Física Biológica

Sistemas Dinámicos.

Sistemas dinámicos en 1 dimensión. Puntos fijos y estabilidad.

1. Analizar las siguientes ecuaciones diferenciales gráficamente. Clasificar todos los puntos fijos usando el criterio de estabilidad lineal o gráficamente si el criterio falla porque x^* es un punto fijo pero $f'(x^*) = 0$. Graficar cualitativamente $x(t)$ para diferentes condiciones iniciales.

   a) $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$

   b) $\dot{x} = x^2(6-x)$

   c) $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

Sistemas dinámicos lineales en 2 dimensiones

2. Considerar el siguiente sistema: $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 2x + y$.

   a) *Optativo:* Escribir el sistema en forma matricial: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Encontrar el polinomio característico del sistema, los autovalores y autovectores de A.

   b) Dar la solución general del sistema.

   c) Clasificar el punto fijo del origen.

   d) Resolver el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

3. Considerar el siguiente sistema: $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x + y$.

   a) *Optativo:* Escribir el sistema en forma matricial: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y mostrar que los autovalores son $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$ con autovectores $\mathbf{v_1} = (i, 1)$ y $\mathbf{v_2} = (-i, 1)$. Notar que los autovalores son complejos conjugados, así como los autovectores. Esto siempre es así cuando A tiene coeficientes reales y autovalores complejos.

   b) Dar una solución general al sistema, expresando $x(t)$ en términos de funciones reales. *Ayuda*: Usar que $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)$

   c) Graficar algunas trayectorias en el espacio de fases.

4. Graficar trayectorias en el espacio de fases y clasificar el punto fijo del origen para cada uno de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales, mostrarlos en el gráfico

a) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2x - 3y$

b) $\dot{x} = 5x + 10y$, $\dot{y} = -x - y$

c) $\dot{x} = 3x - 4y$, $\dot{y} = x - y$

d) $\dot{x} = -3x + 2y$, $\dot{y} = x - 2y$

5. Resolver el siguiente sistema lineal (o sea, dar $x(t)$ e $y(t)$):

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y \\ \dot{y} &= x + \mu y \end{cases}$$

¿Cómo son las trayectorias para $\mu < 0$ y $\mu > 0$?

Bifurcaciones sencillas.

6. Analizar los puntos fijos de los siguientes sistemas dinámicos en función de los valores (positivos y negativos) del parámetro μ. Graficar la posición de los puntos fijos para los diferentes valores del parámetro μ (*diagrama de bifurcaciones*). Mostrar que el número de puntos fijos y su estabilidad cambia para un determinado valor de μ.

a) bifurcación saddle-node $\dot{x} = \mu - x^2$

b) bifurcación tridente $\dot{x} = \mu x - x^3$

c) bifurcación de Hopf $\dot{r} = \mu r - r^3$, $\dot{\theta} = 1$ (con r una variable radial y θ angular).

Sistemas dinámicos no lineales en 2 dimensiones

7. Considerar el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{r} = f(r), \quad \dot{\theta} = \frac{4\pi}{r} + 1 \quad \text{(esto último para } r > 0\text{)},$$

donde r es una variable radial, θ una variable angular y

$$f(r) = \begin{cases} -r + \frac{r^2}{r_c}, & 0 \leq r \leq r_c, \\ r - r_c - \frac{(r-r_c)^2}{1-r_c}, & r_c < r < 1, \\ 1 - r, & r \geq 1. \end{cases}$$

Encontrar sus puntos fijos y órbitas periódicas (con r constante). Diga si son estables o inestables. Graficar algunas trayectorias en el espacio de fases.

8. Calcular los puntos fijos del siguiente sistema para $0 < \delta < \sqrt{8}$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y \end{cases}$$

y clasificarlos en estables o inestables y en este último caso diga si se trata de puntos de ensilladura. Para ello tendrá que linealizar las ecuaciones alrededor de cada punto fijo y analizar cómo se comportan esas ecuaciones lineales. Esto se determina calculando los autovalores del problema o, equivalentemente, escribiendo la ecuación diferencial que debe satisfacer $u \equiv x - x_f$, donde x_f es el valor de x en el punto fijo, proponiendo soluciones del tipo $\exp(\lambda t)$ y determinando los valores que puede tomar λ. Dependiendo de si los valores de λ son reales o complejos y del signo de su parte real el punto fijo será estable o inestable y, en este último caso, punto de ensilladura o "repulsor". *Para hacer numéricamente*: Realizar un retrato de fases para distintos parámetros. ¿Que sucede con el retrato de fases para $\delta > \sqrt{8}$? (ver `https://colab.research.google.com/drive/1e695qd6sjRX4b_mMFJ9p1idKc2zq13XB?usp=sharing`)

9. Considere el modelo de Gray-Scott:

$$\frac{du}{dt} \equiv \dot{u} = -uv^2 + A(1-u),$$
$$\frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} = uv^2 - Bv + F,$$

que describe la evolución temporal de las concentraciones $u \equiv [U]$ y $v \equiv [V]$ de dos reactivos que reaccionan de acuerdo a $U + 2V \to 3V$, $V \to P$ (con P un producto inerte) y donde las especies U y V son inyectadas y removidas de la región donde ocurre la reacción.

Para hacer numéricamente (ver `https://colab.research.google.com/drive/1e695qd6sjRX4b_mMFJ9p1idKc2zq13XB?usp=sharing`): Estudiar los comportamientos del sistema para los siguientes conjuntos de valores de parámetros explorando distintas condiciones iniciales.

a) Excitabilidad: $A = 0{,}02$, $B = 0{,}07$, $F = 0$;
b) Bifurcación de saddle-node: $B = 0{,}2$, $F = 0$ y $A = \{0{,}158, 0{,}159, 0{,}1598, 0{,}160, 0{,}162\}$;
c) Hopf supercrítica: $B = 0{,}025$, $F = 0$ y $A = \{0{,}00426, 0{,}00437, 0{,}0045\}$.
d) Homoclínica: $B = 0{,}025$, $F = 0$ y $A = \{0{,}00429, 0{,}00426, 0{,}00425748, 0{,}00425745\}$

Mapas como sistema dinámico

10. La evolución temporal de los sistemas dinámicos puede describirse para todo instante (considerando al tiempo como una variable continua) o puede considerarse el estado del sistema sólo en un conjunto discreto de instantes, $t_0, t_1, ..., t_n, ...$. En este caso la evolución se describe en términos de un mapa. Por ejemplo, si x_n describe el estado del sistema en el instante t_n, la descripción de la evolución consiste en prescribir el mapa (o función) f_n tal que $x_{n+1} = f_n(x_n)$. Esta forma de describir la evolución se utiliza mucho en el caso de dinámica de poblaciones, donde el significado que se da es el de prescribir el número de individuos de una especie en una dada generación $(n+1)$ como función del número de individuos en la generación anterior (n). Un caso muy estudiado es el del mapa logístico: $x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n)$, donde $0 \leq x_n \leq 1$ y μ es un parámetro $(0 < \mu \leq 1)$.

Para hacer numéricamente: Analizar el comportamiento de este mapa para $0{,}75 \leq \mu \leq 1$. (Para más información, puede consultar el trabajo clásico de Robert May, Nature **261**, p. 459 (1976). El notebook disponible acá: `https://github.com/ipython-books/cookbook-2nd-code/blob/master/chapter12_deterministic/01_bifurcation.ipynb` tiene alguna versión de este famoso mapa.)