

# Laboratorio 4

## Segundo Cuatrimestre de 1998

Integrantes:  
Graciana Puentes y Matías Ison - Dpto. Física UBA

### MEDICION DE LA TEMPERATURA DE DEBYE CON UNA BALANZA

**RESUMEN:** Se describe un experimento para determinar la temperatura de Debye de un sólido. Una muestra del sólido es inmersa en nitrógeno líquido, conociendo la masa evaporada de  $\text{Ln}_2$  durante el enfriamiento de la muestra se calcula la variación en su energía interna. Se utilizó una balanza digital para medir la masa de evaporación para Aluminio y Silicio. Mediante el mismo procedimiento se calculó el calor latente de evaporación del nitrógeno. Este último fue calculado también utilizando un sensor de fuerza conectado a una plaqueta de adquisición. Ambas formas de medición son comparadas.

#### I-INTRODUCCION

Partiendo de que una red de  $N$  átomos tiene  $3N$  modos independientes de vibración, con dos grados de libertad cada uno ( $E_{pot}$  y  $E_{cinet}$ ) y asumiendo que todos están térmicamente activos, por el teorema de equipartición la energía interna del sistema resulta:

$$U = \sum_j \langle E_j \rangle = 3nRT \quad (1)$$

donde  $\langle E_j \rangle$  es la energía vibracional media asociada al modo  $j$ -ésimo,  $T$  es la temperatura y  $n$  número de moles del sólido,  $R$  es la constante universal de los gases. Esto conduce a una capacidad calorífica molar a volumen constante ( $C_v$ )

$$c_v = 3R \quad (2)$$

(resultado de Dulong y Petit)

Si no todos los modos están térmicamente activos la energía interna del  $j$ -ésimo modo resulta:

$$\langle E_j \rangle = \frac{h\nu_j}{\exp(h\nu_j / kT) - 1} + \frac{h\nu_j}{2} \quad (3)$$

donde  $\nu_j$  es la frecuencia de vibración del  $j$ -ésimo modo y  $h\nu_j/2$  es la energía de punto cero

La aproximación de Debye para la distribución de frecuencias de cada modo lleva a una energía interna

$$U=3nR + F(\Theta/t) \quad (4)$$

donde

$$F(t)=\frac{3}{t^3} \int_0^t dy \frac{y^3}{e^y - 1} \quad (5)$$

$\Theta$  es la temperatura de Debye de la red, que está asociada con la frecuencia de vibración característica máxima ( $\nu_m$ ) de la forma:

$$\Theta=h\nu_m/K \quad (6)$$

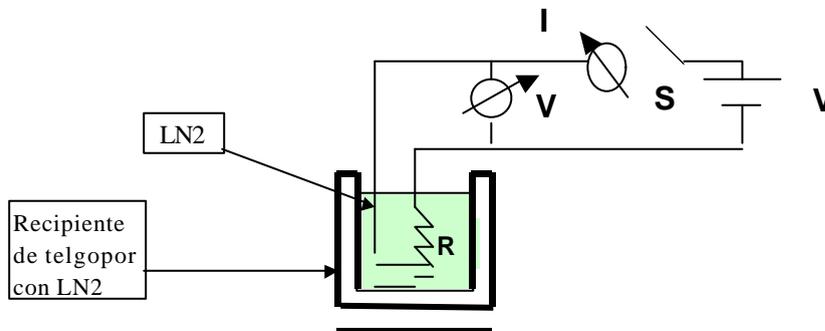
$h$  es la cte de Planck y  $K$  es la cte de Boltzman. De (4) se obtiene:

$$c_v = 3R \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{T/\Theta} \frac{y^4 e^y dy}{(e^y - 1)^2} \quad (7)$$

A temperaturas altas ( $\Theta/T \ll 1$ ,  $F(\Theta/T)=1$ ) se recupera el resultado de Dulong y Petit (2), mientras que a bajas temperaturas el calor específico resulta proporcional a  $T^3$ .

