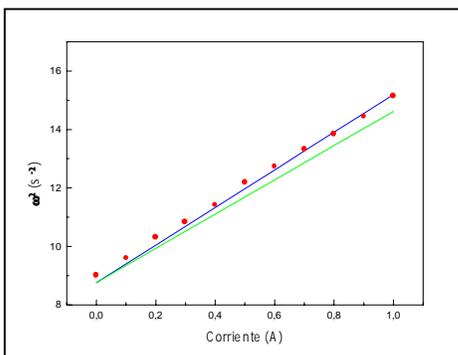


Figura (7): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 16mm.

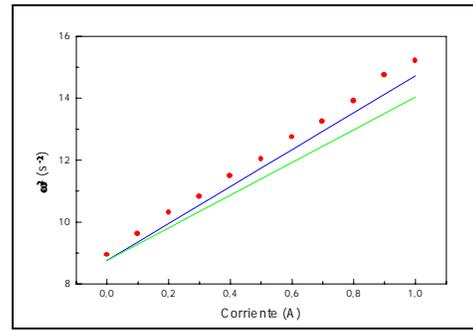


Figura (8): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 20.3mm.

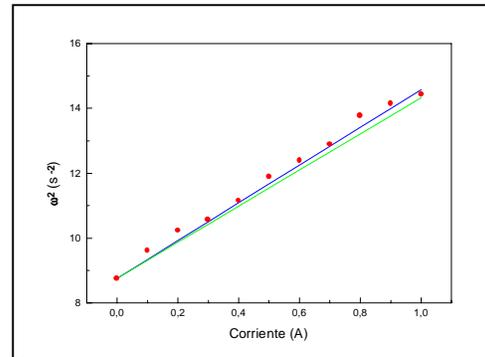


Figura (9): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 23.3mm.

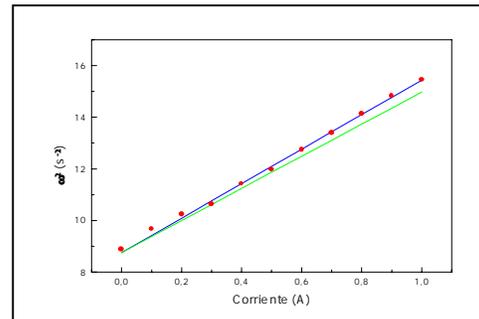


Figura (10): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 26.8mm.

IV. ANALISIS DE DATOS

Observando las figuras 7,8,9 y 10, podemos concluir que los valores obtenidos en las mediciones no se aproximan a los valores que esperábamos según el modelo teórico.

Para determinar la fuente de error, revisamos las aproximaciones realizadas en el modelo teórico. En la teoría se considera al radio del imán despreciable frente al radio de la bobina. Sin embargo, en nuestro dispositivo, este radio es el 5 % del radio de la bobina. Por lo tanto, en nuestro experimento, no podemos suponer que el campo magnético producido por el par de bobinas de Helmholtz en

toda la sección del imán tiene la misma intensidad que en todo el eje de la bobina.
Sabiendo que la intensidad del campo magnético en la sección transversal a la bobina varía de la forma que muestra la figura 11, podemos estimar el valor del campo en la sección del imán.



Figura 11: variación de la intensidad del campo

En nuestro experimento, el radio del imán es del 5% del radio de la bobina, por lo tanto estamos en la región sombreada de la figura 8. Esto nos permite estimar el valor del campo en 0,9 del valor del campo en el eje. Con esta corrección, calculamos nuevamente los valores teóricos y los valores de los momentos magnéticos. Los nuevos resultados se muestran en la figura 12,13,14 y 15 y los nuevos momentos magnéticos en la tabla II.

Longitud del dipolo magnético (mm)	Momento magnético (Am^2)
16	1.51 ± 0.01
20.3	1.80 ± 0.01
23.3	1.82 ± 0.02
26.8	1.76 ± 0.03

Tabla II: datos de los nuevos momentos magnéticos

Ahora se puede ver que los resultados medidos se aproximan a los valores teóricos dados por el modelo.

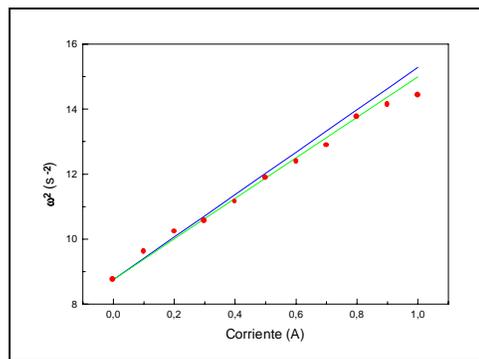


Figura (12): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 16mm.

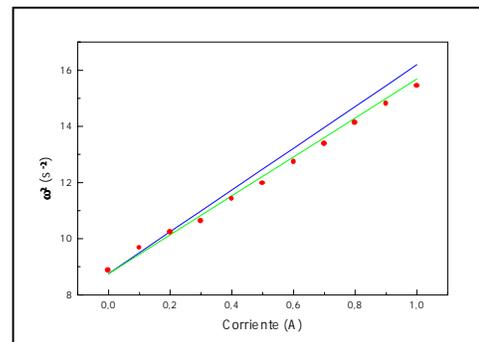


Figura (13): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 20.3mm.

