Conducción y pérdida de calor a lo largo de una barra metálica

Julieta Romani, Paula Quiroga, María G. Larreguy y María Paz Frigerio
julietaromani@hotmail.com, comquir@ciudad.com.ar, merigl@yahoo.com.ar, mapaz@vlb.com.ar

Facultad de Ingeniería, Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Favaloro, Av. Belgran0 1723, C. A. de Buenos Aires, Argentina

Resumen

En este experimento medimos la distribución de temperatura en una barra de acero sometida a distintas condiciones de contorno. Estudiamos la conducción del calor de un extremo a otro de la barra y el calor que pierde por convección por su superficie.

Introducción

De la experiencia cotidiana observamos que si se sujeta el extremo de una barra metálica, como por ejemplo una cuchara, y se coloca el otro en una llama, el extremo que se sostiene se calienta de a poco, aunque no esté en contacto directo con la llama. El calor llega al extremo más frío por conducción a través del material. A nivel atómico, los átomos de las regiones más calientes tienen en promedio más energía cinética que sus vecinos más fríos, así que los empujan y les dan algo de su energía. Los vecinos empujan a sus vecinos, continuando así a través del material. Los átomos en sí no se mueven de una región del material a otra, pero la energía sí se propaga.

La mayor parte de los metales usan otro mecanismo más efectivo para conducir calor. Dentro del metal, algunos electrones pueden abandonar sus átomos padres y vagar por la red cristalina. Estos electrones “libres” pueden llevar energía rápidamente de las regiones más calientes del metal a las más frías. Es por ello que los metales que son buenos conductores de la electricidad generalmente son también buenos conductores del calor.

Sólo fluye calor entre regiones que están a diferentes temperaturas, y la dirección del flujo siempre es de la temperatura más alta, T_H, a la más baja, T_C. Si se transfiere una cantidad de calor dQ en un tiempo dt, la razón de flujo de calor, H, es dQ/dt, y se la llama *corriente de calor*. Introduciendo una constante de proporcionalidad k, llamada *conductividad térmica* del material, para una barra de longitud L y área transversal A, tenemos:

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \tag{1}$$

Para ello, la barra tendría que estar aislada de forma de no transferir calor por sus lados al medio circundante. Si la temperatura varía de manera no uniforme a lo largo de la varilla conductora, introduciendo una coordenada *x* a lo largo de la barra y generalizando el gradiente de temperatura como dT/dx, entonces la corriente de calor es:

$$H = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} \tag{2}$$

El signo negativo indica que el calor siempre fluye en la dirección de temperatura decreciente.

En este experimento estudiamos cómo es la distribución de temperaturas en una barra de acero que conduce calor de un extremo a otro y transfiere calor por convección con el ambiente a través de su superficie expuesta al aire.

Experimento

En primer lugar, colocamos un recipiente con agua hirviendo (100°C) en un extremo de una barra de acero, y dejamos el otro extremo libre. Colocamos un calentador eléctrico en el recipiente para mantener constantemente la ebullición. Dejamos que el sistema se estabilizara y con una termocupla previamente calibrada, medimos la temperatura de la barra de 40 cm de largo desde el recipiente hasta el extremo libre en intervalos de 1 cm. Para conseguir un mejor contacto, sujetamos la termocupla a la barra en cada punto con cinta adhesiva.

Luego repetimos el experimento, esta vez colocando en el segundo extremo un recipiente con agua con hielo (0°C). Volvimos a medir la temperatura con la termocupla de un extremo a otro esta vez con una separación L = 90 cm.