## II-MEDICIÓN DEL CALOR LATENTE DEL NITROGENO ( $L_v$ ):

Un esquema del dispositivo empleado para calcular el calor latente del LN2 es mostrado en la Fig.1



**Figura1.** Esquema del aparato usado para medir  $L_v$ . S, llave; R, resistencia de alambre  $33\Omega$  -10W I, amperímetro V, voltímetro

El circuito se encontraba inmerso en el nitrógeno. Mientras la llave S permaneció abierta se determinó la tasa de evaporación del nitrógeno,  $m(t)$ , debida exclusivamente al contacto con el medio ambiente. Luego de unos minutos la llave S fue cerrada a un tiempo ( $t_i$ ), observándose un aumento pronunciado en la tasa de evaporación, debido al calor entregado por la resistencia. Finalmente se abrió la llave ( $t_f$ )

y se estableció la nueva tasa de evaporación debida nuevamente al contacto con el ambiente. Cabe aclarar que la rapidez con que se evapora el nitrógeno depende de la

cantidad de éste contenida en el recipiente, observándose que tasa disminuye al disminuir dicho líquido.

El intervalo  $t=(t_f-t_i)$  en el cual S permaneció cerrada fue medido separadamente. La corriente fue medida en este intervalo.

El voltaje y la resistencia fueron elegidos de forma tal que la potencia disipada por R fuese suficientemente grande para poder registrar cambios en  $m(t)$

En nuestro caso  $V=28,9$  e  $I=0,88A$ . Los 10 W de potencia máxima para R eran excedidos pero el enfriamiento por el nitrógeno compensaba.

$L_v$  Fue medido mediante la relación

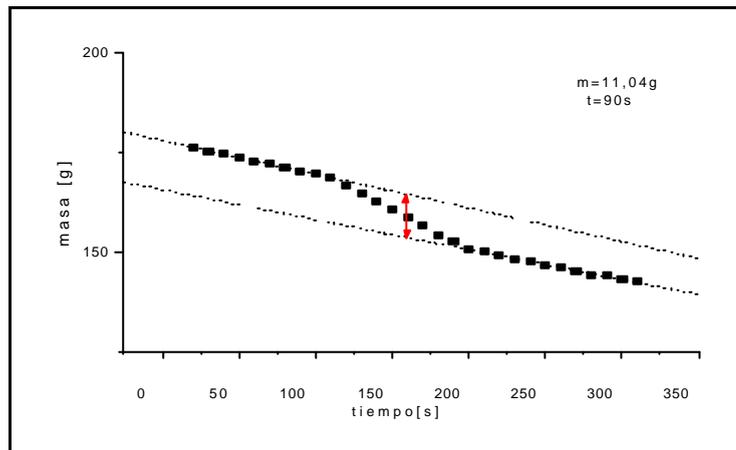
$$L_v = VI \frac{\Delta t}{\Delta m} \quad (7)$$

donde  $\Delta m$  es la masa evaporada por el calor entregado por R.

Las tasas de evaporación se obtuvieron midiendo la masa del LN2 en función del tiempo mediante dos formas de medición diferentes:

### 1-UTILIZACION DE LA BALANZA DIGITAL:

Se midió  $m(t)$ , colocando el dispositivo sobre una balanza digital de precisión 0,1g. Los datos eran tomados cada 10 seg

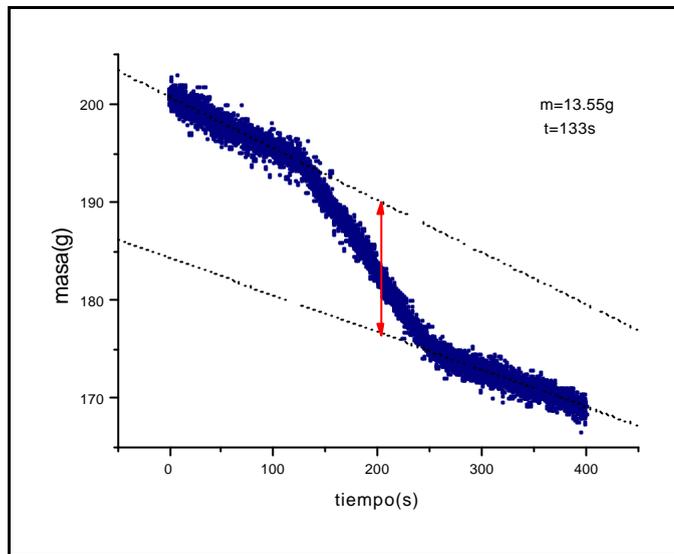


**Figura 2.** Grafico de los datos obtenidos sobre la masa del recipiente con LN2.  $t$  es el intervalo en que S permaneció cerrada y  $m$  es la masa de evaporación indicada por la flecha roja. Esta fue determinada mediante la resta de las tasas extrapoladas al tiempo central (donde se encuentra la flecha).

