Ondas planas en la interface entre dos dieléctricos

Al incidir una onda plana descripta por $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\Re(\exp(j(\mathbf{k}.\mathbf{x} - wt))$ $(k/w = \sqrt{\epsilon\mu})$ en una superficie plana caracterizada por la normal al plano $\mathbf{n}$ que separa dos medios dieléctricos the permitividades ϵ, μ para el primero y $\epsilon_2 = \epsilon_2, \mu_2 = \mu_2$ para el segundo, se deben respetar las ecuaciones de Maxwell.

Recordemos que $\mathbf{E}.\mathbf{k} = 0$ (ausencia de cargas libres), $\mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/w$

Designaremos con $\mathbf{E}, \mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}$ a los campos incidente, reflejado y transmitido respectivamente.

Estas toman el caracter de cuatro leyes de continuidad

1. Continuidad de la dirección normal al plano del campo de desplazamiento (ausencia de cargas libres)

$$\epsilon(\mathbf{E} + \mathbf{E_1}).\mathbf{n} = \epsilon_\mathbf{2}\mathbf{E_2}.\mathbf{n}$$

2. Continuidad de la componente normal del campo magnético (no hay cargas magnéticas)

$$(\mathbf{B} + \mathbf{B_1}).\mathbf{n} = \mathbf{B_2}.\mathbf{n}$$

3. Continuidad de la componente tangencial al plano de separación de los dieléctricos del campo eléctrico (ausencia de corrientes magnéticas)

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E_1}) \times \mathbf{n} = \mathbf{E_2} \times \mathbf{n}$$

4. Continuidad de la componente tangencial del campo magnetizante $\mathbf{H}$

$$(1/\mu)(\mathbf{k} \times \mathbf{E} + \mathbf{k_1} \times \mathbf{E_1}) \times \mathbf{n} = (1/\mu_2)(\mathbf{k_2} \times \mathbf{E_2}) \times \mathbf{n}$$

La dependencia de los campos magnéticos y eléctricos respecto del tiempo obliga a buscar que todos ellos sean de igual frecuencia.

La dependencia de los campos eléctricos y magnéticos de la fase $\mathbf{k}.\mathbf{x}$ obliga a que sobre el plano de separación esta fase tome igual valor para cada una de las tres ondas (incidente, reflejada y transmitida) y por lo tanto la componente paralela al plano del vector de onda debe ser igual en los tres casos.

Esta es la ley de Snell

$$i = r \tag{1}$$
$$k\sin(i) = k_2\sin(t) \tag{2}$$

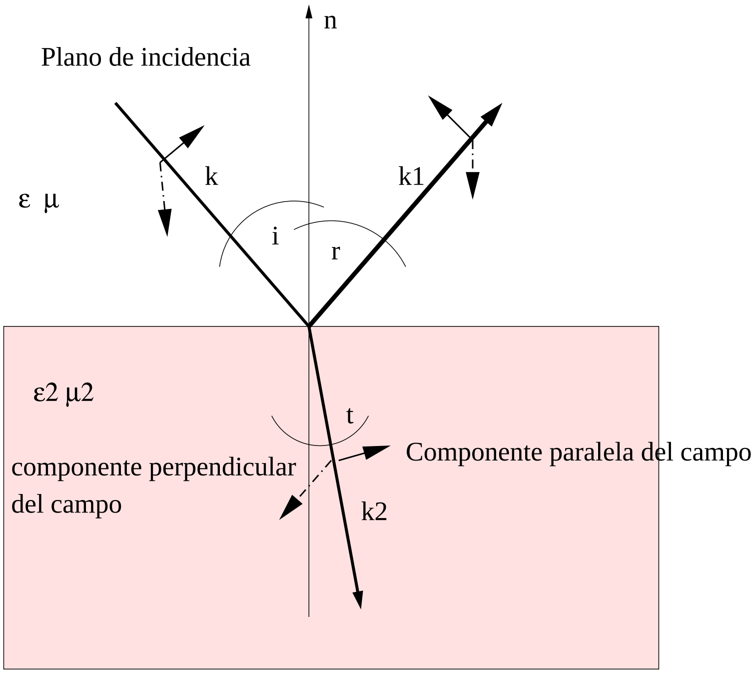

Figura 1: Esquema de las ondas incidente, reflejada y transmitida

donde i, r, t son los ángulos de incidencia, reflexion y refracción según se indica en la Figura 1

El análisis de las amplitudes se realiza mejor considerando primero una onda polarizada con el campo eléctrico en el plano de incidencia y luego una onda polarizada en la dirección normal al plano de incidencia.

