

# Paradójico movimiento de un anillo rotante

Movimiento de cuerpos rígidos tipo peonzas simétricas suspendidas de un motor, en función de la frecuencias de giro.

Marcela Mansilla ([celabbari@yahoo.com](mailto:celabbari@yahoo.com))

Alejandro Solernó ([fino@cano.com.ar](mailto:fino@cano.com.ar))

Javier Tiffenberg ([vierja@fibertel.com.ar](mailto:vierja@fibertel.com.ar))

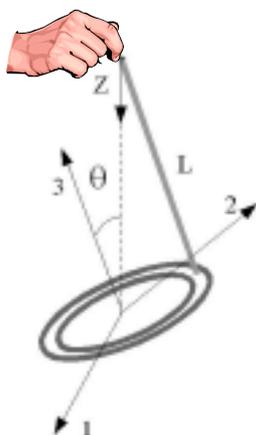
Laboratorio 5 –UBA – Verano 2003

## Resumen

En el siguiente trabajo se estudió el movimiento de un anillo y un cilindro pendientes de un cable de masa despreciable, analizando su comportamiento al girarlo alrededor del eje principal de inercia con menor momento, para variadas frecuencias. Se observa un cambio en el régimen de giro a partir de una determinada frecuencia de corte,  $\omega_c$ , con el desplazamiento asintótico de la velocidad de rotación del eje inicial al eje principal de inercia con mayor momento, para frecuencias altas. Se propone un modelo mecánico clásico con un Hamiltoniano y se compara con los resultados obtenidos. Luego se discuten las diferencias a bajas frecuencias, y se propone una modificación basada en pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio.

## 1. Introducción

Una experiencia que uno puede realizar muy fácilmente consiste en atar un hilo a un anillo y hacer girar el hilo con los dedos, con velocidad creciente. A partir de una determinada frecuencia crítica el anillo comienza en forma repentina a levantar su centro de masa (como si efectuara un salto).

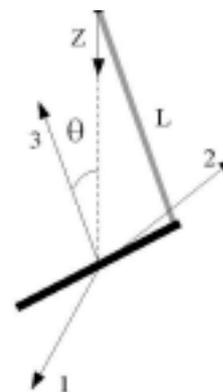


*Fig 1. Anillo pendiente de un hilo*

Este fenómeno se puede estudiar en detalle en forma muy simple (ver sección 2) y se puede proponer un modelo clásico que describa su comportamiento.

Para este trabajo nos concentramos en los modelos propuestos para cuerpos rígidos simétricos, sobre la relación entre la frecuencia de rotación y el ángulo de inclinación. Los cuerpos estudiados tienen la

geometría y distribución de masa de una peonza simétrica.



*Fig 2. Cilindro hueco pendiente de hilo*

El comportamiento presenta una variación singular a partir de una frecuencia dada,  $\omega_c$ , a partir de la cual cambia el punto de equilibrio estable. El nuevo punto de equilibrio es en principio anti-intuitivo, ya que implica una traslación del centro de masa hacia arriba. Este punto, sin embargo, representa un mínimo de potencial, pero el potencial gravitatorio es efectivamente mayor. Vemos que el mínimo encontrado es en realidad un mínimo de un potencial efectivo surgido del estudio del Hamiltoniano del sistema, donde está involucrado el vínculo con el motor.

## 1.1 Modelo Clásico

Esta simetría, y asumir que el movimiento del centro de masa se produce sólo sobre el eje z, permite expresar el hamiltoniano del sistema en forma relativamente sencilla (ver Apéndice A.1.) y obtener una expresión para la relación entre la frecuencia y el ángulo de inclinación.