### 2- UTILIZACION DEL SENSOR DE FUERZA

Se utilizó un sensor de fuerza PASCO Modelo CL-6519, conectado a una plaqueta que permitía adquirir datos a razón de 12 por seg. El sensor consta de una barra metálica, de la que se colgó el recipiente. Este es básicamente un transductor lineal de diferencias de tensión por deflexión de la barra, en diferencias de voltaje; calibrado en nuestro caso para medir peso. Para evitar que las vibraciones del ambiente

aumentaran aun más las vibraciones propias del dispositivo por el burbujeo de LN2, se empotró el sensor a una pared. Para medir la variación de masa por el calor entregado por la resistencia se procedió de forma análoga a la anterior; obteniéndose:



**Figura3.** Gráfico de los datos obtenidos para la masa del Ln2 utilizando un sensor de fuerza ;  $t$ , es el tiempo durante el cual la llave S estuvo abierta y  $m$  es la masa evaporada por la potencia entregada por R, representada en el gráfico por la flecha roja.

En ambas mediciones (1y2), se calculó  $\Delta m$  a partir de la distancia entre las rectas de aproximación evaluadas en el centro del intervalo a un  $t_{medio}=(t_i +t_f)/2$  para no considerar la evaporación debida al contacto con el medio ambiente.

$\Delta m_1$ [g]	$\Delta m_2$ [g]	$L_{v1}$ [ J/g] (exp)	$L_{v2}$ [J/g] (exp)	$L_v$ [J/g] (tabulado)
11.0(0,5)	13,6±0,8	250±20	205±15)	197,8

Tabla 1: Valores hallados en ambas mediciones; Subíndices:

1) medición con balanza 2 )medición con sensor de fuerza.

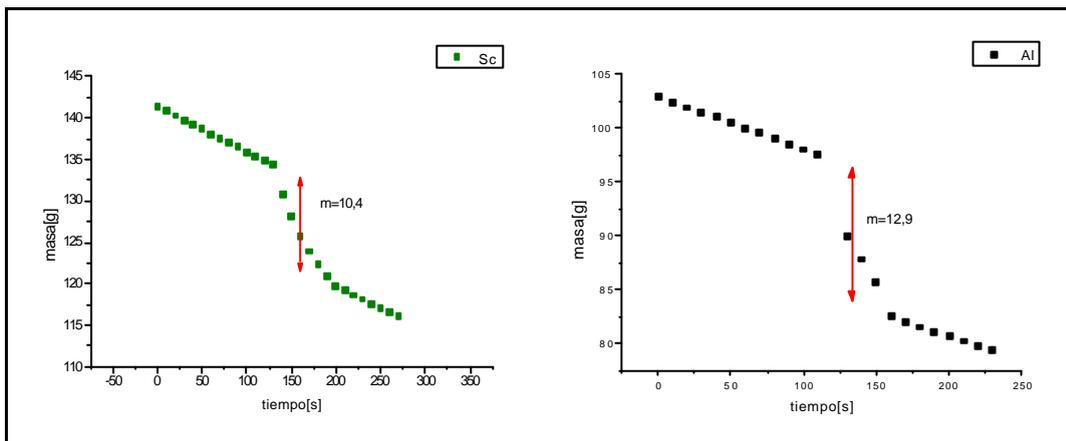
De la tabla 1se puede ver que el valor de tabla se encuentra dentro del error experimental de la medición con la balanza, sin embargo, existen diferencias significativas entre el valor medido con el sensor de fuerzas y el de tabla. Al analizar detalladamente distintas mediciones efectuadas con el sensor, se concluyó que este era extremadamente sensible a distintos factores ( vibraciones del recipiente, encendido de otros aparatos, etc ), por lo que en lo sucesivo se optó por la utilización de la balanza digital.

### III-MEDICION DE LA TEMPERATURA DE DEBYE

La segunda parte de la experiencia consistió en determinar la temperatura de Debye de Al y Si. Se eligieron estos materiales ya que poseen masas molares similares pero su dureza(k) es muy distinta. Como la frecuencia de vibración máxima ( $\nu_m$ ) es proporcional a  $k/m$ , las respectivas temperaturas deben resultar diferentes (ver (6)).

El procedimiento experimental fue idéntico al anterior. Se calculó la masa evaporada de nitrógeno al sumergir las muestras mediante los gráficos de  $m(t)$  obtenidos con la balanza.

