Física Contemporánea I

Ecuaciones de Hamilton, Espacio de fases.

1. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para

   a. Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Utilizar coordenadas cartesianas.

   b. Una partícula en un potencial central $U(r)$

   En a., resuelva las ecuaciones. En b. halle constantes de movimiento. Particularizando en b. a $U(r) = -k/r$, discuta las órbitas posibles. En los dos casos construya los diagramas de fases correspondientes.

2. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y en coordenadas *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. Es el hamiltoniano la energía total?.

4. Considere un oscilador armónico unidimensional:

   Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.

5. Considere un péndulo físico constituído por una barra de longitud l, que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.

   a. Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos\psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.

   b. Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.

6. Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.

7. Considere una partícula con hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + l^2/2mq^2$

   Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.

8. Una partícula que se mueve en una sola dimensión está sometida a un potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} k(x-a)^2 & x > a \\ \frac{V_0}{a}(a-|x|) & |x| < a \\ k(x+a)^2 & x < -a \end{cases}$$

   Dibuje el diagrama de fases indicando: i) en cuántas regiones queda dividido el espacio de fases, ii) cuál es la ecuación que define a la curva separatriz, iii) cómo son los posibles movimientos.

9. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador tridimensional isótropo en *cilíndricas* y en *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

10. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:

    a. un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad).

    b. una máquina de Atwood, con polea *sin masa* y con polea de masa M y radio R.

11. Se tiene un sistema de dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{\text{cm}} + H_{\text{rel}}$

$$H_{\text{cm}} = \frac{P_{\text{cm}}^2}{2M} \qquad\qquad H_{\text{rel}} = \frac{p_{\text{rel}}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

    donde: $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, L es el momento angular total y p_{rel} es el momento canónicamente conjugado de r.

12. Considere una partícula sometida a un potencial $V(q) = U\text{tg}^2(\alpha q)$, U, α constantes positivas. Halle el hamiltoniano y plantee las ecuaciones de Hamilton. Construya el correspondiente diagrama de fases.

13. Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$$

    Resuelva el problema resolviendo las ecuaciones de Hamilton.

14. Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z, L_z es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.