### 1.1.1 Anillo:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2 \left[ I + M \cdot r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left( 1 + \frac{r_{ext} \cdot \text{sen} \theta}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta}} \right)^2 \right]} - \frac{I \cdot \omega^2}{2} \cdot (1 + \cos^2 \theta) - M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta} + r_{ext} \cdot \text{sen} \theta \right)$$

### 1.1.2 Barra

$$H = \frac{p_\theta^2}{2 \left[ I_{12} + M \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left( 1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{\text{sen} \theta}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta}} \right)^2 \right]} - \frac{1}{2} \cdot (I_{12} \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}^2 \theta + I_{33} \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \theta) + M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta} + \frac{h}{2} \cdot \text{sen} \theta \right)$$

### 1.1.3 Análisis Potencial Efectivo

Al realizar el estudio del Hamiltoniano, podemos separar la dependencia explícita en el ángulo y llamar a estos términos "potencial efectivo". Si derivamos el potencial efectivo de cada uno vemos que

$\frac{\pi}{2}$  es punto de equilibrio estable para frecuencias bajas.

Podemos ver que a medida que aumentamos la frecuencia, sin embargo, el punto de equilibrio pasa de ser estable a inestable. Esto sucede cuando se cruza una frecuencia  $\omega_c$ , donde la derivada segunda del potencial cambia de signo.

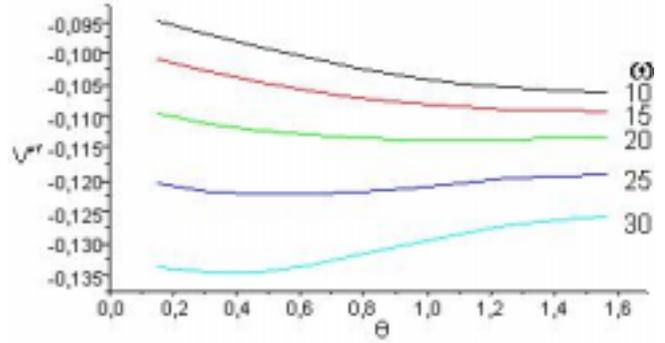


Fig. 3: Potenciales efectivos para diferentes frecuencias.

Si hacemos  $\frac{dV_{efvo}}{d\theta} = 0$  podemos obtener una

expresión para  $\omega$  en función de  $\theta$  de equilibrio, que no depende de la masa del cuerpo (se cancela con la masa en los momentos de inercia bajo la aproximación utilizada):

$$\omega = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot r_{ext}}{I} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \theta_{eq}} + \frac{r_{ext}}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta_{eq}}} \right)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{M \cdot g}{(I_{12} - I_{33})} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \theta_{eq}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta_{eq}}} \right)}$$

También podemos obtener una expresión para  $\omega_c$ , que es la misma en ambos casos, al adimensionalizar las ecuaciones con una longitud característica del sistema. Se define un parámetro adimensional  $\lambda$  como el cociente entre el largo del cable L y la semi-longitud del elemento estudiado ( $r_{ext}$  para el anillo y  $h/2$  para la barra). De esta forma, se puede linealizar las ecuaciones del sistema, donde  $\omega_c$  es parte de la pendiente. Asimismo, en la pendiente se encuentra comprendida la geometría del sistema (ver Apéndice A.2. para los detalles del desarrollo):

$$\omega^2 = \frac{\omega_c^2}{\left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right)} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \theta_{eq}} + \frac{\lambda}{\sqrt{L^2 - \lambda^2 \cdot \cos^2 \theta_{eq}}} \right)$$

## 2. Procedimiento Experimental

### 2.1. Materiales

- Motor de frecuencia variable
- Anillo:
  - $r_{\text{ext}}: 0.0412 \pm 0.0001$  m
  - $r_{\text{int}}: 0.0318 \pm 0.0001$  m
- Cilindro hueco
  - $r_{\text{ext}}: 0.0048 \pm 0.0001$  m
  - $r_{\text{int}}: 0.0032 \pm 0.0001$  m
- Cámara digital de fotos
- Osciloscopio
- Cable
  - $L_b: 0.291 \pm 0.001$  m
  - $L_a: 0.096 \pm 0.001$  m

### 2.2. Desarrollo

Se utiliza un motor conectado a un potenciómetro para poder variar la frecuencia de giro. La calibración del motor en frecuencia es realizada midiendo el giro del motor con un fotointerruptor conectado a un osciloscopio.

El sostén del motor debe ser rígido para prevenir vibraciones.

