

Análisis del efecto Doppler para una Fuente en Movimiento Circular

Alejandra Romero – M. Eugenia Capoulat.
Laboratorio de Física 5 – Dto. de Física – FCEyN – U.B.A. – 2005.

Resumen: En esta experiencia hacemos un estudio del efecto Doppler para el caso en que la fuente realiza un movimiento circular uniforme. Luego de comparar los datos experimentales con la teoría dada por Christian Doppler pudimos ver que los resultados estaban en gran acuerdo con ella. Los parámetros del sistema (velocidad del sonido, período de giro y frecuencia de emisión) se obtuvieron experimentalmente.

I. Introducción

El efecto Doppler consiste en una variación de la frecuencia de una onda percibida por un observador cuando la fuente de la perturbación y el observador están en movimiento relativo entre ellos. Para explicar este efecto consideremos el sistema de la figura 1.

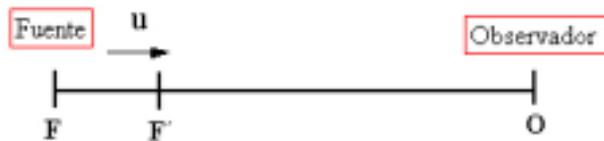


Figura 1: Esquema de la ubicación de fuente y receptor.

Si la fuente está en reposo respecto del observador, después de cierto Δt , se emite un número $N = f_0 \Delta t$ ^[1] de pulsos que ocupan una distancia $\overline{F\bar{O}} = N\lambda_0$.

Si ahora la fuente se mueve con velocidad u en movimiento rectilíneo, el mismo número de pulsos N debe ocupar un espacio menor $\overline{F'\bar{O}}$ dado que la fuente se ha desplazado una distancia $\overline{FF'} = u\Delta t$.

Por lo tanto en un espacio menor debe distribuirse el mismo número de ondas N y la longitud de onda debe acortarse de modo tal que $\overline{F'\bar{O}} = N\lambda$.

Sabiendo que $\overline{F\bar{O}} = \overline{FF'} + \overline{F'\bar{O}}$ obtenemos:

$$N\lambda_0 = u\Delta t + N\lambda \quad (1.1)$$

Reemplazando $N = f_0 \Delta t$, tenemos una relación entre las longitudes de onda dada por:

$$\lambda f_0 = u + \lambda' f_0 \quad (1.2)$$

Si ahora consideramos que la velocidad de propagación de las ondas c es independiente del movimiento de la fuente de manera que $c = \lambda_0 f_0 = \lambda f$, resulta:

$$c = u + c \frac{f_0}{f} \quad (1.3)$$

Despejando f de la ecuación (1.3) obtenemos la frecuencia percibida por el observador.

$$f = f_0 \left(\frac{c}{c - u} \right) \quad (1.4)$$

Analicemos ahora el caso en el cual la fuente se encuentra en movimiento circular. La velocidad u es reemplazada por la magnitud V_D que representa la velocidad con la que la fuente se aleja o se acerca al observador^[2].

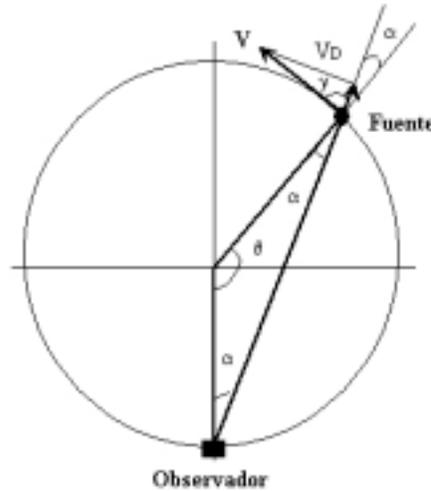


Figura 2: Sistema experimental analizado.

A partir de la figura 2 podemos ver que, si la velocidad tangencial V es constante, V_D está dada por:

$$V_D = V \cos(\gamma) = \frac{2\pi R}{T} \cos(\gamma) \quad (1.5)$$

Donde R es el radio de la circunferencia y T el período de giro. Mediante propiedades de ángulos encontramos que $\gamma = \theta / 2$. Por lo tanto, sabiendo que $\theta = 2\pi t / T$, V_D resulta:

$$V_D = \frac{2\pi R}{T} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (1.6)$$

Entonces si consideramos que el observador está en reposo, el cambio en la frecuencia percibida por este está dada por:

$$f = f_0 \left(\frac{c_s}{c_s \pm V_D} \right) \quad (1.7)$$

Donde c_s es la velocidad del sonido y f_0 es la frecuencia de emisión de la fuente o frecuencia en reposo. El signo depende de si la fuente se aleja (+) o se acerca (-) al observador.