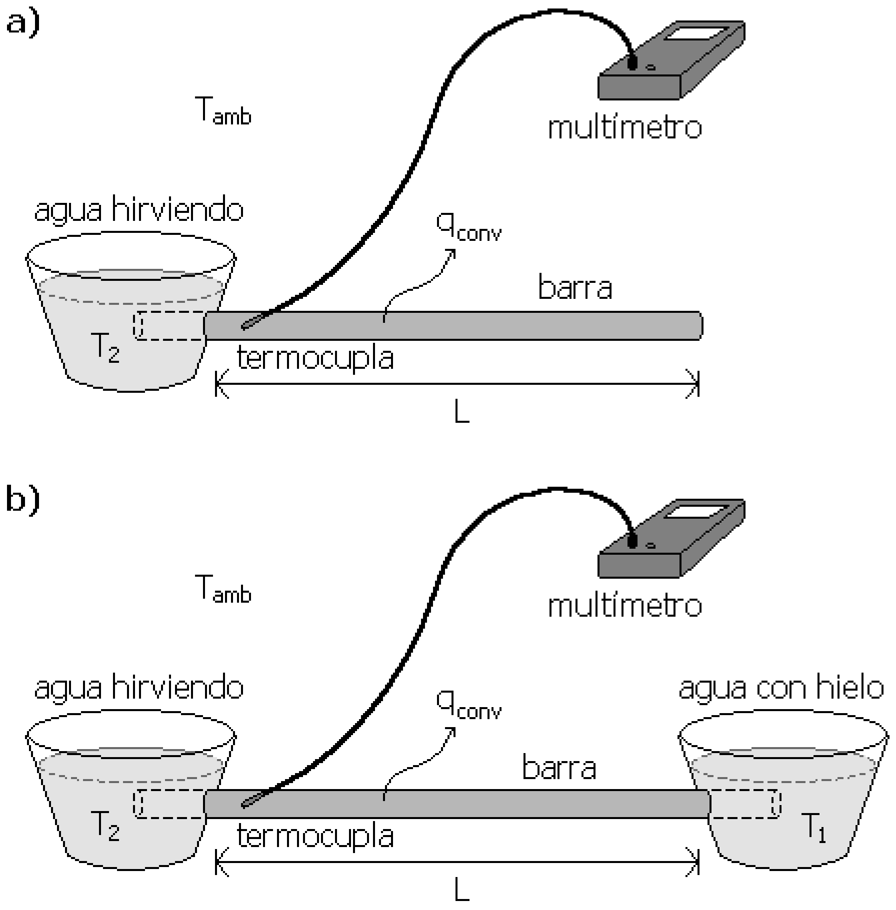

Figura 1. Diseño experimental para estudiar la distribución de temperaturas en una barra de longitud L. T_{amb} es la temperatura del ambiente. **a)** Un extremo de la barra está a una temperatura T_2 y conduce calor al extremo libre. **b)** Un extremo de la barra a temperatura T_2 conduce calor al extremo de la barra con temperatura T_1.

Resultados

Si consideramos una sección de la barra de grosor Δx (figura 2), según la primera ley de la termodinámica, la energía llevada a x es igual a la energía que se saca en $x + \Delta x$ más la energía extraída por convección.

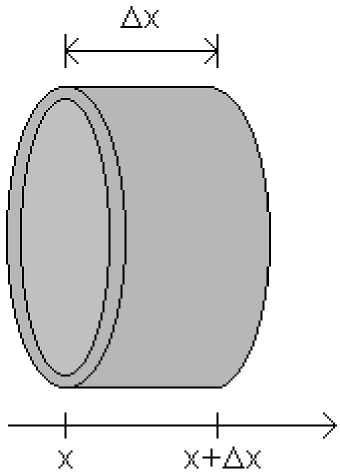

Figura 2. Sección transversal de la barra de acero (cubierta con una fina capa de cobre) de grosor Δx.

Suponiendo que el calor no varía en otra dirección que no sea x, los tres términos de calor a considerar son, respectivamente:

$$q\Big|_x = -kA\frac{dT}{dx}\Big|_x \,,\; q\Big|_{x+\Delta x} = -kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x+\Delta x} \,,\; q_{conv} = \bar{h}(2\pi r\Delta x)(T - T_{amb}) \quad (3)$$

donde r es el radio de la barra, $\bar{h}$ es el coeficiente de transferencia de calor en la convección y T_{amb} es la temperatura ambiente.

Cuando $\Delta x \to 0$, resulta una ecuación diferencial (ver apéndice), con distintas soluciones para las diferentes condiciones de contorno que tomamos en este experimento.

En el primer caso, donde un extremo de la barra se deja libre, la distribución de temperatura en diferencia con la temperatura ambiente, T_{amb}, es:

$$\theta(x) = T - T_{amb} = \theta_2 e^{-nx} \quad (4)$$

donde $\theta_2 = T_2 - T_{amb}$ y $n = \sqrt{\frac{2\bar{h}}{kr}}$.