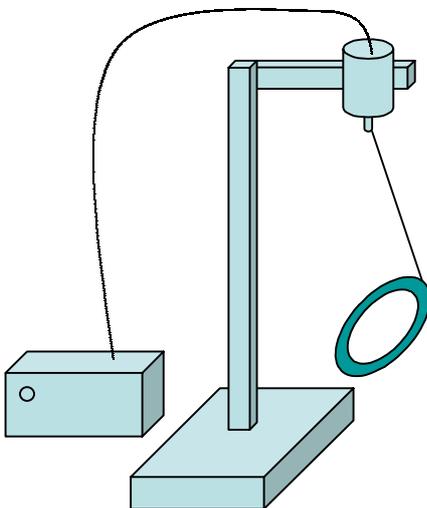


Fig. 4: Esquema de dispositivo experimental

Luego de la calibración se conecta un cable al eje del motor, bien centrado con el mismo. La unión debe ser rígida para que el cable gire solidario al eje del motor.

El cable debe ser de masa despreciable frente a la del anillo y el cilindro, y además debe tener poca torsión, pero ser flexible longitudinalmente.

Se utiliza un cable de los usados comúnmente en electrónica, sin una preferencia en particular.

En la otra punta del cable se coloca sólo el anillo, y luego un cilindro hueco. La unión debe ser tal que permita el movimiento del cuerpo rígido, pero que además pueda generar un torque sobre el mismo.

Se hace girar el motor. La frecuencia de giro es medida nuevamente con el fotointerruptor conectado a un osciloscopio.

Se procede a tomar fotografías del cuerpo a diferentes frecuencias (varias para cada una, para tener una estadística confiable) para medir el ángulo de inclinación. Las mismas son tomadas con poco tiempo de exposición (high speed shutter) para obtener la mejor nitidez a altas velocidades de giro. Las fotografías son tomadas siempre a la misma distancia y en una posición perpendicular a la vertical. Se utiliza una fotografía del cuerpo en reposo para obtener la escala. Con cualquier editor de fotografías se puede entonces calcular el ángulo de inclinación de la siguiente manera:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\text{Altura girando}}{\text{Altura en reposo}}\right)$$

El error en este método es menor al 1% (un error de  $\pm 1$  píxel en medidas mayores de 100 píxeles). El error estadístico es más grande.

Luego de cada cambio en frecuencia se espera que el cuerpo se estabilice, para minimizar los efectos del traslado del torque del cable al cuerpo y los de la torsión del cable.

### 2.3. Datos obtenidos

A continuación se grafican los datos obtenidos para ambos casos. El ángulo es  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_{eq}$ , donde  $\theta_{eq}$  es el ángulo de Euler correspondiente.

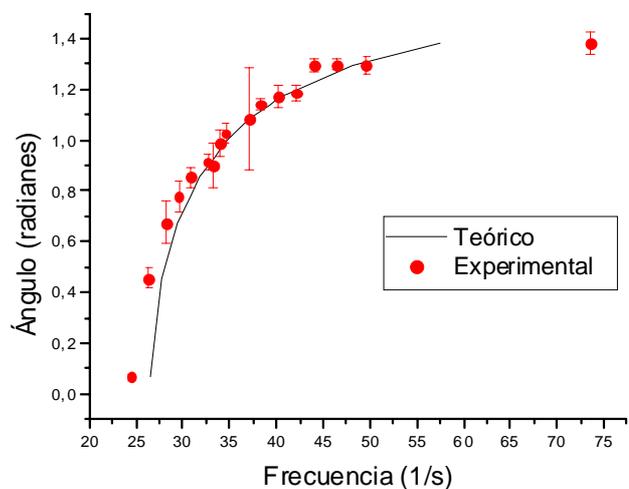


Fig. 5: Ángulo vs. Frecuencia para anillo. La línea negra representa el modelo teórico