Se tomaron datos de la evaporación de  $Ln_2$  durante algunos minutos. En un cierto instante  $t_i$  la muestra (a temperatura ambiente) era introducida en el recipiente (este proceso se debía realizar lentamente para evitar pérdidas de nitrógeno por salpicado). Durante un cierto  $\Delta t$  se producía la entrega de calor por parte del sólido y la tasa de evaporación aumentaba, hasta que la temperatura de la muestra descendía a 77K, donde el sistema alcanzaba el equilibrio y la pérdida de masa se debía solo al contacto con el medio ambiente.



**Figura 4.** Gráficos de  $m(t)$  del recipiente con  $Ln_2$  y la muestra. El punteado verde representa al Silicio y el negro al Aluminio. En ambos casos  $m$  es la masa vaporada por el contacto con la muestra, representada por la flecha roja.

El calor entregado por la muestra durante su enfriamiento es

$$\Delta Q = \Delta m L_v, \quad (8)$$

donde  $m$  es la masa evaporada por contacto con la muestra y  $L_v$  es el calor latente del  $Ln_2$ . Si se desprecia cualquier variación en el volumen de la muestra, entonces  $\Delta Q$  es igual a la variación en su energía interna. De la eq. (4) se obtiene

$$\Delta Q = U_i - U_f = 3n R T_i F(\Theta/T_i) - 3n R T_f F(\Theta/T_f), \quad (9)$$

donde  $T_i$  y  $T_f$  indican la temperatura inicial (ambiente) y final (77k) respectivamente y  $n$  es el numero de moles de la muestra. Conociendo  $\Delta m$ ,  $n$ , y  $T_i$  es posible encontrar  $\Theta$  resolviendo numéricamente la ec. (9).\*

Muestra	$T_i$ (K)	$n$ (mole s)	$\Delta m$ (g)	$\Delta Q$ (J)	$\Theta(\text{exp})$ K	$\Theta(\text{ref 1})$ K	$\Theta(\text{ref 2})$ K
Al	294	0,604	12,9± 0,6	2600± 100	350 ± 40	375	428
Si	294	0,646	10,4± 0,4	2060± 80	580 ± 30	650	636

Tabla 2: Valores de la temperatura de Debye obtenidos para las distintas muestras.

\*La resolución de la ecuación se realizó utilizando Mathematica for Windows (v.2.0)

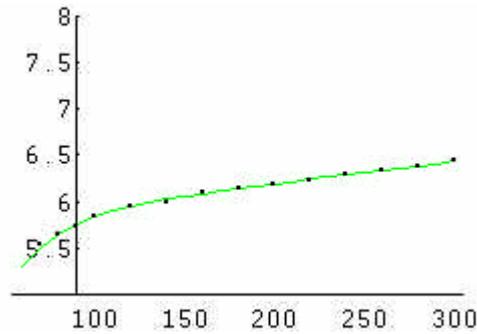
#### IV-ANALISIS

Se obtuvieron valores para las temperaturas de Debye por debajo de los esperados, con valores de tabla que no están en el rango de error. Analizando la ec (9) se vio que el  $\Delta m$  que ajustaba los valores tabulados debía ser en todos los casos aproximadamente 0,7g menor que el medido en cuyo caso se obtenían valores de  $\Theta(\text{exp})$  próximos a los de tabla. Esto nos hizo sospechar de algún error sistemático que no estábamos teniendo en cuenta. La fuente de este error puede identificarse con el salpicado al introducir las muestras y el burbujeo.

Una razón que sustenta esta hipótesis es la medición del calor latente, donde no se encontró este inconveniente ya que no se produce pérdida de masa de esta índole: el circuito se encuentra sumergido y durante la disipación el burbujeo es despreciable.

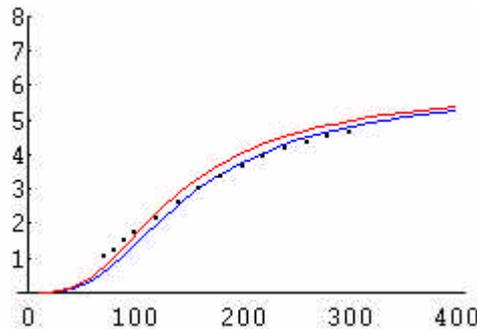
Por otro lado, se calculó la diferencia de masa que deberíamos haber obtenido a partir de una integración de  $C_p$ , procediendo de la siguiente manera: A partir de valores tabulados para el  $C_p$  del plomo se halló un polinomio interpolador de quinto grado. Integrando este polinomio entre las temperaturas inicial y final se encontró la variación de calor en el proceso ( $\Delta Q = \int_T C_p$ ), de donde se obtuvo una variación de masa que resultó 0.6 g menor que la medida.