En esta experiencia buscamos comprobar experimentalmente el cambio en la frecuencia predicho por Doppler mediante una comparación de los datos experimentales con la expresión teórica (1.7) que depende de los parámetros del sistema.

II. Procedimiento Experimental

El dispositivo experimental utilizado consiste en un *buzzer* con una frecuencia de emisión de (5300 ± 40) Hz ubicado en un extremo de una barra de madera de $(1,5 \pm 0.01)$ m de longitud. Dicha barra es sostenida en el centro por un eje conectado a un motor que la hace girar con velocidad constante (ver figura 3).

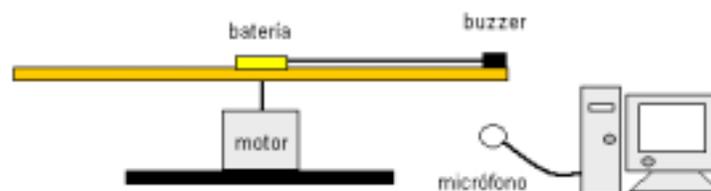


Figura 3: Dispositivo experimental.

El sonido emitido fue adquirido mediante un micrófono comercial para computadora con entrada a la placa de sonido de la PC, ubicado sobre la trayectoria del *buzzer*. Típicamente, estos micrófonos poseen un rango de frecuencias que abarca desde los 50 hasta los 12000 Hz y un alcance máximo de aproximadamente dos metros*.

* Datos del fabricante

La señal sonora fue grabada mediante un software convencional de audio, en nuestro caso, Audacity ®[♦]. La señal adquirida fue procesada mediante el programa SpectroGram versión 11.2 ®[▲] con el cual realizamos un espectrograma de dicha señal. Para una descripción cuantitativa más acertada, realizamos con este mismo software, un análisis de Fourier para distintos instantes. Con esto, obtuvimos un gráfico de la frecuencia en función del tiempo, que contrastamos con el modelo teórico dado por la expresión (1.7).

III. Análisis de los Resultados.

Una vez determinada la frecuencia de emisión, adquirimos la señal con el *buzzer* en movimiento. Debemos mencionar que la frecuencia característica del *buzzer* en reposo, es 5300 ± 40 Hz, con una componente no despreciable centrada alrededor de los 2700 Hz, subarmónico de la frecuencia principal (Ver Apéndice A, Fig. 7). La figura 4 muestra un espectrograma de la señal recibida por el micrófono para el caso dinámico. Luego de filtrar la señal eliminando las componentes de amplitud más baja, se observa la señal dominante, oscilando alrededor de los 5.3 kHz y otra secundaria, alrededor de los 2.7 kHz.

