

Divertimento acuático, estudio del tiro oblicuo usando un chorro de agua

Graciela Carmen Sour

e-mail: gracielasour@yahoo.com.ar

*Colegio Parroquial de la Sagrada Familia, Haedo, Buenos Aires, y
E.G.B. 140 y Polimodal 32, La Matanza, Buenos Aires*

En este trabajo estudiamos la cinemática del tiro oblicuo, usando como sistema ejemplificador un chorro de agua. Las coordenadas de la trayectoria del chorro se obtienen a partir de una fotografía digital. Se comparan los resultados experimentales del alcance y altura máxima del chorro, como función del ángulo de salida, con las predicciones teóricas del modelo. El acuerdo entre teoría y experimento es excelente y creemos que este experimento puede ser útil para realizar una actividad educativa que ilustra las características generales de las leyes de la cinemática.

Introducción

Es atractivo observar la trayectoria que describe un chorro de agua al salir de una manguera que tiene una cierta inclinación. Por ejemplo, es interesante preguntarnos si la trayectoria que describe el agua es una parábola. También es ilustrativo observar cómo varían el alcance y la altura máxima del chorro al modificar la inclinación de la manguera (ángulo de salida), manteniendo la velocidad del agua. En una segunda instancia podemos realizar mediciones de la trayectoria del agua y hacer un estudio experimental de modo cuantitativo.

Este trabajo permite analizar si las leyes que rigen el movimiento de un tiro oblicuo para un cuerpo sólido, son aplicables para la descripción de la trayectoria de un chorro de agua. Si esto fuese posible, podríamos, además, analizar dicho movimiento desde el punto de vista de la cinemática y comparar si los líquidos obedecen las mismas leyes que los sólidos.

Recordemos el análisis del movimiento de un proyectil (sólido) bajo la acción gravitatoria ejercida por la Tierra. Cuando el movimiento se realiza en la cercanía de la superficie, la aceleración de la gravedad puede considerarse constante. Este movimiento puede considerarse como la superposición de un movimiento uniforme, en la dirección horizontal, y otro uniformemente variado (o uniformemente acelerado) en la dirección vertical.^[1,2] El plano del movimiento está definido por la aceleración vertical, a_y , y la velocidad inicial. Ubicamos los ejes cartesianos con el origen en la salida del proyectil. Elegimos la orientación de los ejes coordenados de modo que el eje Y esté en la dirección de la aceleración de la gravedad, o sea vertical. Si θ es el ángulo de disparo con respecto a la horizontal y v_i la velocidad inicial del mismo, la posición horizontal x y la posición vertical y varían en el tiempo, según:

$$x = x_i + v_{i,x} t \quad (1)$$

$$y = y_i + v_{i,y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 . \quad (2)$$

Aquí, $v_x = v_{i,x} = v_i \cos(\theta) = \text{constante}$; $v_y = v_{i,y} + a_y t$; y $a_y = -g$. Eliminando el tiempo de las ecuaciones (1) y (2), podemos encontrar la ecuación de la trayectoria:

$$y = \tan(\theta) x - \frac{g}{2v_i^2 \cos^2(\theta)} \cdot x^2 . \quad (4)$$

Esta ecuación de segundo grado representa una parábola en el plano xy .

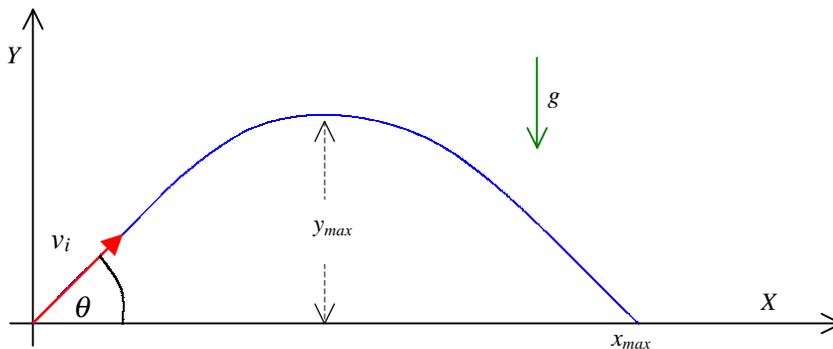


Figura 1: Diagrama esquemático del movimiento de un proyectil lanzado con un ángulo de disparo θ .

