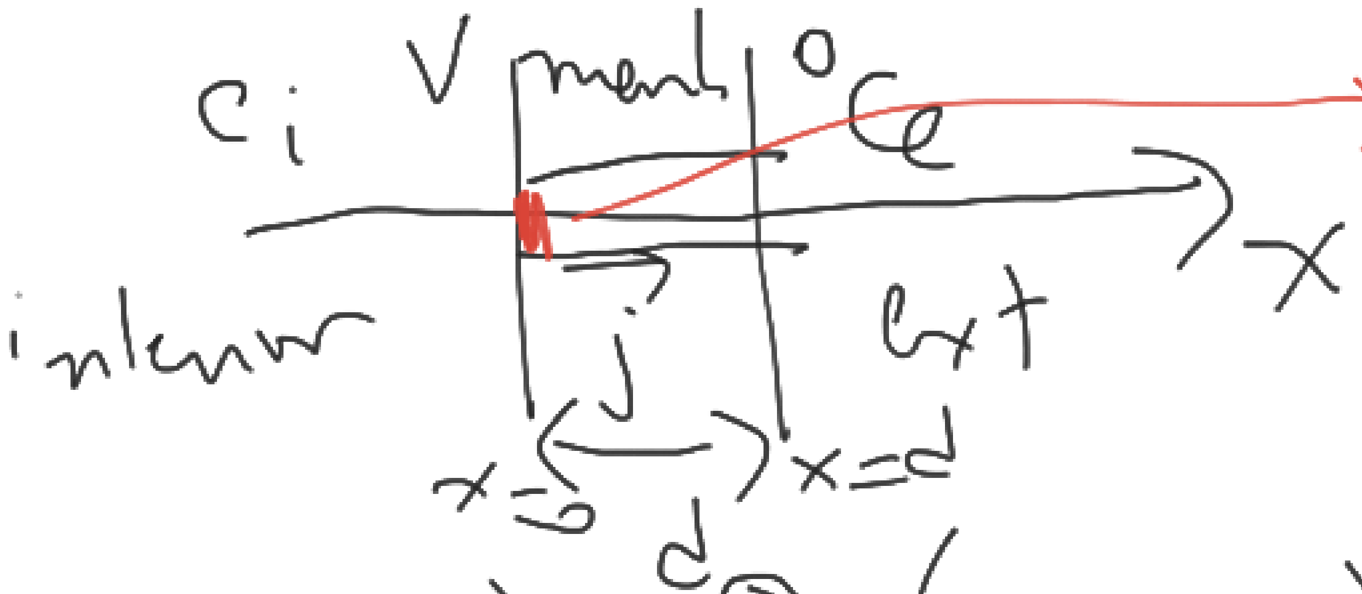


A = área transversal del agujero

$\vec{E}=0$; $\vec{J} = \frac{D}{d}(c_i - c_e)\,\hat{x}$

$\frac{D}{d} \rightarrow$ permeabilidad

$\vec{E} = E\hat{x} = -\frac{d\phi}{dx}\hat{x} = \frac{V}{d}$; $V =$ pot membrana $= \phi(x=0) - \phi(x=d)$

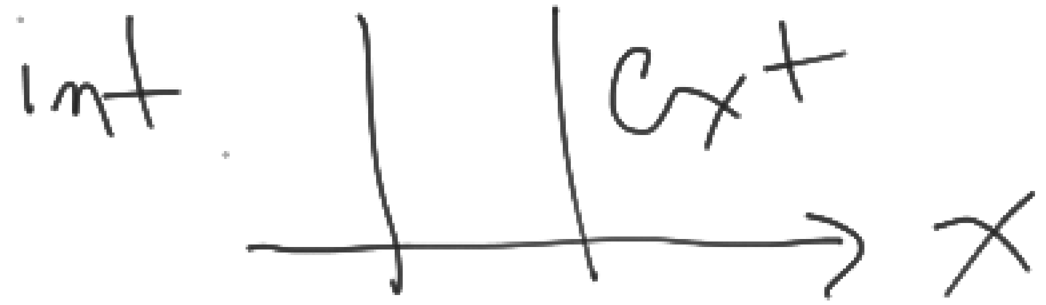
GHK

$$j = \frac{D}{d}\,\frac{zFV}{RT}\left(\frac{c_i - c_e\, e^{-zFV/RT}}{1 - e^{-zFV/RT}}\right)$$

