

Proceso estocástico
variable aleatoria $X(t)$

Ejemplo : canal que puede estar en
2 estados

$$X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Si el canal
está cerrado

Si el canal
está abierto

$X(t)$



t continuo
→ discreto

Amplificando en tiempo continuo
→ lo discretizamos

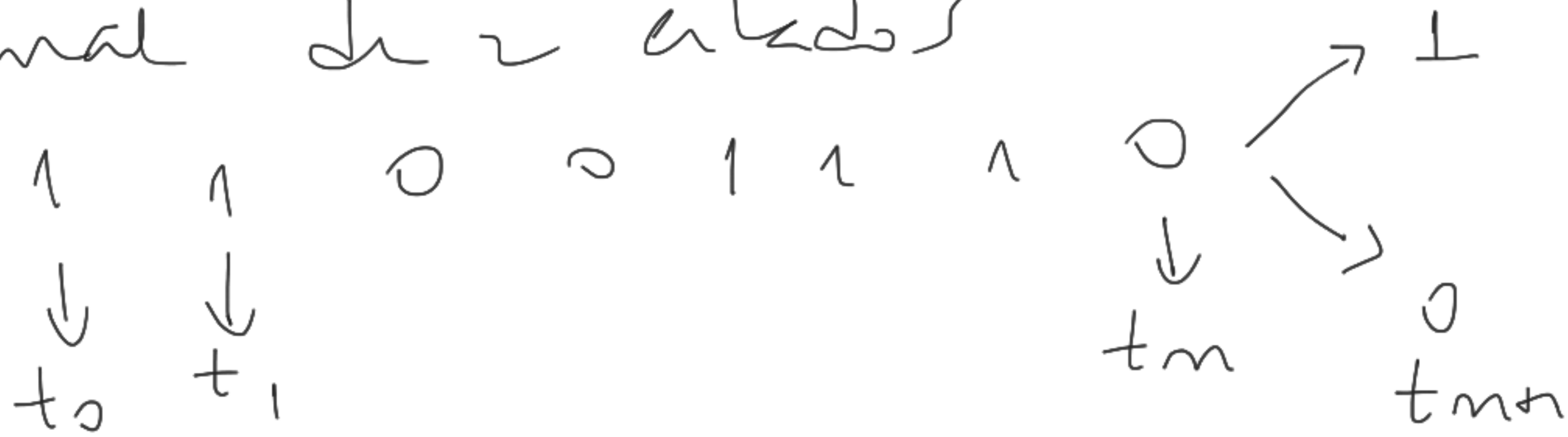
$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$$

Suponemos que X toma los valores

$$X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2) \dots X_n = X(t_n)$$

Cuál es la prob de que tome 1 de los
valores en el tiempo t_{n+1} permitidos

camal de 2 albedos



Prob de que sea 1 en t_m y que

sea 1 en t_0 , 1 en t_1 , ...

Proceso de momento work

(sin memoria) → prob de ir a 0 o a 1 en t_{m+1} solo depende del albedo en t_n

Y de los parámetros que están
la dinámica del problema.

Caso determinista

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \text{parámetros})$$

Procesos Sin memoria $\rightarrow$ Procesos
de Markov (Hidden Markov Models)

$P(x)$

Seas de 2 canales

$$P(X=1, t=t_{mh}) = \text{Prob de que } X=1 \text{ en } t=t_m \text{ y se quede en } X=1 \text{ al tiempo } t_{m+n}$$

$$+ \text{Prob de que } X=0 \text{ en } t=t_m \text{ y para } X=0 \text{ al tiempo } t_{m+n}$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) P(B)$$
$$=$$

$$P(X=1, t=t_{m+h}) = P(X=1, t_m) \cdot P(\text{no pate de 1 a 0 dado que es 1 en } t_m \text{ en } t_m)$$

