No hay resorte que oscile cien años...

María Paula Coluccio y Patricia Picardo
Laboratorio I de Física para Biólogos y Geólogos
Depto. de Física, FCEyN, UBA - 1999

Resumen:

En el presente trabajo nos proponemos encontrar la expresión del desplazamiento en función del tiempo, que describe el movimiento armónico amortiguado de una masa suspendida de un resorte vertical. Para ello utilizamos un sensor de fuerza que mediante una interfase trabaja bajo el comando de un programa de computación. También estimamos la rigidez del resorte calculando el valor de su constante elástica.

Introducción

Una partícula describe un movimiento periódico o armónico cuando a intervalos iguales de tiempo vuelve a pasar por los mismos puntos. La ecuación que describe un movimiento como este puede expresarse siempre en términos de funciones trigonométricas tales como seno y coseno. Si además la partícula que se mueve en forma periódica realiza un camino de ida y vuelta sobre la misma trayectoria el movimiento recibe el nombre de oscilatorio o vibratorio. Movimientos como este son los que describen por ejemplo la cuerda de un violín, los átomos y moléculas en una estructura cristalina sólida y una masa suspendida de un resorte.

Los cuerpos oscilantes no se mueven en vaivén entre límites fijos sino que estos límites disminuyen con el tiempo debido a la acción de las fuerzas de rozamiento que disipan la energía del movimiento. Debido a la acción de estas fuerzas el cuerpo adquiere un movimiento armónico amortiguado.

La ecuación que representa el desplazamiento de una partícula con un movimiento armónico amortiguado en función del tiempo es la siguiente:

$$\boxed{y(t) = A * e^{-\gamma t} * \cos(\omega * t + \phi) + Y_0}$$

donde A es la amplitud, es decir la magnitud del máximo desplazamiento a partir de Y_0, y es siempre positiva (este valor depende de las condiciones iniciales). Debido a las fuerzas de fricción (rozamiento con el aire y fuerzas internas), esta amplitud disminuye paulatinamente hasta hacerse cero. Esta disminución está dada por el factor $e^{-\gamma t}$, donde γ es el coeficiente de fricción. Cuanto más grande resulte el valor de γ más rápido decaerá la amplitud.

La cantidad ω se llama frecuencia angular y difiere de la frecuencia f (número de oscilaciones por unidad de tiempo) en un factor 2π. Es decir: $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$

donde T es el tiempo requerido para completar una oscilación (período) y es el recíproco de la frecuencia (f).

La cantidad ($\omega . t + \phi$) se llama fase del movimiento. La constante ϕ se llama constante de fase e indica cuál es el desplazamiento en el tiempo cero, y que puede ser determinada a partir de $Y_0 = A \cdot \cos(\phi)$ y estará comprendida entre 0 y 2π. Así, la amplitud A y la constante de fase ϕ quedan determinadas por la posición y la rapidez iniciales de la partícula oscilante.

Y_0 indica el corrimiento de la función sobre el eje y.

Una característica distintiva del movimiento armónico es la relación de entre el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula oscilante. Cuando el desplazamiento es máximo en cualquier sentido, la velocidad es cero; esto se debe a que en ese instante la velocidad cambia de sentido. En dicho instante la aceleración, lo mismo que la fuerza ejercida por el resorte, tiene un valor máximo, pero está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento.

En el presente trabajo nos proponemos determinar experimentalmente la ecuación del desplazamiento en función del tiempo para un sistema formado por una masa suspendida en un resorte. Además determinaremos el valor de la constante elástica (*k*) del resorte con el que trabajamos a partir del estudio de la relación entre ω y la masa suspendida del resorte.

Método experimental

La experiencia consiste en estirar un resorte metálico helicoidal vertical cuyo extremo superior es fijo del que se cuelgan pesas de su extremo inferior, y observar el comportamiento del movimiento a través del tiempo.

Además estudiamos cómo varía la frecuencia angular con los cambios en la masa suspendida. Luego valiéndonos de la relación encontrada hallamos el valor de la constante **k** del resorte.

Para llevar la experiencia a cabo contamos con un sensor de fuerzas que opera con el programa MPLI. Del mismo suspendimos un resorte con pesas de distintas masas conocidas (ver diagrama de bloques). Para no tener interferencias en el experimento, debemos asegurarnos de que el desplazamiento sea únicamente en sentido vertical, ya que un vaivén adicional en otro plano no podría ser descripto por la ecuación de movimiento oscilatorio amortiguado. Para favorecer este tipo de movimiento es necesario trabajar con masas relativamente grandes, porque una masa muy liviana favorece un movimiento más irregular.

El programa nos permite graficar la fuerza ejercida por el resorte en función del tiempo. Este gráfico nos muestra que el comportamiento de la fuerza es periódico y sabiendo que la fuerza puede ser expresada como $F = m \cdot d^2x/dt^2$, de acuerdo con la segunda ley de Newton, encontramos así una relación entre la fuerza y el desplazamiento en función del tiempo. Nuestro fin es estudiar el desplazamiento en función del tiempo, pero experimentalmente resulta más sencillo medir la fuerza en función del tiempo.