; ze = carga de 1 partícula ; $z \rightarrow$ valencia

jA = # de moles que atraviesan A por unidad de tiempo

I = corriente eléctrica $= zFjA$; $F \rightarrow$ const Faraday



$j>0 \longrightarrow \vec{V}$

$j>0$ y $z>0 \rightarrow jzFA>0 \xrightarrow[I>0]{}$

$j<0$ y $z<0 \rightarrow jzFA>0 \xrightarrow[I>0]{}$

$j<0$; $z>0 \rightarrow I<0 \quad \xleftarrow{I}$

$j>0$; $z<0 \rightarrow I<0 \quad \xleftarrow{I}$

$j\,(\text{GHK}) = 0 \Leftrightarrow V = \frac{RT}{zF}\ln\left(\frac{c_e}{c_i}\right)$ = pot de equilib de Nernst para la espec que func

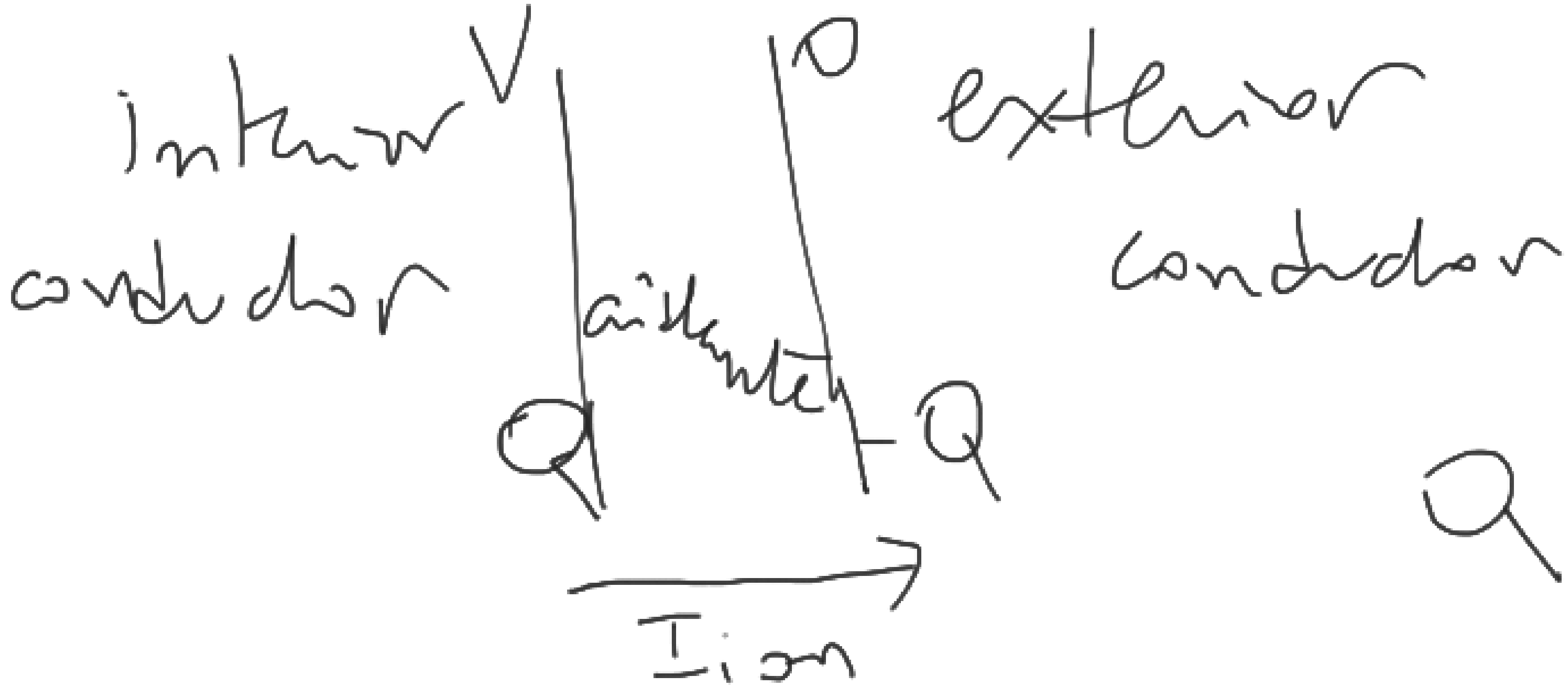
En muchas situaciones en lugar de esta expresión se usa una expresión que es "lineal" con V