$$+ P(X=0, t_m) \cdot P(\text{de 1 a 0 dado que es 0 en } t_m \text{ en } t_m)$$

$$t_{m+h} - t_m = dt \quad \begin{matrix} \text{Prob de ambos} \\ \rightarrow \text{Prob de transición} \end{matrix}$$

$$P(X=1, t=t_{n+1} / X=0, t=t_n) =$$

$$= \underbrace{P_{0 \rightarrow 1}(t_n)}_{\text{prob}} dt \quad \text{de transición por unidad de tiempo}$$

$$P(X=1, t=t_{n+1} / X=1, t=t_n)$$

$$= 1 - \underbrace{P_{1 \rightarrow 0}(t_n)}_{\text{prob}} dt \quad \text{de transición por unidad}$$

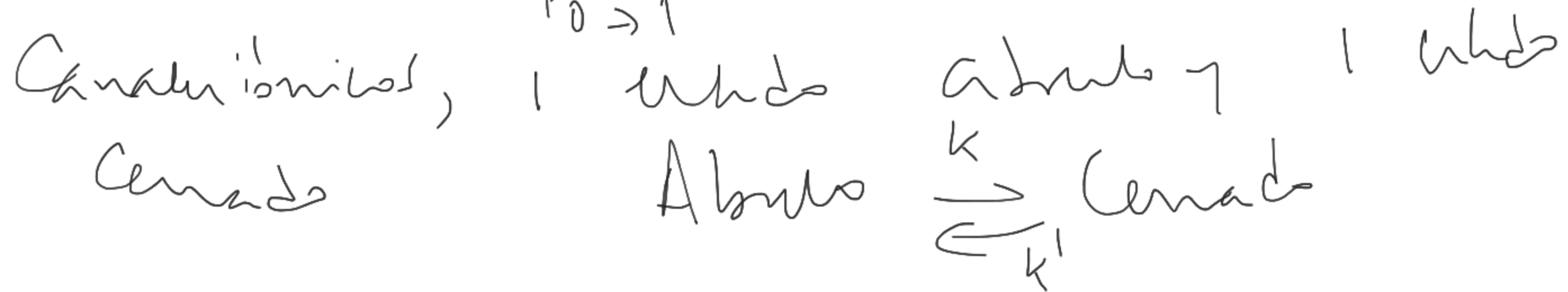
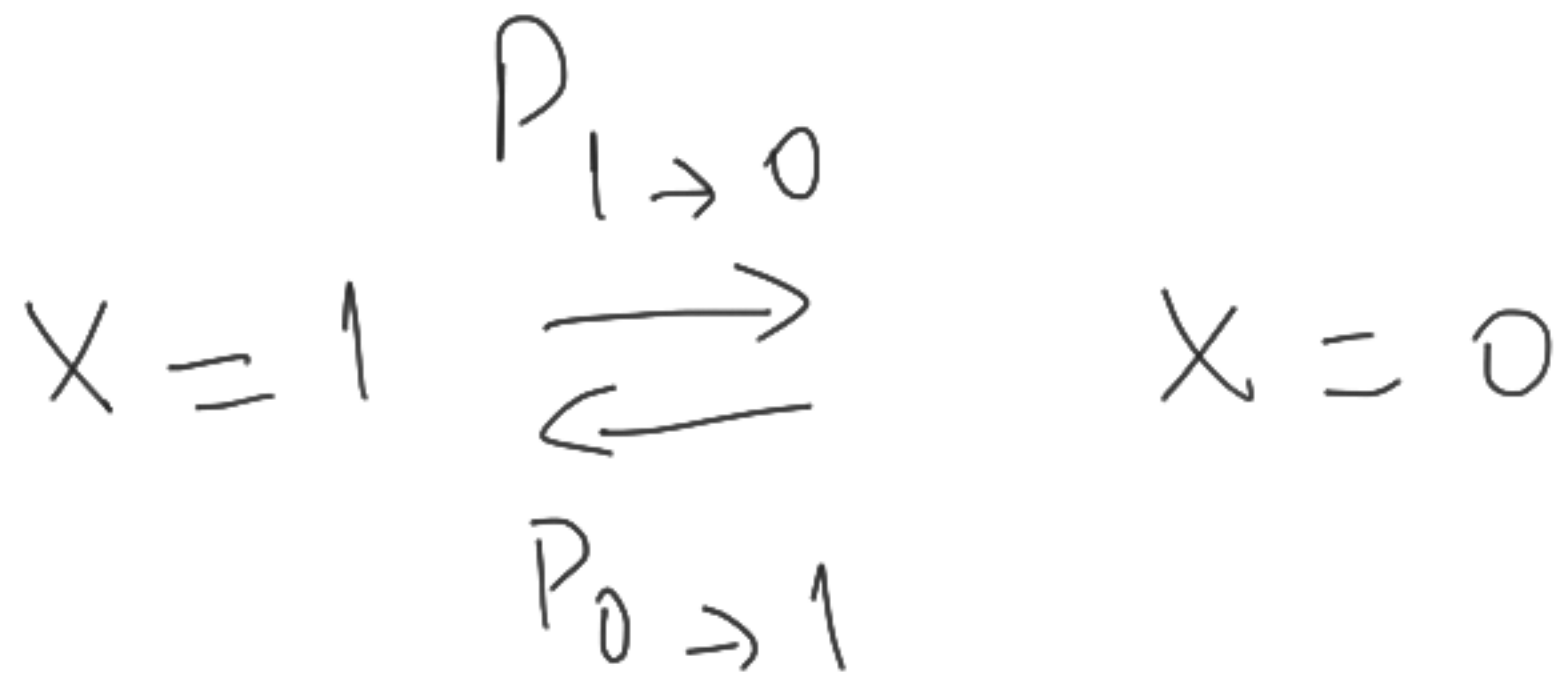
$$P(X=1, t=t_{n+1}) = P(X=1, t=t_n) \cdot \left(1 - P_{1 \rightarrow 0}(t_n) dt\right) \\ + P(X=0, t=t_n) P_{0 \rightarrow 1}(t_n) dt$$

