

Péndulo reversible de Kater

Autores

Elizabeth Aballay

elizabethaballay@hotmail.com

Eduardo Avilés

dagored@sion.com

Laboratorio de Física I - 2° Año - Universidad Favaloro - 2002

Resumen

Se estudia el movimiento de un péndulo reversible de Kater, basada en un péndulo físico de masa constante que puede oscilar alrededor de dos puntos de suspensión O y O' . Aplicando las leyes de rotación de sólidos rígidos a los sistemas oscilantes con pequeñas amplitudes, es posible explicar la relación de la distribución de masa para la cual los períodos de oscilación respecto de los puntos O y O' sean iguales. Al organizar los datos experimentales, se verifica lo anterior, a través del análisis gráfico.

Introducción

Existen varias realizaciones del "péndulo reversible", inventado por Henry Kater en 1815. Todos ellos se basan en un péndulo físico (típicamente una barra) que puede oscilar alrededor de cualquiera de dos puntos de suspensión O y O' , como se ilustra esquemáticamente en la Figura 1. Lo que se busca es una distribución de masa para la cual los períodos de oscilación respecto de los puntos de suspensión O y O' sean iguales. Esto se consigue ajustando la posición de las masas M_1 y M_2 , lo que cambia el momento de inercia del péndulo respecto al eje de giro. Una posible realización de este péndulo se muestra esquemáticamente en la parte derecha de la figura 1.

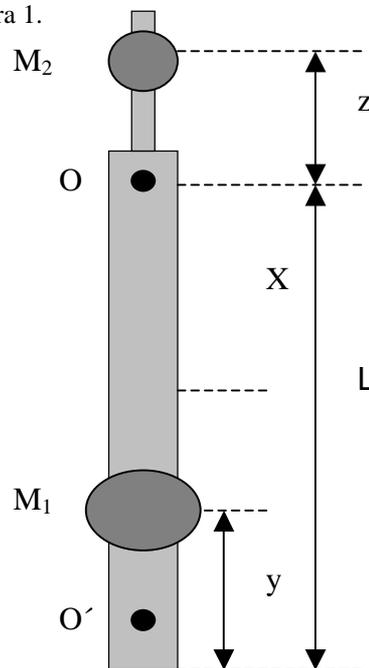


Figura 1: Péndulo reversible de Kater. Este péndulo puede oscilar de cualquiera de los puntos de suspensión O y O' . La separación entre ambos, L , es fija y conocida. Consta además de dos masas de posición variables, M_1 y M_2 . La primera permite una variación gruesa de la distribución de masas y por ende de los períodos respecto de O y O' . La segunda masa (la menor) sirve para realizar un ajuste fino de los períodos.

La distancia entre los puntos de suspensión es fija y conocida, L. Si llamamos K al radio de giro del péndulo respecto de su centro de masa y designamos por a y a' las distancias del centro de masa a punto de suspensión O y O' respectivamente, tenemos que los períodos del péndulo respecto de estos dos puntos de suspensión serán, respectivamente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + a^2}{g \cdot a}} \quad (1)$$

y:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + a'^2}{g \cdot a'}} \quad (2)$$

con:

$$L = a + a' \quad (3)$$

Si, variando la distribución de masas (ubicación de M1 y M2), logramos que estos dos períodos se igualen, entonces tenemos que:

$$K^2 = a \cdot a' \quad (4)$$

y, por lo tanto:

$$T_{comun} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5)$$

Para el caso de una barra uniforme, los períodos serán iguales cuando las distancias X₁ y X₂ de los puntos de suspensión al centro de masa cumplan las expresiones, según la siguiente deducción:

Deducción teórica

Deduciremos para el péndulo como el que graficamos en la Figura 1, la relación que cumplen las distancias X₁ y X₂ de los puntos de suspensión al centro de masa en una barra uniforme, cuando sus períodos T y T' con la longitud L de la varilla, para pequeñas amplitudes de oscilación (aproximadamente para ángulos menores a 10°) son iguales.