$$I_{ion} = g_{ion}(V - V_{eq\,ion})$$

g_{ion} → conductancia del ion

Muchas veces I se da por unidad de área

Cuando 1 corriente eléctrica atraviesa la membrana → varía el pot de membrana V



; C = capacidad de la membrana

$$Q = CV$$

$$\frac{dQ}{dt} = -I_{ion} = C\frac{dV}{dt}$$

Muchos iones

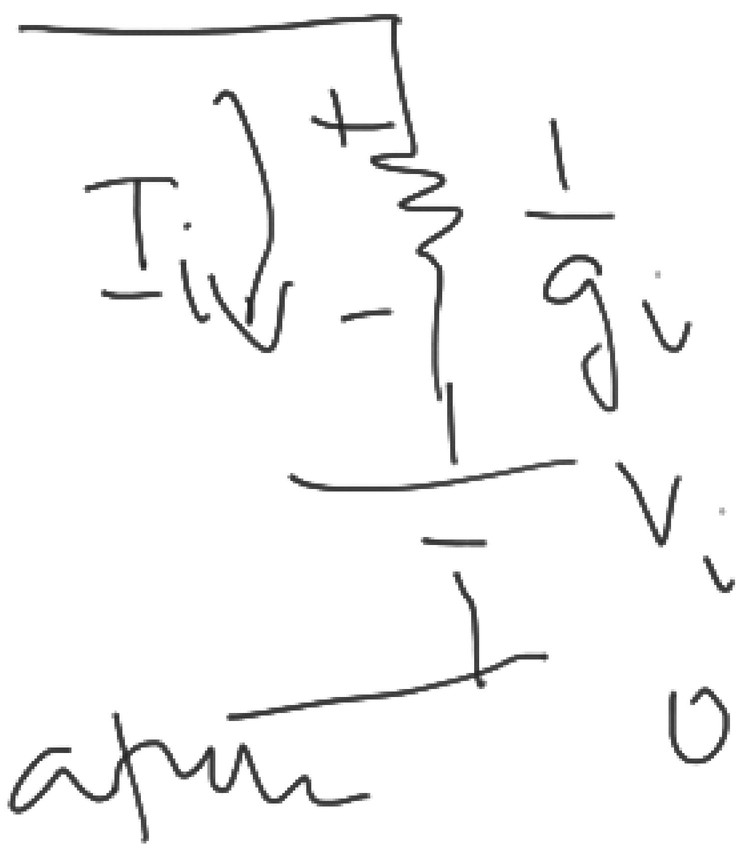
$$C\frac{dV}{dt} = \sum_{\text{iones}} I_{\text{tipo de ion}}$$