$$P(X=1, t=t_{n+1}) - P(X=1, t=t_n)$$

$$= P(X=0, t=t_n) P_{0 \rightarrow 1} dt - P(X=1, t=t_n)$$

$$\cdot P_{1 \rightarrow 0} dt$$

$$\frac{dP(x=1, t)}{dt} = - P_{1 \rightarrow 0} P(x=1, t) + P_{0 \rightarrow 1} P(x=0, t)$$



$P(x=1, t)$ = prob de que la variable
aleatoria tome el
valor $x=1$ al tiempo t

$P(x=0, t)$ = prob de que tome $x=0$
al tiempo t

$$P(x=1, t) + P(x=0, t) < 1$$

$$P(x=0, t + \Delta t_n) = P(x=1, t = t_n) \cdot P_{1 \rightarrow 0} \Delta t$$

$$+ P(x=0, t = t_n) (1 - P_{0 \rightarrow 1} \Delta t)$$

$$P_{0 \rightarrow 1} = k_{01} \quad ; \quad P_{1 \rightarrow 0} = k_{10}$$

$$P_1(t) = P(x=1, t) \quad ; \quad P_0(t) = P(x=0, t)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = k_{01} P_0 - k_{10} P_1 \quad ; \quad \frac{dP_0}{dt} = -k_{01} P_0 + k_{10} P_1$$