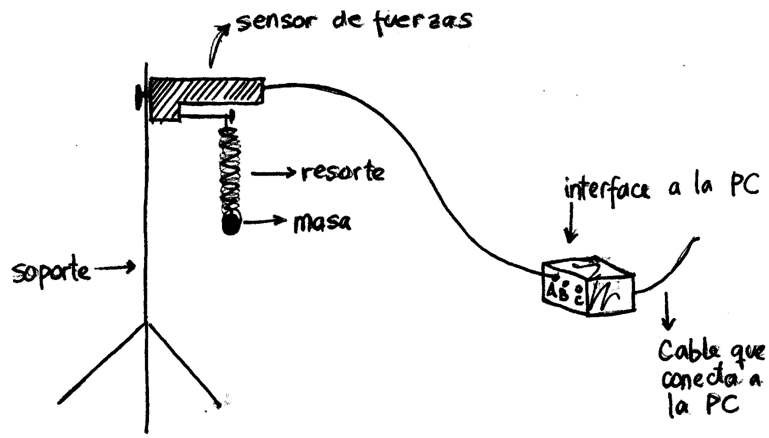
A partir del gráfico obtenido podemos hacer un ajuste manual a la ecuación del movimiento oscilatorio amortiguado. Para ello fijamos valores que se obtienen del gráfico, tales como $\mathbf{Y_0}$, **A**, $\boldsymbol{\omega}$, y realizamos un ajuste automático para valores que no pueden obtenerse del gráfico.

Para hallar ω realizamos la siguiente cuenta: $\omega = 2\,\pi\,.f$, siendo f la frecuencia (número de oscilaciones por unidad de tiempo: $f = 1/T$). Este valor (f), es calculado automáticamente por el programa MPLI.

El valor medio $\mathbf{Y_0}$ se obtiene haciendo la suma entre el valor máximo que toma la curva y el valor mínimo, dividido 2.

La amplitud **A** se obtiene haciendo la resta entre el valor máximo de la curva y el valor mínimo, dividido 2.

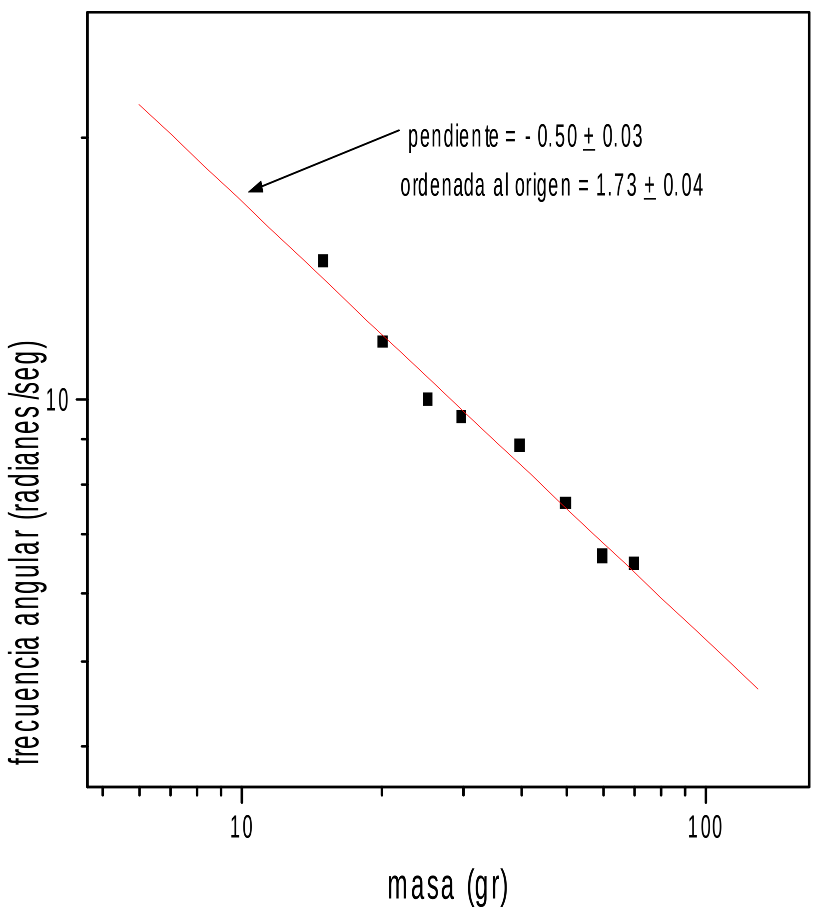
Dispositivo experimental



Resultados y discusión

Tabla de datos:

$\omega \pm \Delta\omega$ radianes/segundo	$(m \pm \Delta m)$ g
14.4 ±0,1	15.00 ±0,1
11.6 ±0,1	20.12 ±0,1
10.3 ±0,1	25.25 ±0,1
9.55 ±0,1	29.95 ±0,1
8.8 ±0,1	39.87 ±0,1
7.6 ±0,1	49.88 ±0,1
6.6 ±0,1	59.87 ±0,1
6.5 ±0,1	70.17 ±0,1



Los valores de ω fueron obtenidos a partir del valor de *f*, calculado por el programa MPLI para cada una de las masas con las que hemos trabajado, de acuerdo a la relación antes mencionada $\omega = 2\,\pi\,.\,f$.