Usando modelo lineal para I ion

$$I_i = g_i(V - V_i)$$ → pot de equilibrio para ion i-ésimo

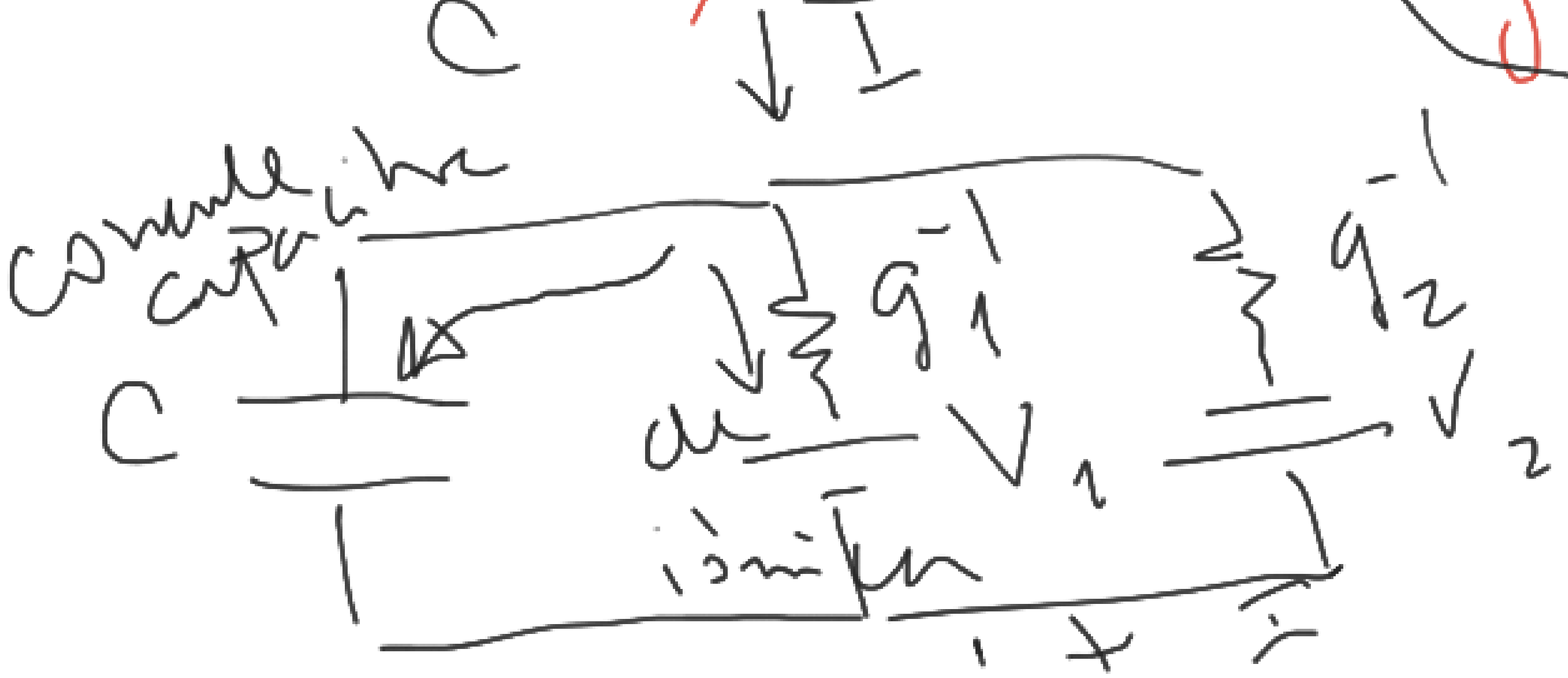
$$C\frac{dV}{dt} = -\sum g_i(V - V_i)$$

adentro V



$$V = \frac{Q}{C}$$

$$V = \frac{I_i}{g_i} + V_i$$



El agua también atraviesa la membrana

Ecuación de conservación de la masa o de continuidad para 1 especie que solo transporta con velocidad $\vec{v}$

n = # de moléculas de la especie por unidad / volumen

1D espacial; x

$$m_{\text{molécula}}\frac{\partial n}{\partial t} + m_{\text{molécula}}\vec{\nabla}\cdot(\overbrace{n\vec{v}}^{\vec{J}}) = 0 \; ; \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n v_x) = 0$$

$\rho = n\, m_{\text{molécula}}$ = densidad de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$$

Agua → "conservación" del momento lineal

Momento lineal → $m\vec{v}$ N moléculas → $\rho\vec{v}$

si todas las moléculas se mueven con $\vec{v}$

en 1 peq volumen

Navier Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = -\vec{\nabla}p + \underset{\text{viscosidad}}{\mu}\nabla^2\vec{v} \quad (+\rho\vec{g})$$