$P_1 + P_0 = 1$ - i. Wähler in der Wahl
erwartung? $\rightarrow \frac{d}{dt} = 0$

$$\Rightarrow k_{01} P_0 = k_{10} P_1 = k_{10} (1 - P_0)$$

$$(k_{01} + k_{10}) P_0 = k_{10} \Rightarrow P_0 = \frac{k_{10}}{k_{01} + k_{10}}$$

$$P_0 = \frac{k_{10}}{k_{10} + k_{01}}$$

$$P_1 = \frac{k_{01}}{k_{10} + k_{01}}$$

Dos formas de obtener estas probabilidades
 Hacer muchos experimentos = realizarlos del mismo
 solo mirar a muchos canales a
 la vez $\rightarrow$ 1 mira a 1 ddo tiempo
 muchos canales tiene con $X=0$ y
 muchos tiene con $X=1$.

$$P_0(t) = \frac{\text{Número de Canales con } X=0 \text{ al tiempo } t}{\text{Número total de Canales}}$$

$$P_1(t) = \frac{\# \text{ canales con } X=1 \text{ al tiempo } t}{\# \text{ total}}$$

$$P_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} ; P_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{ en 1 caso cualquiera}$$

también se puede calcular en términos
del tiempo que permanece c/canal
en 1 de los estados

Veámoslo y calculemos al principio
 para una variable al tiempo de espera
~~manejada aleatoriamente~~
 tiempo en dado estado = variable
 continua $\rightarrow$ densidad de probabilidad

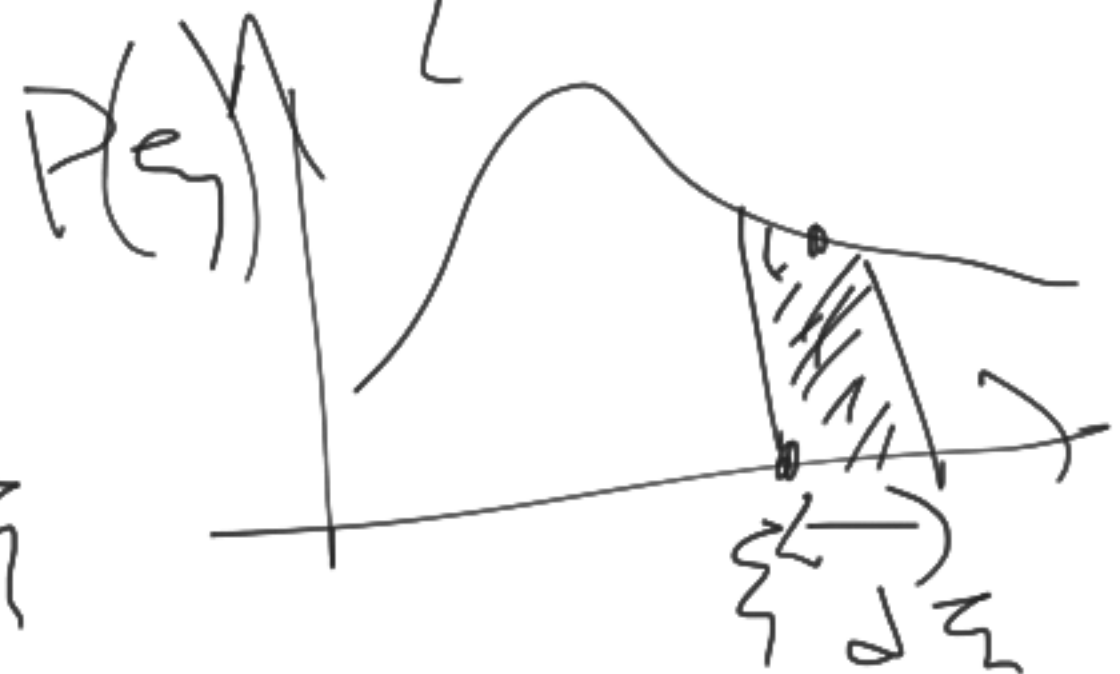
Dens prob para una variable
 aleatoria continua ξ tal que