El alcance máximo $x_{\text{máx}}$ del tiro corresponde a la solución de (1) cuando $y = 0$:

$$x_{\text{máx}} = \text{sen}(2\theta) \frac{v_i^2}{g} , \quad (5)$$

vemos que $x_{\text{máx}}$ depende de la velocidad inicial y el ángulo de inclinación. La altura máxima $y_{\text{máx}}$ se alcanza a la mitad del tiempo total de vuelo. El tiempo total de vuelo, es el tiempo que el proyectil tarda en llegar a su alcance máximo, de (3) tenemos:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2 v_{i,y}}{g} , \quad (6)$$

por tanto es:

$$y_{\text{máx}} = y(t_{\text{vuelo}} / 2) = \frac{v_i^2}{2g} \text{sen}^2(\theta) . \quad (7)$$

De las ecuaciones anteriores vemos que la velocidad inicial v_i puede conocerse a través del análisis de la trayectoria o de las mediciones de $x_{\text{máx}}$ e $y_{\text{máx}}$.

Para este experimento resulta fascinante utilizar nuevas tecnologías para realizar mediciones precisas que nos permiten confrontar los datos medidos de una trayectoria con las predicciones teóricas en toda su extensión. El experimento aquí propuesto es de

muy bajo costo y de fácil implementación. Aún cuando el experimento que presentamos fue realizado en un laboratorio de enseñanza, esta actividad bien puede ser realizada al aire libre, en una actividad de grupo que permita motivar con espíritu lúdico la importancia de la experimentación.

Diseño experimental

Conectamos una manguera de jardín común (en nuestro caso era de 8,5 mm de diámetro interno) a un grifo de agua corriente que nos permitía regular el caudal de la salida del agua. En nuestro experimento mantuvimos constante el flujo (o presión) de salida del chorro durante todo el estudio. Esto se manifestó en que tanto el alcance como la altura máxima del chorro a un dado ángulo de inclinación eran los mismos al comienzo como al final del experimento.

Utilizamos una cámara fotográfica digital para tomar una serie de fotografías, mientras variábamos la inclinación de la manguera. Pusimos especial atención en ubicar la lente de la cámara en un plano paralelo al del movimiento del chorro. De este modo se evitan las distorsiones que pueden producirse en una toma fotográfica oblicua.

Colocamos una regla graduada en el borde de la mesada y una probeta graduada de un litro de capacidad detrás del chorro, para usarlos como referencia y poder obtener relaciones de transformación que nos permitan pasar las coordenadas de los puntos de la trayectoria medidos en pixeles en la fotografía, a centímetros (Figura 2).

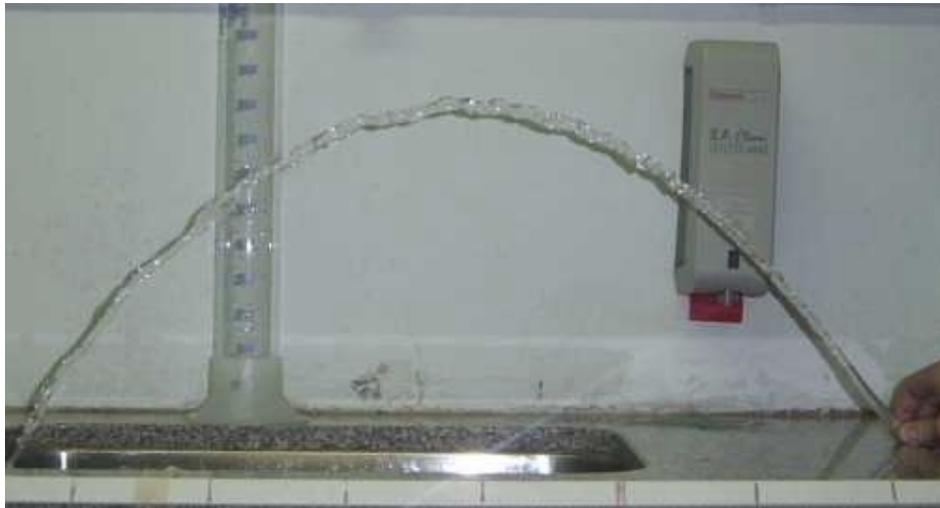


Figura 2: Fotografía del chorro de agua analizado.