En la figura 3 graficamos los datos experimentales junto con la curva que obtuvimos a partir de la ecuación (4). El valor de h lo obtuvimos experimentalmente a partir del mismo gráfico, aproximándolo con una función exponencial.

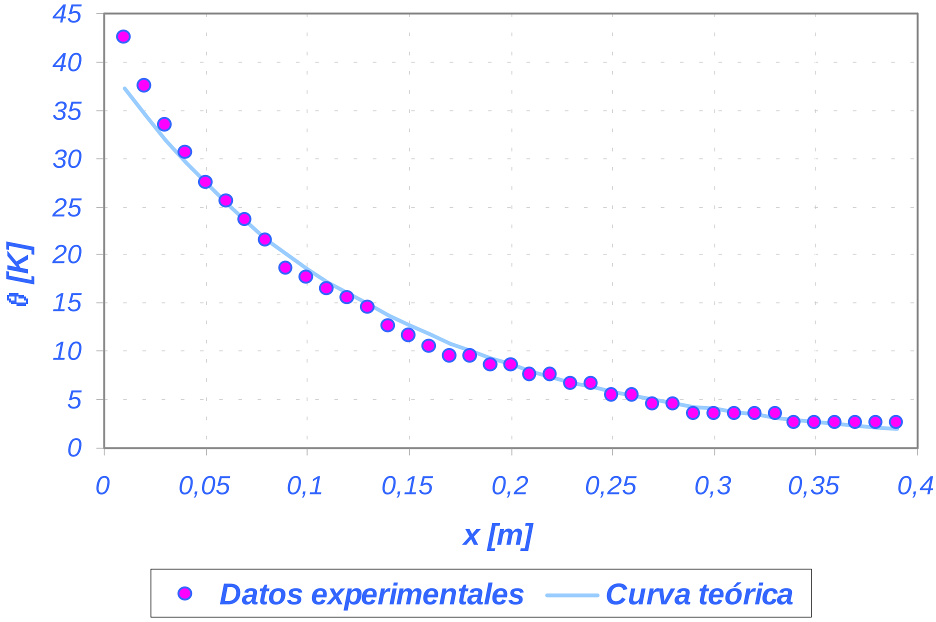

Figura 3. Distribución de la temperatura en una barra de acero con un extremo sujeto a un recipiente con agua hirviendo y el otro extremo libre.

Para la segunda parte del experimento, donde ambos extremos están sujetos a fuentes de calor constantes T_1 y T_2, la solución que obtuvimos es:

$$\theta(x) = T - T_{amb} = \frac{\theta_1 \mathrm{senh}[n(L-x)] + \theta_2 \mathrm{senh}(nx)}{\mathrm{senh}(nL)} \qquad (4)$$

donde $\theta_1 = T_1 - T_{amb}$ y $\theta_2 = T_2 - T_{amb}$.

Graficamos estos resultados en la figura 4, junto a los datos obtenidos experimentalmente. Usamos el valor de n hallado en el experimento anterior.

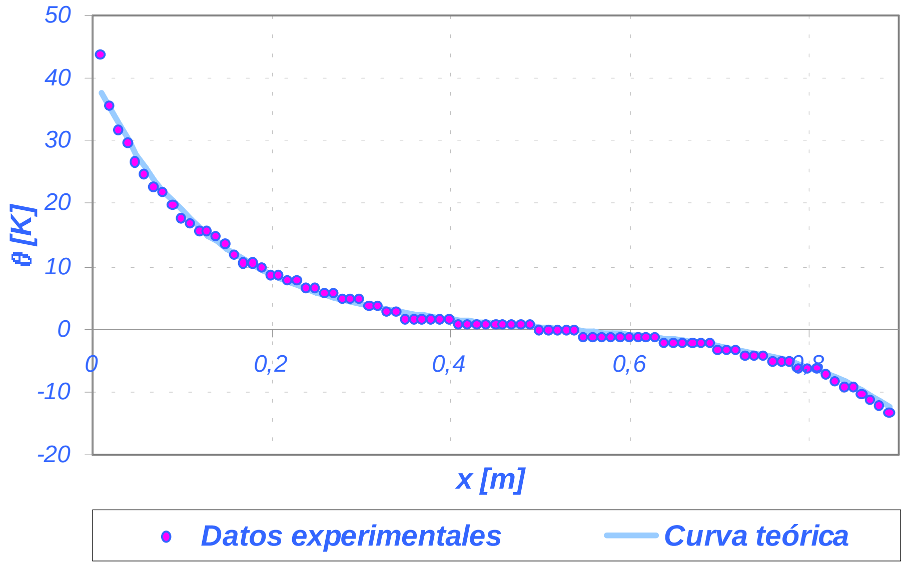

Figura 4. Distribución de la temperatura en una barra de acero con un extremo sujeto en un extremo a un recipiente con agua hirviendo y en el otro a un recipiente con agua con hielo.