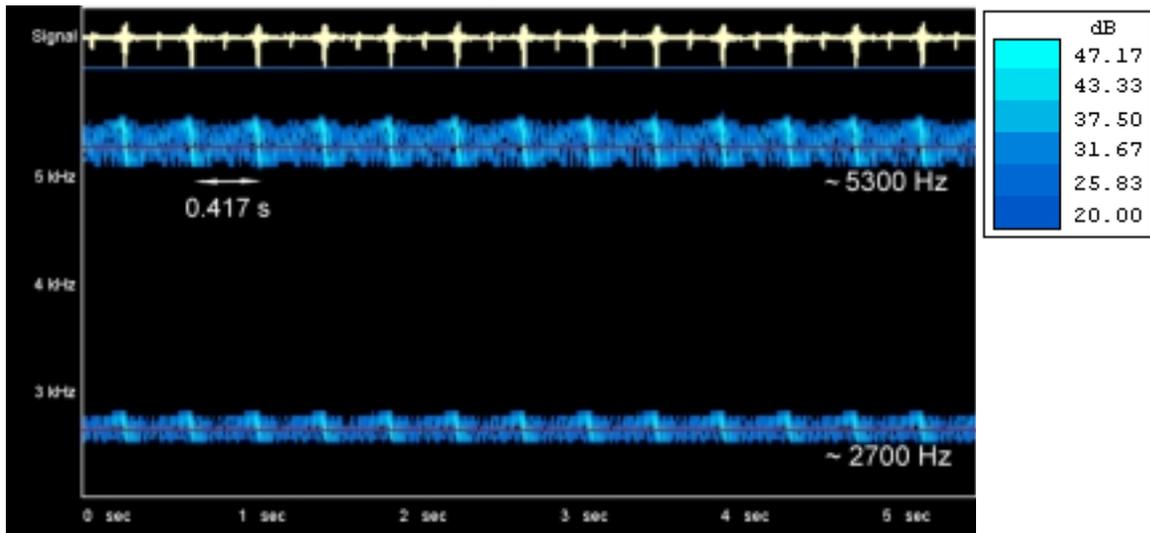


Figura 4: Espectrograma de la señal recibida por el micrófono cuando el *buzzer* realiza un movimiento circular uniforme. Se observan variaciones debido al efecto Doppler, tanto en la frecuencia de emisión característica como en el subarmónico. La señal en la parte superior corresponde a la amplitud del sonido en función del tiempo.

[♦] Disponible en www.superarchivos.com

[▲] Disponible en www.visualizationsoftware.com/gram.html. También pueden utilizarse softwares convencionales de audio, como WaveSurfer 1.8, disponible en www.speechandhearing.net/laboratory.

En lo sucesivo, vamos a restringir nuestro análisis a la señal dominante del *buzzer*. Con los parámetros característicos del dispositivo (período, longitud de la barra) esperamos que las variaciones por efecto Doppler (según la ecuación (1.7) sean aproximadamente del 3%. Teniendo en cuenta esto último, podremos dar una descripción algo más detallada del efecto Doppler si observamos el comportamiento de la señal de mayor frecuencia.

En la figura 5 mostramos el espectrograma restringido a la señal dominante del *buzzer* cuando éste se encuentra en movimiento circular uniforme.

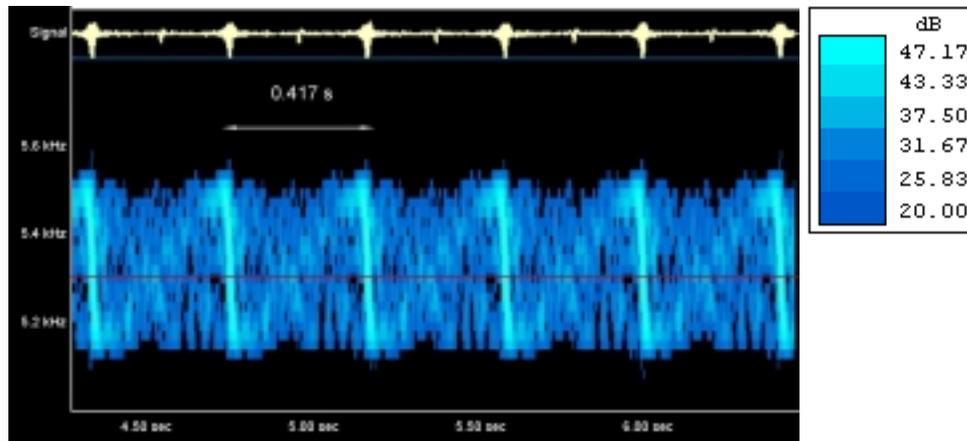


Figura 5: Espectrograma de la señal dominante recibida por el micrófono cuando el *buzzer* se mueve con movimiento circular uniforme. Las regiones de mayor intensidad corresponden a los instantes en que el *buzzer* se encuentra sobre el micrófono. Se observa en estos casos un fuerte decaimiento debido al cambio de signo en la velocidad relativa.

Observamos en la figura 5 un comportamiento periódico en (0.417 ± 0.002) seg, que corresponde al período de giro del emisor (ver apéndice B). Las regiones que se observan en rojo – señales de mayor intensidad – coinciden con el momento en que el *buzzer* pasa justo por encima del micrófono. En esta región se observa un fuerte decaimiento en la frecuencia detectada, debido al cambio abrupto en el sentido de la velocidad de desplazamiento del *buzzer* respecto del micrófono: un instante antes, el *buzzer* se acerca al micrófono, mientras que un instante después de traspasarlo, comienza a alejarse. Luego del decaimiento se observa que la frecuencia detectada comienza a crecer. Cuando el emisor se encuentra posicionado a la máxima distancia posible del micrófono (posición opuesta diametralmente), la velocidad relativa de desplazamiento es nula, por lo cual la frecuencia detectada coincide con la del emisor en reposo. A partir de este momento, el *buzzer* comienza a acercarse al micrófono hasta coincidir nuevamente con la posición del mismo.