El momento de inercia de una varilla que gira sobre su centro de masa es:

$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2 \quad (6)$$

pero en nuestro caso gira a una distancia X entonces:

$$I(x) = \frac{1}{12} ML^2 + MX^2 = M \left(\frac{L^2}{12} + X^2 \right) \quad (7)$$

El período para un péndulo físico esta dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I(x)}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{M\left(\frac{L^2}{12} + X^2\right)}{MgX}} \quad (8)$$

elevando ambos miembros al cuadrado:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{M\left(\frac{L^2}{12} + X^2\right)}{MgX} = 4\pi^2 \frac{\left(\frac{L^2}{12} + X^2\right)}{gX}$$

Si $X' = \frac{L}{2} - \delta$ con $\delta = 0$, entonces:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{1}{3} \frac{L^2}{g \frac{L}{2}} = 4\pi^2 \left(\frac{2L}{3g}\right)$$

Igualo $T'(X') = T(X)$

$$T'^2(X') = T^2(X)$$

entonces:

$$4\pi^2 \left(\frac{2L}{3g}\right) = 4\pi^2 \left(\frac{\frac{L^2}{12} + X^2}{g \cdot X}\right)$$

$$\frac{2}{3} LX = \frac{L^2}{12} + X^2$$

$$\Rightarrow X^2 - \frac{2}{3} LX + \frac{L^2}{12} = 0$$

de este modo a través de la ecuación cuadrática formada hallo los valores de X:

$$X = \frac{2}{3} L \pm \sqrt{\frac{4}{9} L^2 - \frac{L^2}{3}} = \frac{2}{3} L \pm \frac{1}{3} L$$

$$\Rightarrow X_1 = L$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{1}{3} L$$

Si δ es distinto de cero, los períodos T y T' serán iguales si las distancias X_1 y X_2 de los puntos de suspensión al centro de masa cumplan las expresiones:

$$\Rightarrow X_1 = \frac{L}{2} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{L}\right) \quad (9)$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{L}{6} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{L}\right) \quad (10)$$

Método Experimental

En este proyecto se utilizó una péndulo reversible construido con una barra de sección uniforme metálica, de longitud $L = 1003,4 \pm 1$ mm. La barra tiene dos puntos de suspensión que distan del centro de masa distancias X_1 y X_2 ; δ es la distancia del extremo superior al punto de suspensión, en este caso $\delta = 10,6 \pm 1$ mm. La sobrecarga está ubicada en la posición y que se mide desde un punto arbitrario de la barra. Ésta sobrecarga, se logró usando un clip de papeles (como se muestra en la fig. 2). Se utilizó un fotointerruptor conectado a una PC, que registró el paso de la barra, para determinar los períodos T y T' variando la distancia y . La barra que obstruyó el haz de luz del instrumento, midió los tiempos con una apreciación nominal del orden de 1 ms. El programa de control del fotointerruptor, utilizado en el modo "Pendulum Timer", registró esos tiempos.

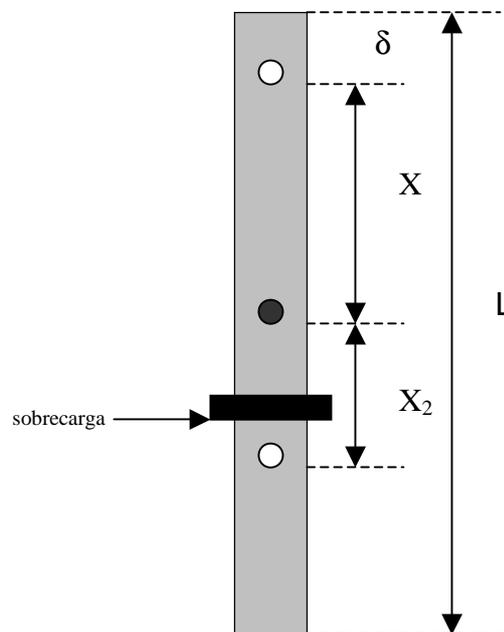


Figura 2: Péndulo reversible de Kater. Una barra de sección uniforme con dos puntos de suspensión.

Luego se procedió a medir las distancias X_1 y X_2 del dispositivo con una regla, con un error nominal de apreciación del orden de 1 mm. Los resultados de las mediciones fueron:

$$X_1 = 165 \pm 1mm$$

$$X_2 = 496 \pm 1mm$$

Los cuales coincidieron con las distancias requeridas X_1 y X_2 , medidos de los puntos de suspensión al centro de masa, para lograr que los períodos sean iguales, según lo indica las siguientes ecuaciones para el caso de una barra uniforme, de una longitud L y δ dadas.

$$X_1 = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{\delta}{L}\right)$$

$$X_2 = \frac{L}{6} \left(1 - \frac{\delta}{L} \right)$$

A continuación, usando el péndulo con estas condiciones, representamos gráficamente los períodos T y T' en función de la posición de la sobrecarga y . Para poder visualizar la información experimental obtenida, utilizamos el método de cuadrados mínimos para buscar una relación analítica que mejor ajusta a nuestros datos.