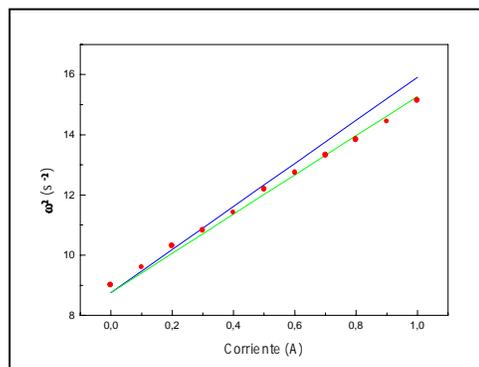


Figura (14): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 23.3mm.

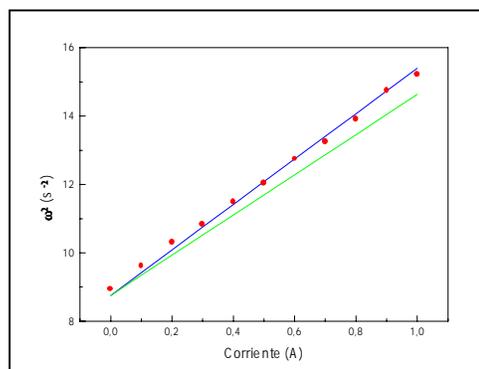


Figura (15): Gráfico de la frecuencia al cuadrado en función de la corriente. Longitud el imán 26.8mm.

V. CONCLUSIONES

En este experimento se analiza un modelo simple que se describe el fenómeno observado. En este modelo se considera la manera en que se modifica la frecuencia de oscilación del imán cuando se considera la longitud del imán y la sección de la bobina.

En los gráficos se puede observar que para el imán de 16mm los valores experimentales de la frecuencia no se aproximan a los dados por el modelo. Esto se debe a que la longitud de este imán es comparable con el espesor de la bobina y con la amplitud de las oscilaciones por lo que el imán no puede ser considerado como un dipolo frente a la bobina.

Para los imanes de 20.3mm y 23.3mm de longitud podemos ver que los valores experimentales se aproximan a los dados por el modelo. Estos imanes tienen longitud mayor que la amplitud de las oscilaciones.

Con respecto al imán de 26.8mm el valor obtenido para el momento magnético no es, como se esperaba, mayor que para los imanes de longitud menor. Otro punto importante, es resaltar el hecho que encontramos serios problemas al experimentar con el dipolo de 26.8mm. Si se observa la tabla II, se puede ver que su momento magnético nos dio menor que los valores de los otros dipolos a pesar que éste era más largo. Lo extraño es que para su cálculo se utilizó el mismo procedimiento que para calcular los otros momentos magnéticos. Por lo tanto, lo que se puede concluir es que, probablemente, este dipolo (que consistía en 4 imanes y 12 arandelas) era muy pesado para el hilo y como consecuencia, el movimiento que realizaba no era únicamente en una dirección. Debe haber habido alguna superposición de movimientos que no fuimos capaces de detectar.

Por lo tanto, al tener mal calculado su momento magnético, claramente la frecuencia de oscilación también estará errada, que es justamente lo que se observa en la figura 15 (un mayor apartamiento entre los valores experimentales y los teóricos).

En todos los casos mencionados anteriormente, es decir, para todas las longitudes de los imanes el modelo se ajusta mejor a los valores experimentales para las corrientes altas, entre 0.5A y 1A. Esto se debe a que las corrientes más altas generan fuerzas de restitución mayores y, en estas condiciones, son menos importantes los efectos de rozamiento en el péndulo.

En el modelo no se considera la sección del imán ya que se supone que es lo suficiente pequeña como para considerar que el campo magnético en toda la sección del imán es el campo en el eje de la

bobina. Para las dimensiones del imán que usamos esto no se cumple por lo que consideramos que el campo tiene un valor menor pero uniforme en toda la sección del imán.

Los resultados de este experimento se pueden mejorar midiendo de manera más precisa el momento magnético de los imanes. Además se pueden utilizar corrientes mayores para medir las frecuencias del péndulo plano.

El sistema, bobina y péndulo plano, puede ser usado para determinar el momento magnético de un imán de longitud mayor que 20mm, para utilizar el método del péndulo de torsión para longitudes grandes es necesario bobinas de Helmholtz de radio mucho mayor que el utilizado en este trabajo.

Referencias

- ♠ Juan Bisquert, Emilia Hurtado, Salvador Mafé. *Oscillations of a dipole in a magnetic field: An experiment.* Am.J.Physics, Vol 58 (9), September 1990, 838-843.
- ♣ Eugene Levin. *Magnetic dipole moment measurement.* Am.J.Physics, Vol 52 (3), March 1984, 248-250.
- ♥ H. G. Gnanatilaka, P. C. B. Fernando. *An investigation of the magnetic field in the plane of a circular current loop.* Am.J.Physics, Vol 55 (4), April 1987, 341-344.
- ♦ José A. Manzanares, Juan Bisquert, Germá García-Belmonte, Mercedes Fernández-Alonzo. *An experiment on magnetic induction pulses.* Am.J.Physics, Vol 62 (8), August 1994, 702-706.