Si bien los espectrogramas pueden darnos una descripción más o menos acertada del fenómeno que estamos estudiando, para contrastar nuestro experimento con la teoría es necesario hacer un análisis cuantitativo más detallado. Para esto, procesamos la señal mediante transformadas de Fourier para varios instantes de tiempo t_0 . Para realizar este análisis, utilizamos el programa SpectroGram 11.2 ®. Básicamente, este programa procesa la señal realizando transformadas de Fourier sobre intervalos Δt alrededor de un

valor central de tiempo t_0 . Así, si queremos saber cuál es la frecuencia detectada en cierto instante t_0 , realizamos un análisis de Fourier de la señal restringida al intervalo $(t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t)$. El soft permite ajustar libremente el valor del intervalo Δt . En este caso, considerando la señal del *buzzer* fue adquirida a una frecuencia de muestreo de 44100Hz, nos pareció suficiente fijar $\Delta t = 10$ ms. Los resultados obtenidos mediante este análisis se exponen en la figura 6.

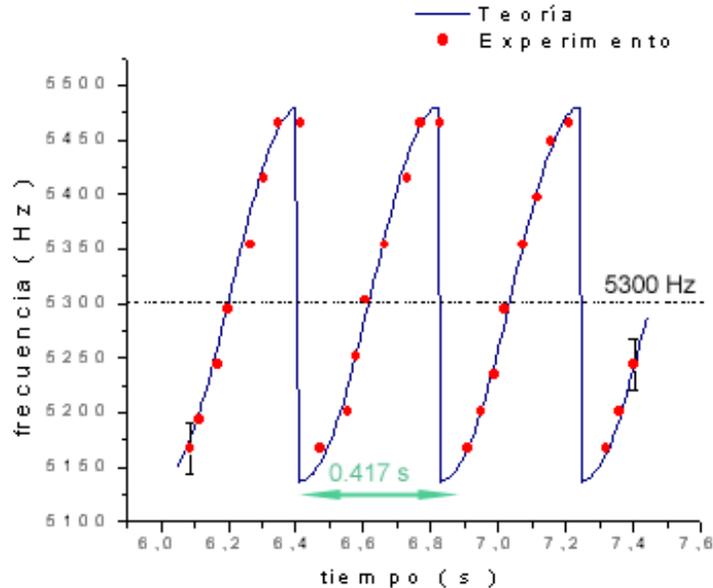


Figura 6: Frecuencia en función del tiempo. En azul, el comportamiento esperado según el modelo teórico. En rojo, los datos experimentales. La línea punteada indica la frecuencia del *buzzer* en reposo (f_0).

Vemos en la figura 6 que los resultados experimentales concuerdan con el modelo teórico desarrollado en la introducción.

Conclusiones

Presentamos en este informe un experimento sencillo que permite estudiar el efecto Doppler cuando el movimiento relativo entre la fuente y el observador es circular uniforme. Este estudio es perfectamente realizable con elementos comerciales y económicos, softwares disponibles en Internet y una PC hogareña con placa de sonido. Con estos elementos y el apropiado análisis de las señales sonoras, los resultados que se obtienen son concluyentes y se ajustan muy bien a la teoría. Sin embargo el experimento puede perfeccionarse aumentando la velocidad giro del emisor. Esto permitirá ver variaciones más significativas en la frecuencia, siempre teniendo la precaución de utilizar la frecuencia de muestreo apropiada para el caso.

Apéndice A: Determinación de f_0 .