La frecuencia angular y la masa suspendida del resorte se relacionan de la siguiente manera: $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$

Al aplicar logaritmo en ambos ejes logramos obtener la representación de una recta, cuya pendiente es -1/2, y la ordenada al origen es 1/2 log k. En la Figura 1 se puede observar la representación de los datos experimentales de ω_0 en función de m con las escalas transformadas a escala logarítmica. El programa de computación Origin 4.0 nos permitió realizar el ajuste lineal de los datos y encontrar así el valor de k a través de

Figura 1: frecuencia angular vs. masa. Nótese la escala logarítmica en ambos ejes. Los puntos corresponden a los datos experimentales. La recta corresponde a la que mejor ajusta a dichos datos. Mediante el valor de la ordenada al origen podemos determinar el valor de la k del resorte.

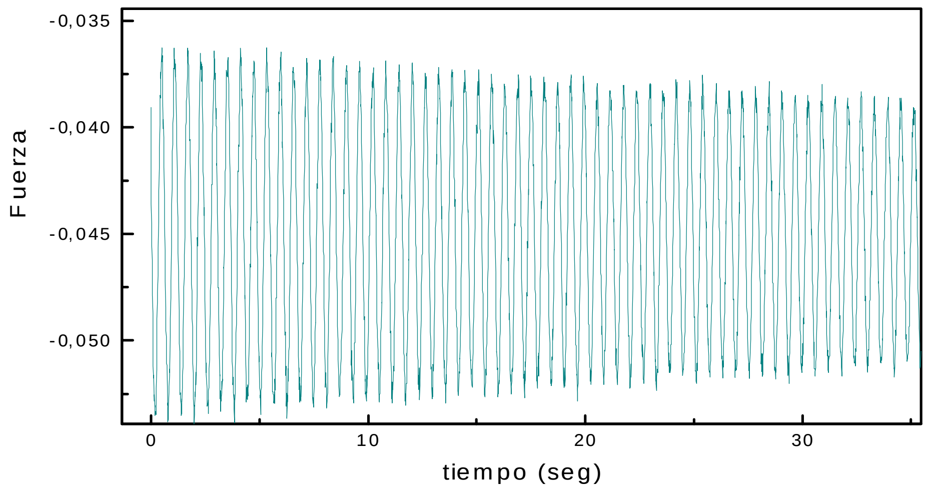
su relación con la ordenada al origen de la recta que mejor ajusta:
$k = (2884.03 \pm 0.04)$ dinas/cm

El programa MPLI nos grafica la variación de la fuerza elástica en función del tiempo. Esta fuerza tiene un comportamiento periódico ya que toma valores que se repiten a intervalos de tiempo iguales. La fuerza tiene estrecha relación con el desplazamiento de acuerdo con la segunda ley de Newton. Mediante el ajuste manual de parámetros como A, Y_0, la determinación de ω a partir de f y el ajuste automático para determinar el valor de los parámetros γ y ϕ, logramos encontrar la ecuación de la curva y(t) (desplazamiento en función del tiempo), para una de las repeticiones del experimento realizado. Tal como lo muestra la Figura 2 para la repetición donde la masa suspendida fue de (25.25 ± 0.1) g , la ecuación resulta:

Figura 2: Fuerza vs. tiempo. Estimativamente este es el mismo

$$\boxed{y(t) = 0.0817 * e^{-0.0902 * t} * \cos(10.3280 * t - 1.4020) - 0.0450}$$

gráfico que correspondería al desplazamiento en función del tiempo. Se puede ver cómo la amplitud decrece a medida que transcurre el tiempo. Esto es debido a la acción de las fuerzas de fricción que van frenando el movimiento oscilatorio.



La representación gráfica de esta ecuación se superpone totalmente con el gráfico que nos brinda el programa MPLI. En el gráfico se puede ver la disminución progresiva de la amplitud, causada por la fricción con el aire.

Conclusión

Es posible estimar en forma experimental cada uno de los parámetros que están involucrados en la ecuación que describe un movimiento armónico amortiguado. Podemos ver a través de su representación gráfica cómo la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo. Esto es una evidencia experimental de la acción de las fuerzas de fricción sobre el movimiento oscilatorio. Si éstas no actuaran el resorte oscilaría indefinidamente, y con una amplitud constante.

Como la frecuencia angular en un movimiento armónico es independiente de la amplitud del movimiento, entonces, a pesar de la disminución progresiva de la amplitud, ω se mantendrá constante. Nos valemos de esta constancia para determinar el valor de la k del resorte con el que trabajamos. Esta constante nos da una idea de la rigidez del mismo.

Bibliografía consultada

- *Física, Parte 1,* David Halliday, Robert Resnick, Compañía Editorial continental S.A., México, primera edición en español de la tercera edición en inglés: enero de 1980.