Agua → $\rho = \text{const}$ y unif

→ incompresible

$$0 + \rho\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}}_{=0} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla} f = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

término tiene tamaño $\sim \dfrac{\rho|\vec{v}|^2}{\ell}$, lo podemos comparar

con $\mu|\nabla^2\vec{v}|$, tiene tamaño $\sim \dfrac{\mu|\vec{v}|}{\ell^2}$

$$\frac{\rho|\vec{v}|^{\cancel{2}}\,\ell^{\cancel{2}}}{\cancel{\ell}\,\mu\cancel{|\vec{v}|}} = R$$

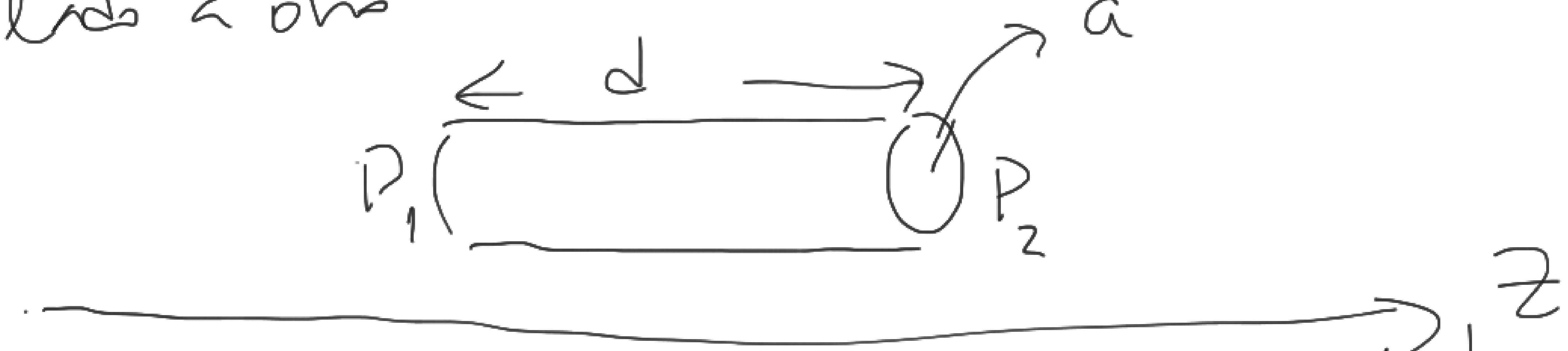
$R << 1 \rightarrow$ flujos laminares (número de Reynolds bajo)

Puedo despreciar término cuadrático en la ec N-S

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$R >> 1 \rightarrow$ no puedo despreciar término cuadrático $\rightarrow$ flujos turbulentos

Volvamos a nuestra situac. laminar y consideremos 1 agujero cilíndrico de radio a, por el que pasa agua de 1 lado a otro