Tomamos las coordenadas de varios puntos de la trayectoria usando un editor visual, por ejemplo el visualizador de imágenes PhotoEditor® de Microsoft permite obtener la coordenadas de la posición del puntero de mouse en la imagen. En nuestro caso utilizamos una subrutina de Excel, preparado especialmente para digitalizar la fotografía (usamos Visual Basic for Applications). Con el programa, los datos obtenidos pueden reunirse en una tabla de valores, para luego representarlos gráficamente para el

análisis. En la web existen diversos utilitarios que permiten realizar la operación de obtener las coordenadas absolutas de una imagen digital.

Puesto que la imagen analizada corresponde a un chorro que viaja de derecha a izquierda, fue necesario realizar un cambio en la variable x de modo que el origen de coordenadas quede ubicado en el punto de salida del agua. Claramente, esto no es necesario en el caso que el agua fluya de izquierda a derecha respecto del observador que toma la fotografía. Otra posibilidad hubiese sido analizar la trayectoria del chorro previa reflexión horizontal de la imagen, una posibilidad que los programas de análisis de imágenes incluyen.

Para transformar las medidas en pixeles obtenidas de la fotografía en medidas expresadas en centímetros, debimos calibrar los ejes x e y . Para ello usamos las marcas de la regla sobre la mesada –separadas 10 cm– para tener la relación cm/pixeles en la dirección x ; y las marcas de la escala de la probeta –separadas 3,5 cm– para la relación en la dirección y . La Figura 3a muestra la relación entre distancia y pixeles en la dirección horizontal. Se observa una relación lineal y la pendiente de la recta mide la relación de transformación, que es 0,18 cm/pixeles. Del mismo modo, se observa para la dirección vertical una relación de 0,25 cm/pixeles (Figura 3b).

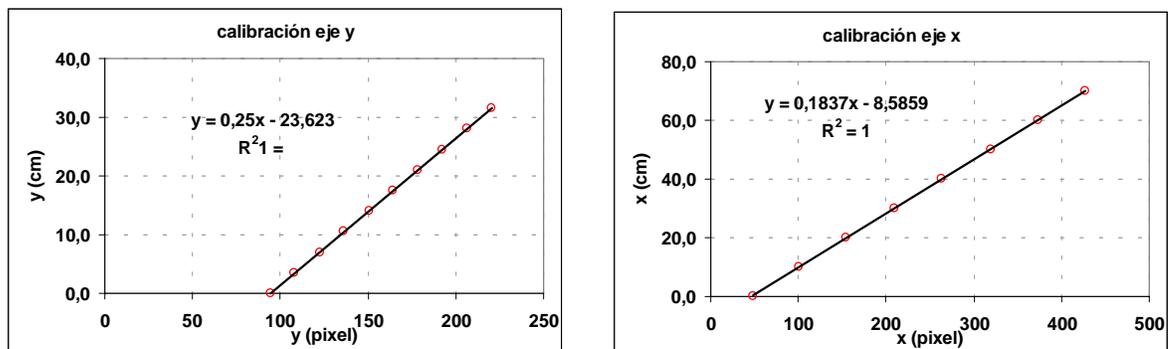


Figura 3: Representación gráfica que permite encontrar la relación entre pixeles y distancias en centímetros. Izquierda) Eje y , derecha) eje x .

Resultados

La Figura 4 muestra la digitalización de las coordenadas del chorro, en pixeles.