$$[P(\xi)] = \frac{1}{[\xi]}$$

$$P(\xi) d\xi$$

= prob de que
 esté entre ξ y $\xi + d\xi$

la variable
 ξ y $\xi + d\xi$



ξ

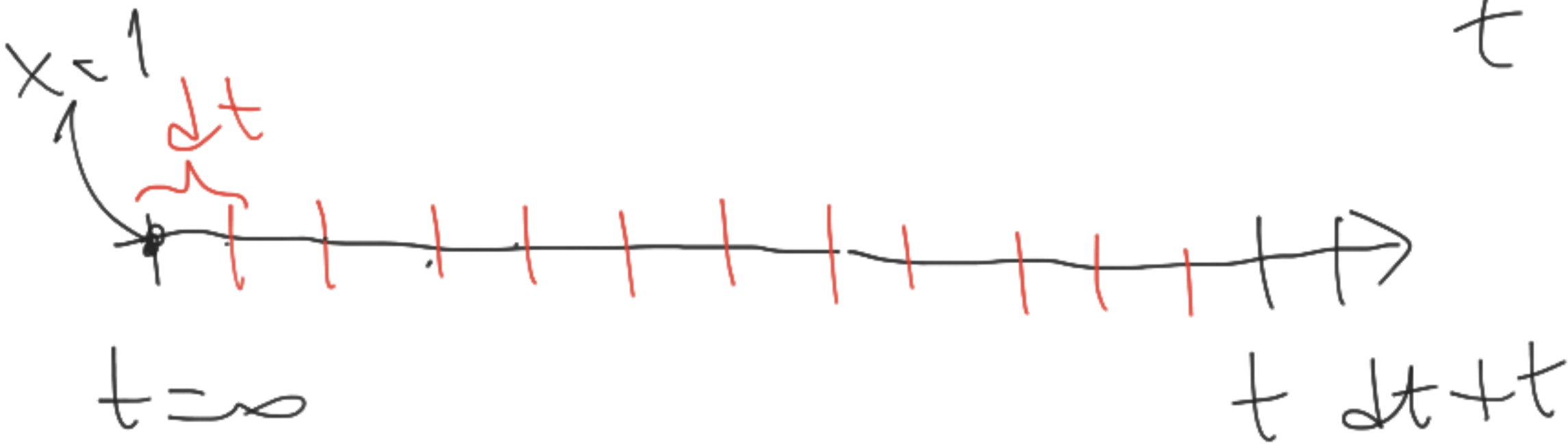
Suppose we have a system
 in the state $X=1$ at time $t=0$

Principle: what is the prob
 the system will be in the state
 $X=1$ during the time interval
 from time t to time $t+dt$

starting at $X=0$

$$t = N dt$$

prob
 of no transition



$$P(t=dt, X=1) = (1 - \lambda dt)$$

$$P(X=1, t=0; X=1, t=dt; X=1, t=2dt; \dots; X=1, t=Ndt) \\ = \text{Allt})$$

$$= (1 - k_{10} dt) (1 - k_{10} dt) \dots (1 - k_{10} dt)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{N \text{ fadoren}} \\ = (1 - k_{10} dt)^N = \left(1 - k_{10} \frac{t}{N}\right)^N \xrightarrow{N \text{ groß}} e^{-k_{10} t}$$

$$\dot{P}(X=i) = X=1, dt \dots X=1, Ndt \cdot X=0 (Nt) \\ = e^{-k_{10} t} \cdot k_{10} dt = \text{prob da hier an } X \text{ ein machende } dt \text{ von } t \text{ zu } t+dt$$