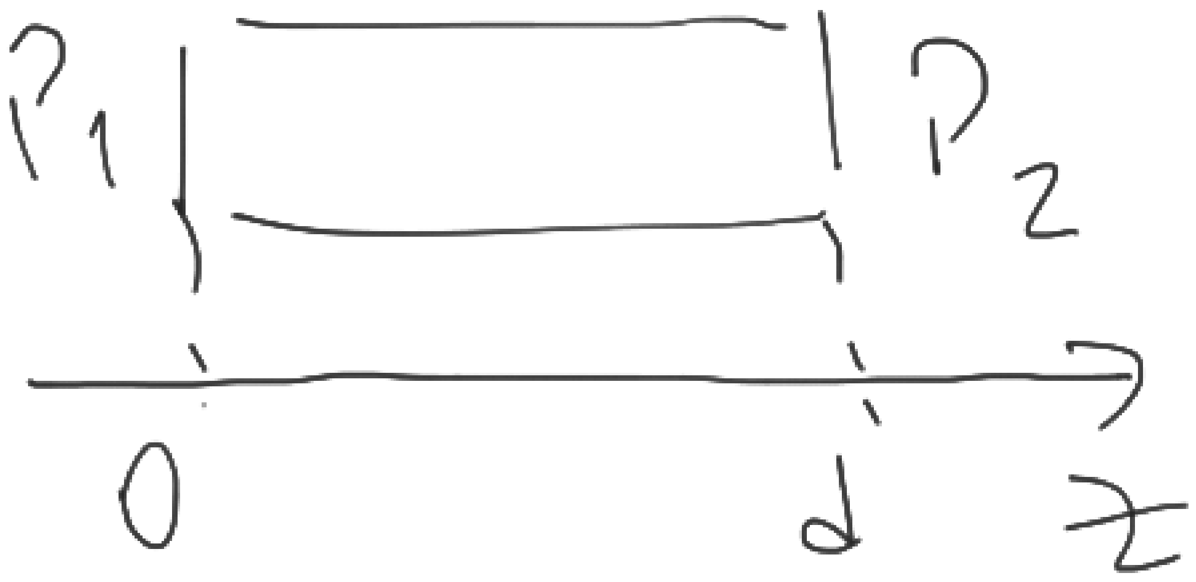
Vamos a buscar la solución estacionaria de la ec N-S en este caso suponiendo $\vec{v} = v\hat{z}$; flujo $\rho\vec{v}$ = Cantidad de masa que viaja por el cilindro por unidad de área y tiempo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow v_z = v_z(r)$$

$$v_z(r=a) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\boxed{0 = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t}} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \Rightarrow \mu \nabla^2 v_z = \frac{P_2 - P_1}{d}$$



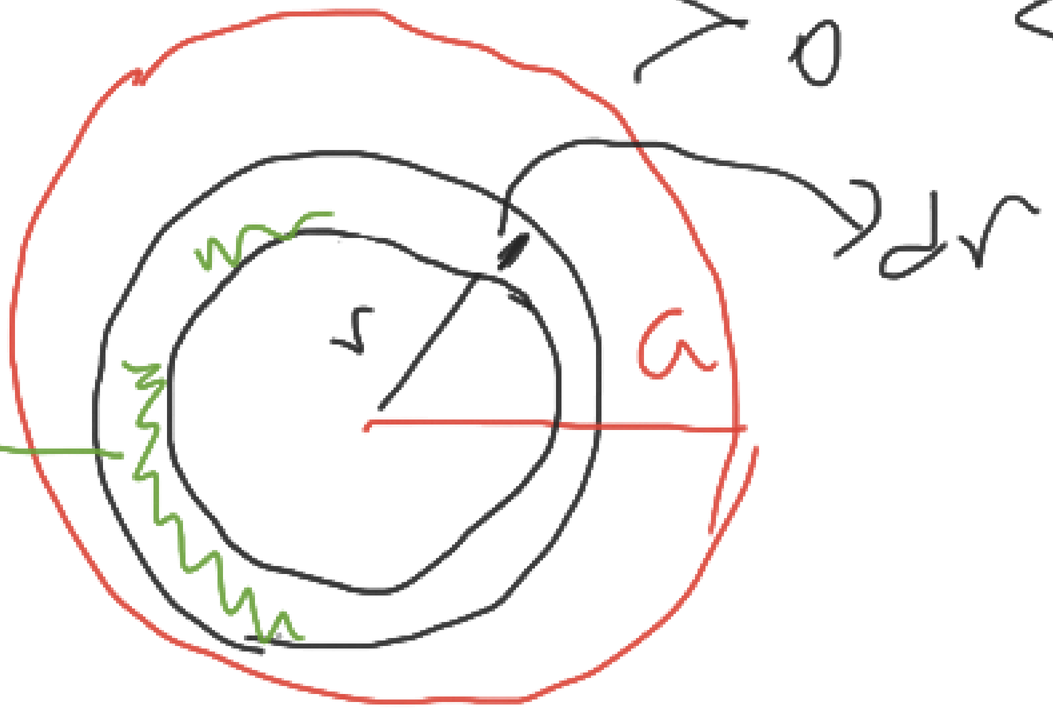
$$\frac{dp}{dz} = \frac{P_2 - P_1}{d}$$

$$\nabla^2 v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)$$

Con $v_z(r=a)=0$

$$v_z = v(r) = \underbrace{\frac{(P_2-P_1)}{4\mu d}\underbrace{\left(r^2-a^2\right)}_{<0}}_{>0 \text{ si } P_2<P_1} \qquad 0\le r\le a$$