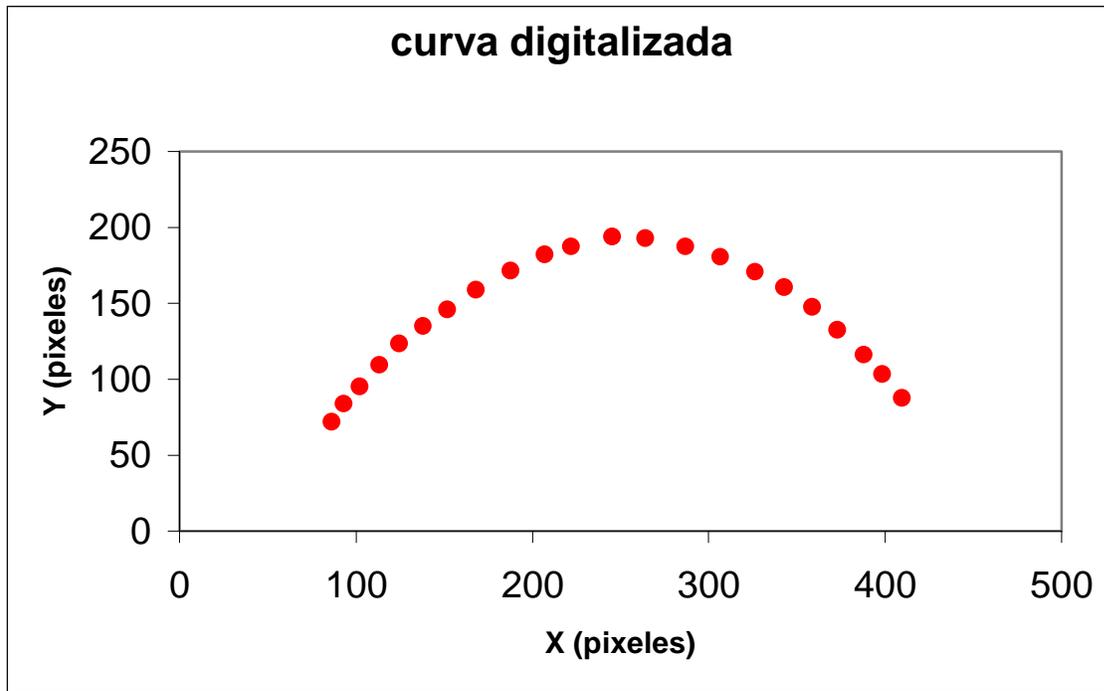


Figura 4: Resultado de la digitalización de la trayectoria del agua

La Figura 5 muestra la trayectoria del chorro en coordenadas medidas en centímetros y es el resultado de la transformación de los datos en píxeles de la Figura 3. También se muestra un ajuste de los datos a un polinomio de segundo grado. El coeficiente de correlación R^2 indica una muy buena descripción de los datos por la ecuación de segundo grado. Esto nos permite concluir que la trayectoria del agua es parabólica.