A partir de aquí los símbolso $\mathbf{E_0}, \mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}$ *representan solo la amplitud de los campos eléctricos y* $\mathbf{B_0}, \mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}$ *la amplitud de los campos magnéticos.*

1. Campo eléctrico polarizado en el plano de incidencia

En este caso tenemos las relaciones geométricas

$$\mathbf{E_0}.\mathbf{n} = E_0 \sin(i) \tag{3}$$
$$\mathbf{E_1}.\mathbf{n} = E_1 \sin(r) \tag{4}$$
$$\mathbf{E_2}.\mathbf{n} = E_2 \sin(t) \tag{5}$$
$$\mathbf{E_0} \times \mathbf{n} = E_0 \cos(i) \tag{6}$$
$$\mathbf{E_1} \times \mathbf{n} = -E_1 \cos(r) \tag{7}$$
$$\mathbf{E_2} \times \mathbf{n} = E_2 \cos(t) \tag{8}$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}).\mathbf{n} = 0 \tag{9}$$

Notar el signo negativo en la relación (6)que se debe a la orintacion relativa entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{n}$ (imaginar un vector rotando hacia el otro, y ver que el sentido de rotación es opuesto en el primer caso).

Las condiciones a cumplir se reducen ahora a:

1. $\epsilon(E_0 + E_1)\sin(i) = \epsilon_2 E_2 \sin(t)$
2. Se cumple identicamente
3. $(E_0 - E_1)\cos(i) = E_2 \cos(t)$
4. $(k/\mu)(E_0 + E_1) = E_2(k_2/\mu)$

La última de las cuales surge porque los vectores $\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ son normales a $\mathbf{n}$ y estan todos orientados en la misma dirección.

La primera y la última de estas relaciones son muy parecidas, haciendo el cociente termino a término suponiendo que las amplitudes de los campos no son cero surge la relación:

$$\epsilon\mu/k \sin(i) = \epsilon_2\mu/k_2 \sin(t)$$

recordando que $(k/w) = \sqrt{\epsilon\mu}$ tenemos que la expresión es

$$(k/w^2)\sin(i) = (k_2/w^2)\sin(t)$$

que no es más que la ley de Snell. Por lo tanto solo nos interesan las relaciones (1) y (3) de donde surge

$$E_1/E_0 = \frac{\epsilon_2 \cos(i)\sin(t) - \epsilon \cos(t)\sin(i)}{\epsilon_2 \cos(i)\sin(t) + \epsilon \cos(t)\sin(i)} \tag{10}$$

$$E_2/E_0 = \frac{2\epsilon \cos(i)\sin(i)}{\epsilon_2 \cos(i)\sin(t) + \epsilon \cos(t)\sin(i)} \tag{11}$$

(estas relaciones no son la única forma de expresar la relación ya que el ángulo t está relacionado con i de acuerdo a la fórnula de Snell).

El ángulo de Brewster corresponde a la tener reflexion nula en el plano de incidencia y se obtiene de (10) y la relación de Snell.

2. Campo eléctrico polarizado normal al plano de incidencia

En este caso tenemos las relaciones geométricas

$$\mathbf{B_0}.\mathbf{n} = B_0 \sin(i) \tag{12}$$

$$\mathbf{B_1}.\mathbf{n} = B_1 \sin(r) \tag{13}$$

$$\mathbf{B_2}.\mathbf{n} = B_2 \sin(t) \tag{14}$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n} = B_0 \cos(i) \tag{15}$$
$$\mathbf{B_1} \times \mathbf{n} = -B_1 \cos(r) \tag{16}$$
$$\mathbf{B_2} \times \mathbf{n} = B_2 \cos(t) \tag{17}$$
$$(\mathbf{k} \times \mathbf{B}).\mathbf{n} = 0 \tag{18}$$

Notar el signo negativo en la relación (16) que se debe a la orintacion relativa entre **B** y **n** (imaginar un vector rotando hacia el otro, y ver que el sentido de rotación es opuesto en el primer caso).

Las condiciones a cumplir se reducen ahora a:

1. Se cumple identicamente
2. $k(E_0 + E_1)\sin(i) = k_2 E_2 \sin(t)$
3. $(E_0 + E_1) = E_2$
4. $(k/\mu)(E_0 - E_1)\cos(i) = E_2(k_2/\mu)\cos(t)$

La segunda y la tercera de estas relaciones son muy parecidas ya que aplicando a la segunda la ley de Snell se obtiene la tercera, es decir que no hay nada nuevo en la segunda,

Por lo tanto solo nos interesan las relaciones (3) y (4) de donde surge

$$E_1/E_0 = \frac{\sqrt{(\epsilon/\mu)}\cos(i) - \sqrt{(\epsilon_2/\mu_2)}\cos(t)}{\sqrt{(\epsilon/\mu)}\cos(i) + \sqrt{(\epsilon_2/\mu_2)}\cos(t)} \tag{19}$$
$$E_2/E_0 = \frac{\sqrt{(\epsilon/\mu)}cos(i)}{\sqrt{(\epsilon/\mu)}\cos(i) + \sqrt{(\epsilon_2/\mu_2)}\cos(t)} \tag{20}$$

(estas relaciones no son la única forma de expresar la relación ya que el ángulo t está relacionado con i de acuerdo a la fórnula de Snell).

Una relación semejante parece surgir de (19), pero en este caso la transmision es cero en la dirección perpendicular.