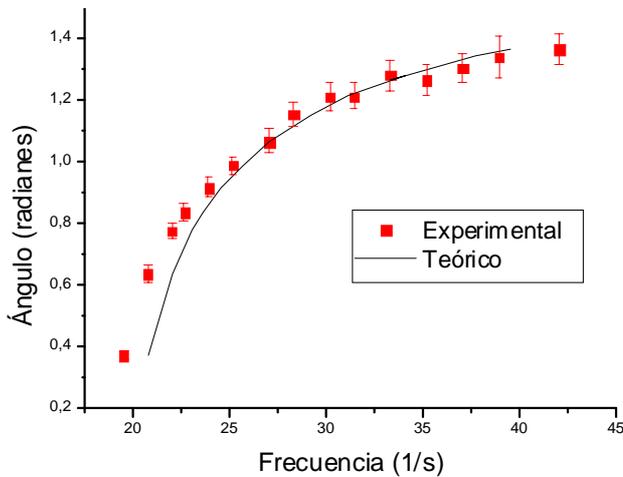


Fig. 6: Ángulo vs. Frecuencia para cilindro. La línea negra representa el modelo teórico

### 3. Análisis y discusión

El modelo desarrollado tiene una muy buena correlación con los datos obtenidos de mediciones. Sin embargo, para bajas frecuencias, la curva experimental se empieza a apartar de la teórica.

En estas frecuencias ambos cuerpos son mucho más sensibles a perturbaciones externas.

La diferencia entre los errores estadísticos y los de medición sugieren que se realice una mayor cantidad de mediciones para mejorar la estadística, dado que el error de medición es muy chico (menor al 1%).

Es necesaria una aclaración sobre los datos para frecuencias menores a la frecuencia de corte. Si bien no aparecen mediciones efectuadas en ese rango, esto se debe a que comenzamos las mediciones en el momento en que observamos una inclinación con respecto a la vertical. Es decir, que hasta la primera medición el cuerpo mantiene un perfil vertical, girando en el mismo eje que el del cable del cual pende. La determinación de esta frecuencia no es exacta, dado que nos interesaba poder obtener la curva, y de allí la frecuencia de corte. Determinar la frecuencia precisa es más complicado por el tiempo que tarda el cuerpo en estabilizarse, al propagarse el giro por el cable, además de los elementos de torsión del cable.

Contrario a lo que parece indicarse al comienzo de este informe, en la introducción, el cuerpo no efectúa un salto de un punto de equilibrio a otro, sino que la transición es continua. Esto se debe a que con la experiencia propuesta con los dedos, uno no posee un control fino de la frecuencia, y pasa de una por debajo del umbral  $\omega_c$  a otra ya muy por encima, entonces el cuerpo da la impresión de saltar de un equilibrio a otro.

Es interesante observar como en un caso (el anillo) el cuerpo pasa de girar en un eje degenerado al eje distinto, y en el otro (la barra) la situación se revierte. Sin embargo, en ambos casos se pasa de una velocidad angular exclusiva en el eje con el menor momento de inercia, a una velocidad mayormente alrededor del eje con mayor momento de inercia.

### 4. Conclusiones

Para un estudio aún más detallado de este movimiento es necesario encontrar una modificación al modelo que permita explicar la divergencia para bajas frecuencias. Esto se podría lograr efectuando un análisis de pequeñas oscilaciones del ángulo de equilibrio a frecuencias altas que nos provea una banda alrededor del potencial, que contenga a los puntos observados.

Otro elemento necesario es la observación más fina del fenómeno alrededor de la frecuencia de corte, quizás con una variación continua de la frecuencia y la respectiva medición de los ángulos de inclinación. Esto se puede lograr con una exposición continua (o discreta a intervalos tan cortos que parezca continua), como por ejemplo una filmación con varios cuadros por segundo. Esto luego se podría analizar con un editor de video específico, como el VideoPoint. Esto permitiría un análisis completo del movimiento.

Para observar mejor la relación entre la frecuencia de corte y la geometría del sistema, así como el salto del eje menor al mayor, es necesario, claro, un estudio de más cuerpos con la misma simetría. Una experiencia propuesta es un cuerpo con momento de inercia variables, y pasar, por ejemplo, de una geometría de disco a una de barra.

Otra modificación posible es experimentar con diferentes cables o hilos, ya que la masa del hilo podría influir a bajas frecuencias, generando un torque apreciable que modifique el ángulo.