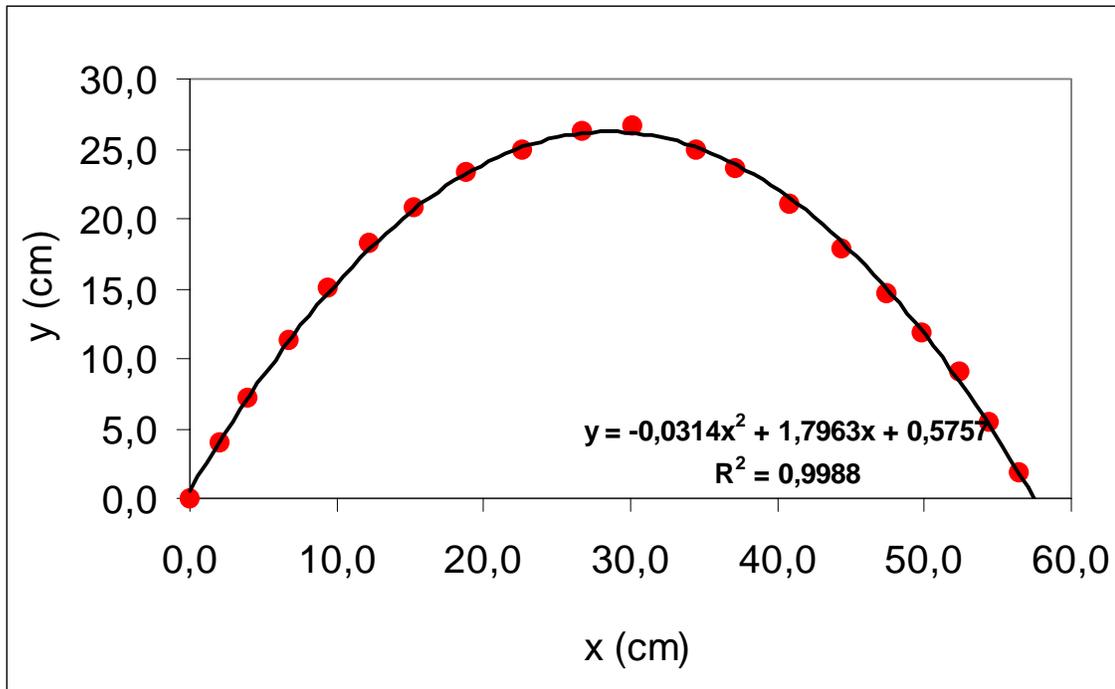


Figura 5: Gráfico de la trayectoria que describe el chorro de agua.

La trayectoria queda expresada por:

$$y = -0,0314x^2 + 1,7963x + 0,57 \quad (8)$$

De acuerdo a la ecuación (4), identificamos que el coeficiente del término cuadrático representa:

$$\frac{-g}{2v_i^2 \cos^2\theta} = -0,0314 \text{ cm}^{-1}, \quad (9)$$

y el término lineal representa:

$$\tan \theta = 1,796 \quad (10)$$

De (9) obtenemos la velocidad inicial (tomamos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$): $v_i = 258 \text{ cm/s}$. De (10) obtenemos el ángulo de inclinación: $\theta = 61^\circ$.

A partir de las ecuaciones del alcance (5) podemos calcular la velocidad inicial:

$$v_i = \sqrt{\frac{g x_{\text{máx}}}{\text{sen}(2\theta)}}, \quad (11)$$

también de la altura máxima (7), podemos calcular la velocidad inicial:

$$v_i = \sqrt{\frac{2 g y_{\text{máx}}}{\text{sen}^2(\theta)}} \quad (12)$$

De la Figura 5 determinamos el alcance $x_{\text{máx}}$ y la altura máxima $y_{\text{máx}}$:

$$x_{\text{máx}} = 60,2 \text{ cm}$$

$$y_{\text{máx}} = 26,7 \text{ cm}$$

De (11) resulta:

$$v_i = 264 \text{ cm/s}$$

y de (12):

$$v_i = 262 \text{ cm/s}$$

La Figura 5 muestra la dispersión de los valores de la velocidad inicial obtenidos de las tres maneras propuestas. También está indicado el valor medio de estas velocidades y la dispersión de los valores.

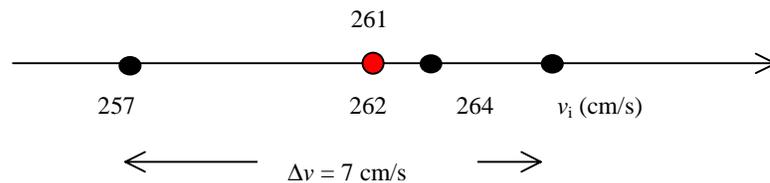


Figura 6: Velocidad inicial obtenida por los tres métodos propuestos (puntos negros). El valor medio se destaca en rojo.

Podemos observar que los valores medidos están dispersos en un intervalo $\Delta v = 7 \text{ cm/s}$. Esto indica una dispersión relativa $\Delta v / v = 0,03$, es decir de un 3% respecto del valor promedio. Concluimos que cualquiera de los tres métodos de obtención de la velocidad inicial es aceptable y produce resultados equivalentes.