$P(t)dt = \text{prob de permanecer en el } X=1 \text{ un tiempo entre } t \text{ y } t+dt$

$$= e^{-k_{10}t} k_{10} dt$$

dens de prob del tiempo de permanencia en $X=1$

Analogamente permanencia en $X=0 \rightarrow e^{-k_{01}t} k_{01}$

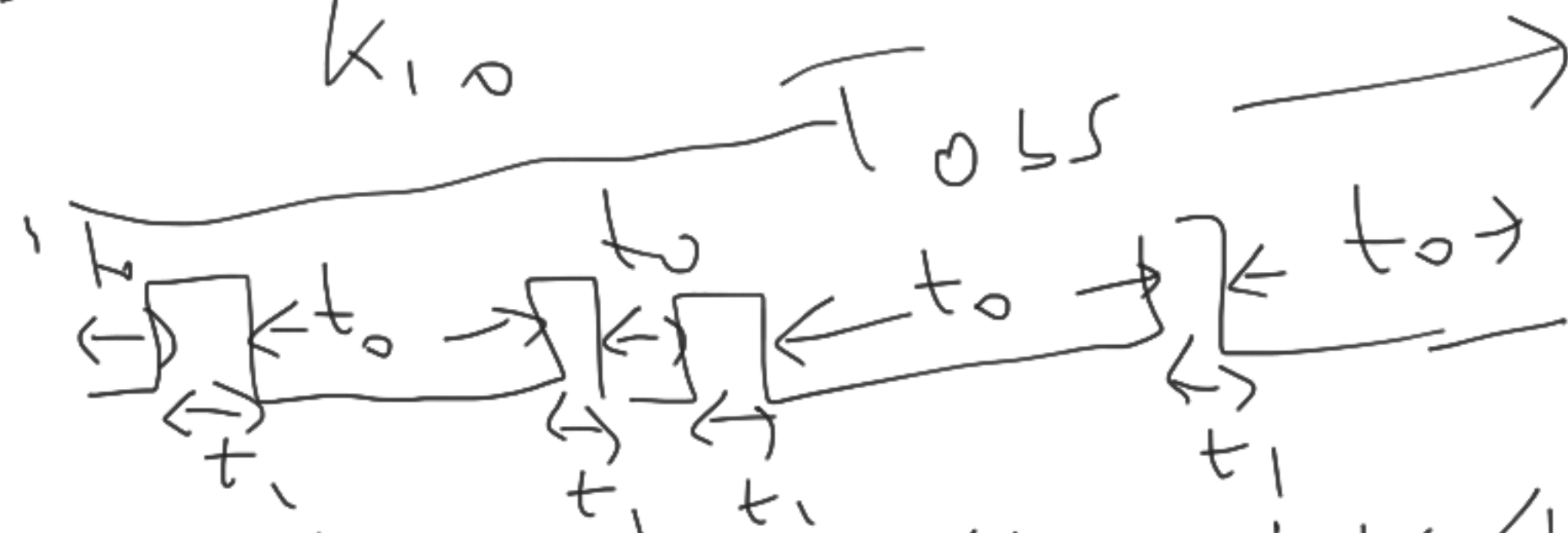
$t_1 = \text{time}$ de parâmetro
em segundos $X=1$

$$\langle t_1 \rangle = ?$$

$$\langle t_1 \rangle = \int_0^{\infty} t e^{-k_{10}t} k_{10} dt$$

$$= \frac{1}{k_{10}}$$

$$\langle t_0 \rangle = \frac{1}{k_{01}}$$



$$T_{obs} = \sum t_{0i} + \sum t_{1i} = N_{inicial} \langle t_0 \rangle + N_{nu} \langle t_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \sum t_{ii} \approx N_{\text{intervals}} < t_1 >$$

$$\frac{\sum t_{ii}}{T_{\text{obs}}} \approx \frac{N_{\text{intervals}} < t_1 >}{N_{\text{intervals}} < t_0 > + N_{\text{int}} < t_1 >}$$

$$\approx \frac{< t_1 >}{< t_0 > + < t_1 >} = \frac{1/k_{10}}{\frac{1}{k_{01}} + \frac{1}{k_{10}}}$$

$$\approx \frac{k_{01} k_{10} / k_{10}}{k_{10} + k_{01}} = \frac{k_{01}}{k_{10} + k_{01}} = p_1$$