**A. Apéndice Teórico**

**A.1 Deducción de las ecuaciones del modelo clásico para los cuerpos rígidos utilizados.**

**A.1.1 Anillo**

**A.1.1.1 Cálculo del Hamiltoniano.**

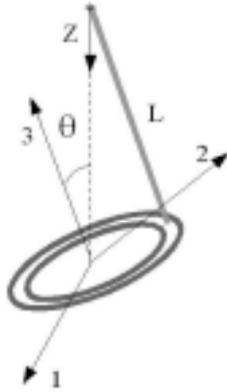


Figura A.1: Esquema para hallar las ecuaciones de movimiento del anillo.

Para un anillo de radio interno  $r_{int}$ , radio externo  $r_{ext}$  y espesor  $h$  se tiene que sus momentos de inercia, observando la figura A.1, son los siguientes:

$$I_1 = I_2 = M \left( \frac{r_{ext}^2 + r_{int}^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \quad (0.1)$$

$$I_3 = \frac{M}{2} (r_{ext}^2 + r_{int}^2)$$

Como nuestro anillo se encuentra en el caso en que  $\frac{h^2}{3} \ll r_{ext}^2 + r_{int}^2$ , se puede realizar la siguiente aproximación para  $I_3$ :

$$I_3 \cong 2I_2 \cong 2I_1 = 2I \quad (0.2)$$

Nos interesa obtener el Hamiltoniano  $H$  a fin de poder describir la experiencia. Para ello se debe obtener el Lagrangiano  $L$  dado por:

$$L = T_{Rot} + T_{Trasl} + V_{grav} \quad (0.3)$$

Utilizando los ángulos de Euler (figura A.2) y la figura 1A se obtiene que:

$$T_{Rot} = \frac{I}{2} [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 (1 + \cos^2 \theta)]$$

$$T_{Trasl} = \frac{M}{2} \cdot r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 \left( 1 + r_{ext} \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta}} \right)^2$$

$$V_{grav} = -M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta} + r_{ext} \cdot \text{sen}\theta \right)$$

donde  $M$  es la masa del anillo,  $L$  el largo del cable y  $g$  la aceleración de la gravedad.

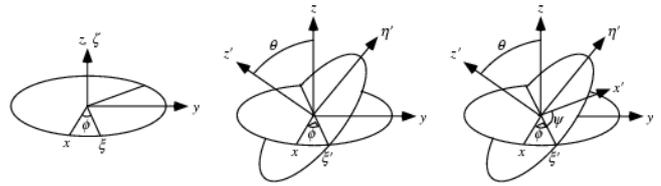


Figura A.2: Ángulos de Euler ( $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$ )

Teniendo en cuenta la condición de que  $\dot{\phi} = \omega \cdot t$  (donde  $\omega$  es la frecuencia de giro) y utilizando el momento generalizado  $p_\theta$  asociado a la coordenada  $\theta$  dado por:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} \cdot \left[ I + M \cdot r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left( 1 + \frac{r_{ext} \cdot \text{sen}\theta}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta}} \right)^2 \right]$$

se llega a la siguiente ecuación para  $H$ :

$$H = \frac{p_\theta^2}{2 \left[ I + M \cdot r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left( 1 + \frac{r_{ext} \cdot \text{sen}\theta}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta}} \right)^2 \right]} - \frac{I \cdot \omega^2}{2} \cdot (1 + \cos^2 \theta) - M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta} + r_{ext} \cdot \text{sen}\theta \right)$$

**A.1.1.2 Análisis del potencial efectivo.**

El potencial efectivo  $V_{efvo}$  viene dado por:

$$V_{efvo} = -\frac{I \cdot \omega^2}{2} \cdot (1 + \cos^2 \theta) - M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta} + r_{ext} \cdot \text{sen}\theta \right)$$

donde la primer y segunda derivada respecto de  $\theta$  son respectivamente las siguientes expresiones:

$$\frac{dV_{efvo}}{d\theta} = \frac{I\omega^2}{2} \cdot \text{sen}2\theta - \quad (0.4)$$

$$M \cdot g \cdot \left( \frac{r_{ext}^2 \cdot \text{sen}2\theta}{2\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta}} + r_{ext} \cdot \cos \theta \right)$$

$$\frac{d^2V_{efvo}}{d\theta^2} = I\omega^2 \cdot \cos 2\theta -$$

$$M \cdot g \cdot \left( \frac{r_{ext}^2 \cdot \cos 2\theta}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta}} - \frac{r_{ext}^4 \cdot \text{sen}2\theta}{4(L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - r_{ext} \cdot \text{sen}\theta \right)$$