$\rho v =$ flujo



$\pi(r+dr)^2-\pi r^2 \cong 2\pi r\,dr$

$$\int_0^a \rho v\, 2\pi r\, dr$$

$$\frac{[\text{Masa}]}{[\text{tiempo}]} = \left[\int_0^a \rho v \, 2\pi r \, dr\right] = - \frac{a^4 \pi \rho (P_2 - P_1)}{8 \mu d}$$

$$[\rho] = \frac{[\text{masa}]}{\text{volumen}}$$

$$Q = - \frac{a^4 \pi (P_2 - P_1)}{8 \mu d} = \text{caudal}$$

$$[Q] = \frac{[\text{volumen}]}{\text{tiempo}}$$

flujo de Poiseuille

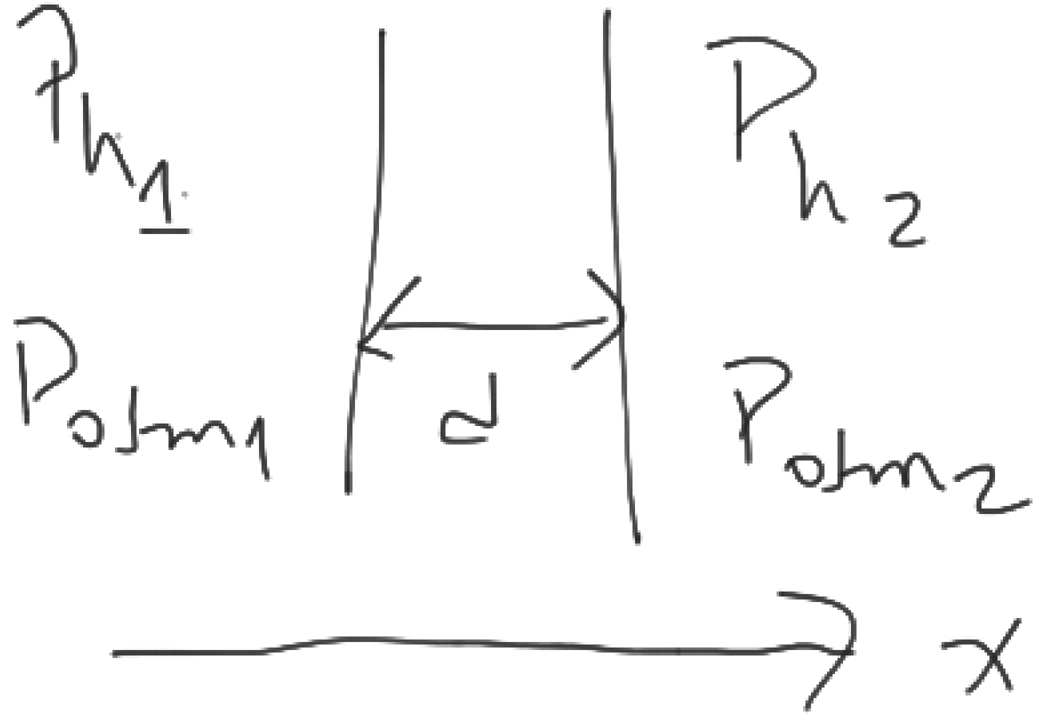
$$r Q = P_1 - P_2$$

r resistencia al flujo de agua

$$r \propto d \, a^{-4}$$

Onsager

Ósmosis



$$rQ = \left(P_{h_1} - P_{osm_1} - \left(P_{h_2} - P_{osm_2}\right)\right)$$

$$P_{osm} = [\text{soluto}]\, RT = \frac{N_{\text{moles soluto}}}{V} RT$$

Si $P_{h_1} = P_{h_2}$

$$\rightarrow \quad rQ = P_{osm_2} - P_{osm_1}$$