**NOTA:** Se realizaron mediciones análogas para Plomo ( $\Theta_{\text{tabla}}=105\text{K}$ ), pero la ecuación numérica (ec.9) resultaba irresoluble (obteníamos  $\Theta_{\text{exp}} < 0$ ). Sin embargo con la corrección de 0,7g se obtuvo  $\Theta(\text{exp})=80\text{K}$  que resulta ligeramente inferior a los valores de tabla.

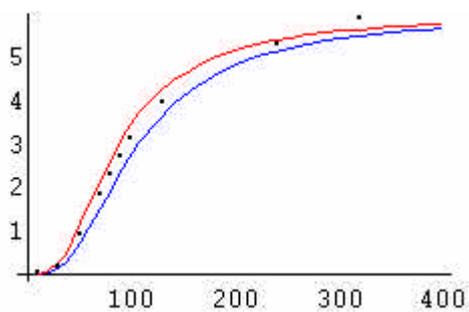


**Figura. 5.** Gráfico del calor específico del plomo. Los puntos indican valores de tabla

La línea verde corresponde al polinomio interpolador de Lagrange. Si bien se encontraron diferencias significativas entre las temperaturas medidas y las tabuladas se utilizó el modelo de Debye (ver ec. 7) para comparar valores de  $C_p$  tabulados con valores predichos por las temperaturas (experimentales y de tabla).



**Figura. 6.** Gráfico del calor específico del silicio .



**Figura7.** Gráfico del calor específico del aluminio. los puntos indican valores tabulados los puntos indican valores tabulados la línea roja fue obtenida a partir de  $\Theta(\text{exp})$  la línea roja fue obtenida a partir de  $\Theta(\text{exp})$  la línea azul fue obtenida a partir de  $\Theta(\text{tabla})$  la línea azul fue obtenida a partir de  $\Theta(\text{tabla})$

Otro de los puntos que se analizó fue la dureza de las muestras, de donde se obtuvo:

Muestra	k(teo) ( $\text{g/s}^2$ )	k(exp) ( $\text{g/s}^2$ )
Aluminio	$85 \cdot 10^{27}$	$57 \cdot 10^{27}$
Silicio	$203 \cdot 10^{27}$	$161 \cdot 10^{27}$

Si bien los valores de k calculados a partir de  $\Theta$ (tabla) difieren de los calculados a partir de  $\Theta$ (exp), se puede observar que la dureza relativa resulta similar, ya que:

$$k(\text{Si})/k(\text{Al}) \big|_{\text{teo}} = 2.4 \quad \text{y} \quad k(\text{Si})/k(\text{Al}) \big|_{\text{exp}} = 2.8$$

Por otro lado, también se calculó la dureza del plomo  $k = 33 \cdot 10^{27} \text{ g/s}^2$ . Este valor tan bajo de k nos dice que el plomo es un material blando cuya temperatura de Debye resulta muy inferior al de las otras sustancias.

## V-CONCLUSIONES:

El método empleado para determinar la temperatura de Debye resulta sencillo, aunque esta sujeto a ciertas aproximaciones ( la inestabilidad del sistema y la indeterminación en el tiempo por tomar datos manualmente ) además de tener que recurrir a métodos numéricos ( la extrapolación efectuada para medir  $\Delta m$ , la resolución numérica de ecuaciones). Por lo tanto, los resultados obtenidos nos dan una idea del rango en el que se encuentra la temperatura de Debye. Sin embargo los gráficos obtenidos para el calor específico concuerdan suficientemente con lo esperado: Se puede comprobar el diferente comportamiento que presenta cada material y como esto está relacionado con sus propiedades (dos materiales con distinta dureza y masa molar similar presentaron temperaturas de Debye con una diferencia de 200 K . También se observó el límite en el que esto deja de suceder (verificandose el resultado clásico de Dulong-Petit).

## VI-BIBLIOGRAFIA:

1. C. Deacon, J. de Bruyn y J. Whitehead, “ *A simple method of determining Debye temperatures*”, Am. J Phys. 60, 422-425 (1992).
2. M. Zemansky, *Calor y Termodinámica*, ed. Aguilar, España (1973).
3. C. Thomson y H. White, “*Latent heat and low-temperature heat capacity for the general physics laboratory*”, Am. J. Phys. 51, 362-364 (1983)
4. C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Second edition, ed. John Wiley, E.E.U.U. (1956)