De la ecuación (0.4) se puede observar que  $\theta = \pi/2$  es un ángulo de equilibrio independientemente del valor de  $\omega$ . Evaluando dicho ángulo en la derivada segunda se obtiene

$$\left. \frac{d^2V_{efvo}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -I\omega^2 + M \cdot g \cdot r_{ext} \cdot \left( 1 + \frac{r_{ext}}{L} \right) \quad (0.5)$$

En la ecuación (0.5) se puede observar que existe un  $\omega_c$  en el cual el segundo miembro de la igualdad cambia de signo, provocando que  $\theta = \pi/2$  pase de ser un punto de equilibrio estable a uno inestable. Dicho valor de  $\omega_c$  se obtiene igualando a 0 la ecuación (0.5) con lo cual se llega a que

$$\omega_c = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot r_{ext}}{I} \cdot \left( 1 + \frac{r_{ext}}{L} \right)} \quad (0.6)$$

A su vez, para una frecuencia  $\omega > \omega_c$  se puede deducir que la derivada primera del potencial efectivo posee otra raíz, que físicamente representa otro punto de equilibrio, que resulta ser estable ( $\theta_{eq}$ ). Entonces, igualando a 0 la ecuación (0.4), y despejando  $\omega$  se obtiene que

$$\omega = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot r_{ext}}{I} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen}\theta_{eq}} + \frac{r_{ext}}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta_{eq}}} \right)} \quad (0.7)$$

Vale aclarar que esta relación se cumple para  $\omega > \omega_c$ .

### A.1.2. Barra

Para este caso el procedimiento es análogo que en el caso del anillo. Por lo tanto el análisis a continuación se desarrollará en forma más breve.

#### A.1.2.1 Cálculo del Hamiltoniano.

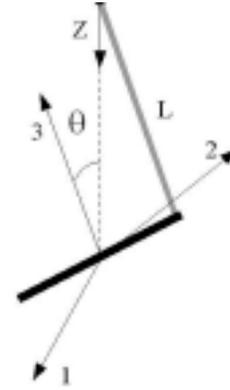


Figura A.3.: Esquema para hallar las ecuaciones de movimiento de la barra.

En este caso la barra (hueca) posee un radio interno  $r_{int}$ , radio externo  $r_{ext}$  y un largo  $h$ , con lo cual los momentos de inercia son los siguientes:

$$I_1 = I_2 = I_{12} = \frac{M}{4} \left( r_{ext}^2 + r_{int}^2 + \frac{h^2}{3} \right) \quad (0.8)$$

$$I_3 = \frac{M}{2} \left( r_{ext}^2 + r_{int}^2 \right)$$

Para la barra no se puede hallar una relación directamente proporcional entre los momentos de inercia, lo cual si era posible para el anillo. El Lagrangiano viene dado por la ecuación (0.3), cuyos términos, observando la figura A.3 son los siguientes

$$T_{Rot} = \frac{1}{2} \left[ I_{12} \cdot (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \text{sen}^2 \theta) + I_{33} \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos^2 \theta \right]$$

$$T_{Trasl} = \frac{M}{8} \cdot h^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 \left( 1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{L^2 - r_{ext}^2 \cdot \cos^2 \theta}} \right)^2$$

$$V_{grav} = -M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta} + \frac{h}{2} \cdot \text{sen}\theta \right)$$

donde  $M$  es la masa de la barra,  $h$  el largo de la barra,  $L$  el largo del hilo y  $g$  la aceleración de la gravedad. Siguiendo los mismos pasos que en el caso del anillo se llega a la siguiente expresión del Hamiltoniano

$$H = \frac{P_\theta^2}{2 \left[ I_{12} + M \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \left( 1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{\text{sen} \theta}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta}} \right)^2 \right]} - \frac{1}{2} \cdot (I_{12} \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}^2 \theta + I_{33} \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \theta) + M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta} + \frac{h}{2} \cdot \text{sen} \theta \right)$$