Una manera de verificar que el resultado de la velocidad inicial es válido consiste en medir esta magnitud de forma independiente. Proponemos el siguiente método. Recordamos que el caudal de agua Q es el volumen V que circula por unidad de tiempo Δt :

$$Q = V / \Delta t. \quad (13)$$

Este caudal también puede representarse en función de la velocidad de salida v_i :

$$Q = v_i A, \quad (14)$$

donde A es el área transversal de la manguera en el punto de salida: $A = \pi D^2/4$ (D es el diámetro de la manguera).

Para medir el caudal usamos una probeta graduada que íbamos llenando con agua, mientras medíamos los tiempos de llenado. La Figura 6 muestra estos resultados. La pendiente de la recta representa el caudal de salida del agua, en las mismas condiciones del experimento de la Figura 1. Obtenemos $Q = 187,8 \text{ cm}^3/\text{s}$, por tanto de (14) resulta:

$$v_i = 264 \text{ cm/s.}$$

Observamos que este valor está dentro del rango de dispersión de los valores de velocidad medidos por los otros métodos (Figura 5). Esto indica que el método propuesto para medir la velocidad del agua a partir de la fotografía, su digitalización y su representación sobre la base de las ecuaciones de tiro oblicuo, produce un resultado adecuado y justifica su puesta en práctica.

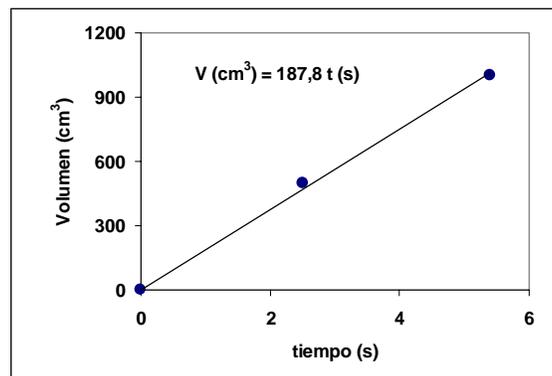


Figura 7: Medición del caudal de salida.

Conclusiones

En primer lugar, nuestro estudio de la cinemática de un chorro de agua indica que es posible describir la trayectoria del chorro usando las mismas ecuaciones que las de un tiro oblicuo, originalmente desarrolladas para un proyectil sólido. De hecho la figura 5, que compara las coordenadas medidas del chorro con la trayectoria de un proyectil lanzado oblicuamente, muestra un excelente acuerdo entre lo observado y lo predicho teóricamente.

También este estudio permite medir la velocidad de salida de un chorro de agua a partir una fotografía digital. Los valores de la velocidad inicial obtenidos por distintos métodos coinciden dentro de los errores experimentales con los que se trabajó.

Por otra parte es excelente la manera en que se pueden conjugar la teoría y la experimentación en un trabajo muy accesible con la tecnología actual.

Además del análisis cinemático del movimiento del chorro de agua también pudo realizarse satisfactoriamente otro análisis a partir de la hidrodinámica, de hecho la velocidad inicial del chorro se determinó por métodos cinemáticos y por medición de

caudales. Creemos que esta es una manera útil y novedosa de integrar conceptos de distintos capítulos de la física.

Por último, creemos que se trata de un interesante y ambicioso trabajo que pueden realizar los estudiantes al aire libre, y que les permite adquirir e integrar en un mismo proyecto diversas habilidades importantes en el proceso de aprendizaje.

Referencias

1. M. Alonso y E. J. Finn, *Física*, Addison-Wesley Iberoamericana, mayo 1998, Buenos Aires.
2. Eugene Hercht, *Física en perspectiva*, Addison- Wesley Iberoamericana, junio 1993, Buenos Aires.
3. B. Tolar, “The water drop parabola”, *The Physics Teacher*, mayo de 1980, p. 371.

Agradecimientos

Agradezco a la Fundación Antorchas por apoyar la capacitación de los docentes y las ciencias, a la Universidad Favaloro, donde se realizó este trabajo, por su hospitalidad, a los Doctores Eduardo Rodríguez y Salvador Gil por su cordialidad y sencillez al transmitir sus conocimientos y a Pablo Fragapane por su ayuda en la traducción de artículos y su asesoramiento técnico.