Nótese que la barra entrega calor al aire por el lado “caliente” (región donde $T(x) > T_{amb}$) y toma calor del aire por el lado “frío” (región donde $T(x) < T_{amb}$).

Conclusiones

Cuando la barra está sometida en un extremo a una fuente caliente de temperatura constante y su otro extremo queda libre, la temperatura decrece exponencialmente con la distancia.

En cambio, cuando la barra tiene en un extremo una fuente caliente y en el otro una fuente fría, la temperatura se distribuye como una suma de exponenciales decrecientes y crecientes. El cambio se produce en un punto de la barra que no cambia su temperatura y queda siempre igualado a la temperatura del medio.

Referencias

1) Pitts, D. R., Sissom, L. E., *Transferencia de calor*, Series Schaum, McGraw-Hill, Bogotá, 1979.
2) Zemansky, M., *Calor y termodinámica*, Aguilar, Madrid, 1973.

Apéndice

En una sección de la barra de grosor Δx, según la ley de conservación de la energía se tiene:

$$-kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x} = -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+\Delta x} + \bar{h}(2\pi r\Delta x)(T - T_{amb}) \quad (1\ a)$$

donde k es la conductividad térmica, A es el área transversal, r es el radio, $\bar{h}$ es el coeficiente de transferencia de calor y T_{amb} es la temperatura ambiente.

Dividiendo por Δx y tomando el límite $\Delta x \to 0$ llegamos a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2\bar{h}}{kr}(T - T_{amb}) = 0 \qquad (2\ a)$$

Tomando $\theta = T - T_{amb}$ y $n = \sqrt{\frac{2\bar{h}}{kr}}$ se tiene:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - n^2\theta = 0 \qquad (3\ a)$$

La solución general de la ecuación (3 a) es:

$$\theta(x) = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} \qquad (4\ a)$$

Cuando la barra está sujeta en un extremo a una fuente con temperatura T_2 y su otro extremo está libre, las condiciones de contorno del problema son:

$$\theta(0) = T_2 - T_{amb} = \theta_2\ ,\quad k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = \bar{h}_L\theta(L) \qquad (5\ a)$$

donde h_L es el coeficiente de transferencia de calor en el extremo de la barra.

Consideramos que la barra es suficientemente larga, entonces $\theta(L) = T(L) - T_{amb} = 0$, es decir, en su extremo libre la barra alcanza la temperatura ambiente. Entonces la solución para este problema es:

$$\theta(x) = \theta_2 e^{-nx} \qquad (6\ a)$$

Cuando la barra tiene una fuente a temperatura T_2 en un extremo y una fuente con temperatura T_1 en su otro extremo, las condiciones de contorno son:

$$\theta(0) = T_2 - T_{amb} = \theta_2\ ,\quad \theta(L) = T_1 - T_{amb} = \theta_1 \qquad (7\ a)$$

La solución es:

$$\theta(x) = \frac{\theta_1 \mathrm{senh}[n(L-x)] + \theta_2 \mathrm{senh}(nx)}{\mathrm{senh}(nL)} \qquad (8\ a)$$

La barra que utilizamos en este experimento es de acero, cubierta con una fina capa de cobre. Sea A_A el área transversal del acero, A_C el área transversal del cobre, k_A la conductividad térmica del acero y k_C la conductividad térmica del cobre. Como $k_C A_C << k_A A_A$, tomamos la conductividad térmica k de la barra en el área transversal A como:

$$kA = k_A A = k_A A\pi r^2 \quad (9\ a)$$

Usamos k_A = 15 W/mK. El radio de la barra es r=0,45 cm. Obtuvimos h = 2 W/Km^2 y n = 7,7 1/m.