### A.1.2.2 Análisis del potencial efectivo.

El potencial efectivo  $V_{efvo}$  viene dado por:

$$V_{efvo} = -\frac{\omega^2}{2} \cdot (I_{12} \cdot \text{sen}^2 \theta + I_{33} \cdot \cos^2 \theta) + M \cdot g \cdot \left( \sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta} + \frac{h}{2} \cdot \text{sen} \theta \right) \quad (0.9)$$

donde la primer y segunda derivada respecto de  $\theta$  son las respectivas ecuaciones a continuación:

$$\frac{dV_{efvo}}{d\theta} = -\frac{\omega^2}{2} \cdot \text{sen} 2\theta (I_{12} - I_{33}) + M \cdot g \cdot \frac{h}{2} \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{\cos \theta \cdot \text{sen} \theta}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta}} + \cos \theta \right) \quad (0.10)$$

$$\frac{d^2V_{efvo}}{d\theta^2} = -\omega^2 \cdot \cos 2\theta (I_{12} - I_{33}) + M \cdot g \cdot \left( \frac{h}{2} \right) \left\{ \left( \frac{h}{4} \right) \cdot \left[ \frac{2 \cdot \cos 2\theta}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta}} - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \frac{\text{sen}^2 2\theta}{2 \cdot \left( L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta \right)^{\frac{3}{2}}} \right] - \text{sen} \theta \right\}$$

Aquí también en la ecuación (0.10)  $\theta = \pi/2$  es un ángulo de equilibrio que no depende de  $\omega$ . Reemplazando éste valor en la derivada segunda se llega a que

$$\frac{d^2V_{efvo}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \omega^2 \cdot (I_{12} - I_{33}) - M \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot \left( 1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{L} \right) \quad (0.11)$$

Como ocurre en el anillo, en la ecuación (0.11) existe un  $\omega_c$  tal que cambia el signo del miembro de la derecha de la igualdad, cambiando la estabilidad de  $\theta = \pi/2$ . Procediendo en forma análoga se obtiene que

$$\omega_c = \sqrt{\frac{h}{2} \cdot \left[ \frac{M \cdot g}{I_{12} - I_{33}} \right] \cdot \left( 1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{L} \right)} \quad (0.12)$$

Si  $\omega > \omega_c$  también aquí aparece otra raíz en la derivada primera del potencial efectivo traduciendo en otro punto de equilibrio (estable)  $\theta_{eq}$ . Haciendo nula la ecuación (0.10) se halla que

$$\omega = \sqrt{\frac{M \cdot g}{(I_{12} - I_{33})} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \theta_{eq}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 \theta_{eq}}} \right)} \quad (0.13)$$

### A.2. Generalización de los dos casos.

Se define un parámetro adimensional  $\lambda$  como el cociente entre el largo del cable  $L$  y la semi-longitud del elemento estudiado ( $r_{ext}$  para el anillo y  $h/2$  para la barra). Entonces modificando las ecuaciones (0.6) y (0.12) se obtiene lo siguiente para los dos casos:

$$\text{Anillo: } \omega_c^2 = \frac{M \cdot g \cdot r_{ext}}{I} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (0.14)$$

$$\text{Barra: } \omega_c^2 = \frac{h}{2} \cdot \left[ \frac{M \cdot g}{I_{12} - I_{33}} \right] \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (0.15)$$

Usando estas dos últimas expresiones y el parámetro  $\lambda$ , se describen las ecuaciones (0.7) y (0.13) hallándose que para ambos casos se encuentra una expresión general que es la siguiente

Anillo y barra:

$$\omega^2 = \frac{\omega_c^2}{\left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right)} \cdot \left( \frac{1}{\text{sen} \theta_{eq}} + \frac{\lambda}{\sqrt{L^2 - \lambda^2 \cdot \cos^2 \theta_{eq}}} \right) \quad (0.16)$$