Se puede observar en la figura 3, que los gráficos de los períodos T y T' en función de la posición de la sobrecarga (y), el ajuste fue polinomial de segundo grado.

Los modelos utilizados para cada uno de los gráficos son los adecuados para describir los datos experimentales, debido a que el R^2 se aproxima a 1 en ambos casos.

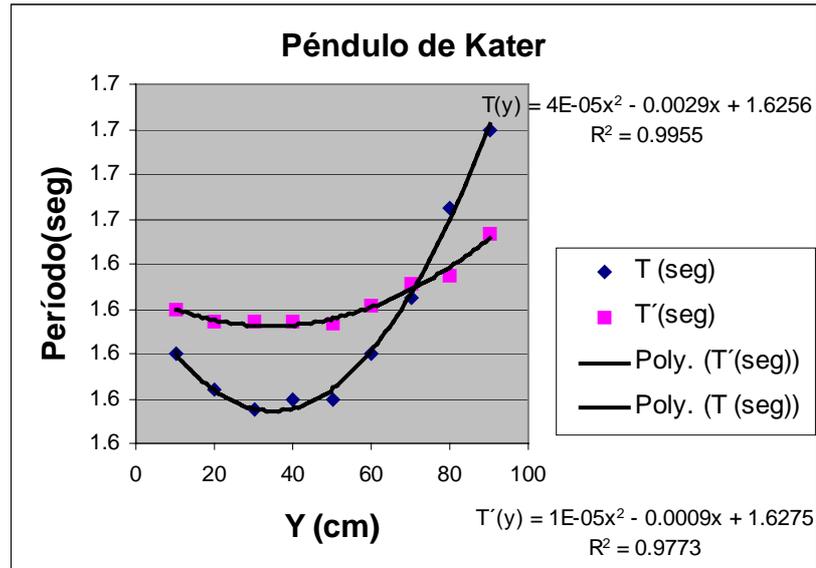


Figura 3: gráfico de los períodos T y T' en función de la posición de la sobrecarga (y), de acuerdo a los datos experimentales obtenidos y ajustados a líneas de tendencia por el método de cuadrados mínimos.

A partir del gráfico se determinó el valor de $y = y^*$ para lograr la igualdad de los períodos $T \approx T'$ en función de y . El punto y^* es el valor óptimo de y , donde las curvas $T(y)$ y $T'(y)$ se cortan.

$$Y^* \approx 67,6 \pm 0,1cm$$

De este modo se determina el mejor valor de:

$$T \approx T' \approx 1,6 \pm 0,1seg$$

Utilizando la ecuación (5), determinamos el valor de la aceleración de la gravedad g con su incertidumbre:

$$g(m / s^2) = 10,1 \pm 0,5m / s^2$$

Discusión

Al comparar y analizar los datos de la experiencia realizada, se comprobó que los resultados obtenidos son consistentes debido a que coinciden con el marco teórico propuesto.

Se puede observar que se cumplieron las ecuaciones para un péndulo de Kater, y en la experiencia realizada se pudo lograr una distribución de masa de modo tal que se logró que los períodos de oscilación respecto de los puntos de suspensión O y O' sean iguales.

El análisis gráfico y el método de ajuste a una línea de tendencia se utilizó para observar los datos experimentales y hacer la comparación con los gráficos propuestos por las ecuaciones del movimiento, y observar la relación que debe haber entre las distancias X_1 y X_2 para que los períodos T y T' sean iguales, los cuales coincidieron con los resultados esperados.

Conclusiones

De acuerdo a lo observado en la experiencia se comprobó efectivamente que a una determinada distribución de masa del dispositivo utilizado, los períodos de oscilación respecto de los puntos de suspensión O y O' son iguales, los cuales coinciden con la distancia necesaria de los puntos de suspensión propuesta por las ecuaciones para el movimiento del péndulo de Kater, dado en el marco teórico.

Al utilizar el método de cuadrados mínimos, el cual ajusta los datos obtenidos de la experiencia a una línea de tendencia, coinciden perfectamente con las ecuaciones correspondientes al movimiento estudiado.

Referencias

1. Gil, S. y Rodríguez E., *Física re-Creativa*, 1ra. Ed.- Buenos Aires: Prentice Hall, 2001.
2. Meyer, P., *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, 2da. Ed.- México: Prentice Hall, 1998.
3. Resnick, R., Halliday, D., *Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería*, 13ra. Ed.- Buenos Aires: Compañía Editorial Continental, 1969.
4. Sears, Zemansky, Young, Freedman, *Física Universitaria*, 9na Ed.- Argentina: Pearsn Educación, 1999.