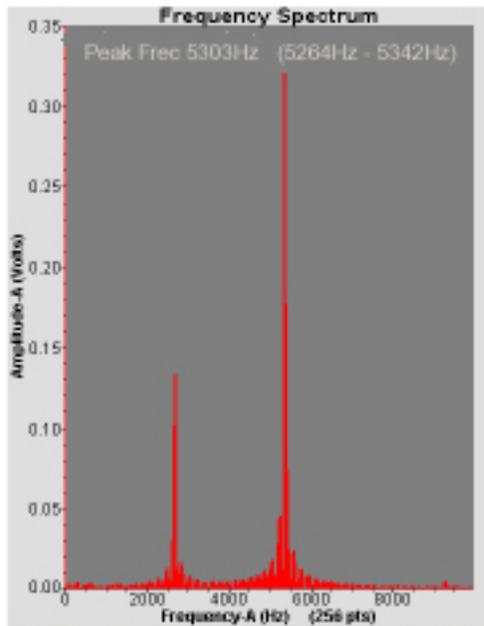


Figura 7. Espectro de la señal del *buzzer* y el micrófono en reposo

Con el *buzzer* y el micrófono en reposo adquirimos la señal emitida mediante el programa MPLI®. Luego realizamos un análisis de Fourier de dicha señal. Con este análisis obtuvimos dos picos característicos (Figura 7). El más significativo estaba centrado en 5303 Hz y con un semiancho de 40 Hz. Consideramos entonces que el valor de la frecuencia de emisión del *buzzer* (f_0) es de (5300 ± 40) Hz.

El segundo pico estaba centrado 2700 Hz . Dicho subarmónico se observa, además en el espectrograma de la figura 4.

Apéndice B: Determinación del período de giro.

Para calcular el período de giro T ubicamos un fotodiodo de modo tal que los extremos de la barra de madera lo atravesaran, como muestra la figura 8.

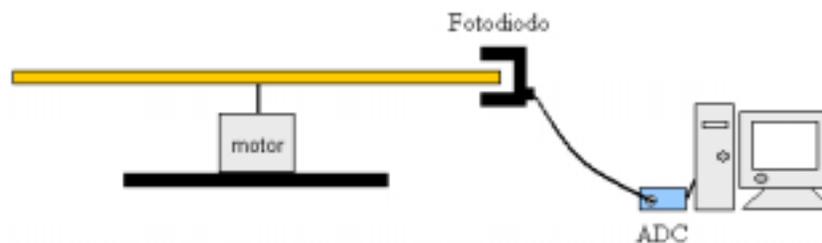


Figura 8: Dispositivo experimental utilizado para calcular el período de giro.

La señal del fotodiodo se adquirió en la PC mediante un conversor analógico digital ADC y el MPLI® Vernier Software.

Con este dispositivo, la señal adquirida en la PC será periódica en $T/2$ (figura 9). A partir de estos datos pudimos calcular el tiempo que tarda un extremo de la barra en volver a pasar por el fotodiodo, es decir el período de giro, obteniendo como resultado (0.417 ± 0.002) seg.

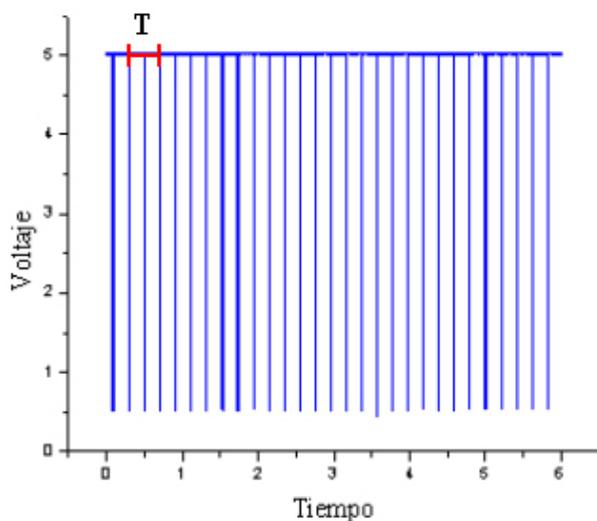


Figura 9. Voltaje en función del tiempo. Cuando un extremo de la barra obstruye el fotodiodo, la señal es nula. El intervalo de tiempo entre dos señales nulas consecutivas corresponde a medio período de giro. Determinamos $T = 0.417 \pm 0.002$ s.

Apéndice C: Determinación de la velocidad del sonido.

La velocidad del sonido puede calcularse conociendo la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) del mismo mediante la siguiente ecuación:

$$c_s = \lambda f \tag{C.1}$$

Para obtener λ utilizamos el dispositivo que se esquematiza en la figura 10^[3].

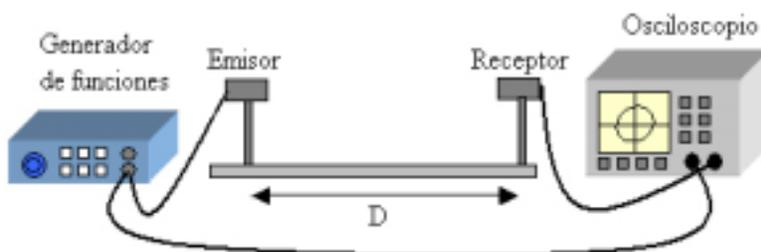


Figura 10: Dispositivo utilizado para calcular la longitud de onda λ de la onda emitida.

Este dispositivo consiste en dos piezoeléctricos utilizados como emisor y receptor. El emisor se conectó a un generador de funciones cuya frecuencia de excitación (f) se fijó en los (40.0 ± 0.1) kHz, ya que corresponde a la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico. El receptor se conectó a un osciloscopio de dos canales. También se conectó el generador de funciones al osciloscopio para tener un registro de la señal de entrada.

Utilizando el modo XY del osciloscopio se obtuvieron las figuras de Lissajous con las señales del generador de funciones y del receptor.

Desplazando el emisor en dirección opuesta a la que se encuentra el receptor obtuvimos una serie de figuras de Lissajous como la que se muestra en la figura 11.

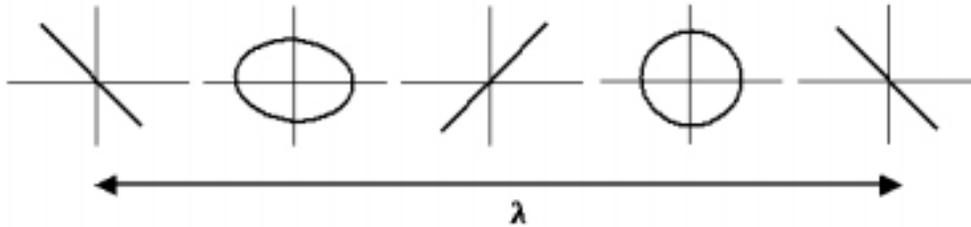


Figura 11: Ciclo de figuras de Lissajous a medida que el emisor se aleja del receptor. La distancia necesaria para completar el ciclo equivale a una longitud de onda.

Sabiendo que el receptor se debe desplazar exactamente una longitud de onda para que se cumpla el ciclo de la figura 9, medimos la distancia D (distancia emisor-receptor) cada vez que se cumplía un ciclo y realizamos un gráfico de D en función de la cantidad de longitudes de onda (ver figura 12).

El valor de la longitud de onda λ se obtuvo como la pendiente de dicho gráfico dando como resultado (0.874 ± 0.001) cm.

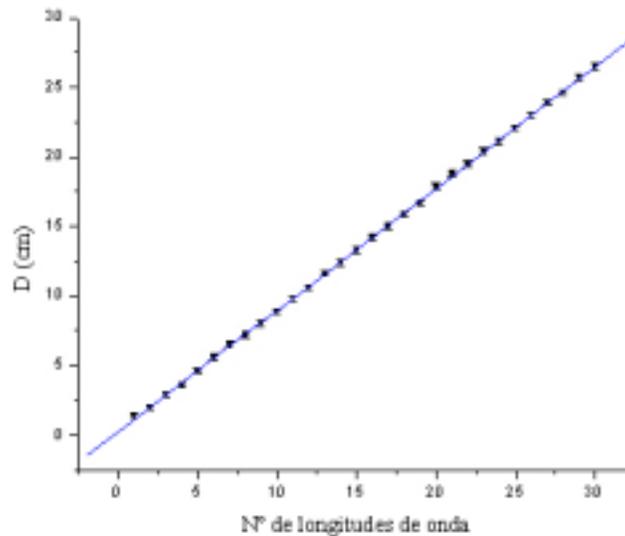


Figura 12: Distancia emisor-receptor en función del número de longitudes de onda. La longitud de onda de la onda emitida es igual a la pendiente de la recta dando como resultado (0.874 ± 0.001) cm.

Por último reemplazamos los valores de f y λ en la ecuación (C.1) y calculamos la velocidad del sonido (350 ± 40) m/s para una temperatura de $27,3$ °C.

IV. Referencias

^[1] E.Hecht, A.Zajac, Óptica, Addison-Wesley Iberoamericana

^[2] Saba M.M.F, Rosa R.A.S. “The Dopplér Effect of a Sound Source Moving in a Circle”, The Physics Teacher, Vol. 41,Nº 2, pp 89-91. Feb 2003.

^[3] Berg R., Brill D. “Speed of Sound Using Lissajous Figures”, The Physics Teacher, Vol.43, pp 36-39, Enero 2005.