MECANICA CLASICA

Pequeñas oscilaciones.

1. Obtener los modos normales de oscilación para la molécula de CO_2, interpretando físicamente cada uno de ellos. Escriba la solución general. Hallar las coordenadas normales utilizando argumentos de simetría.

2. La molécula de CsOH es lineal en equilibrio. Cuando la molécula vibra aparecen 3 tipos diferentes de interacciones.

   a. $V_{\mathrm{CsO}} = 4\epsilon[(\frac{\sigma}{r})^{12} - (\frac{\sigma}{r})^{6}]$ donde ϵ y σ son constantes y r es la distancia entre los 2 átomos.

   b. Una interacción análoga O–H pero 15 veces más débil.

   c. Una interacción elástica de curvatura entre las uniones Cs–O y O–H con potencial $V = \frac{1}{2}kl^2(\pi - \alpha)^2$.

   Hallar: el lagrangiano de la molécula, teniendo en cuenta las 3 interacciones simultáneamente, las frecuencias características de oscilación y los modos normales correspondientes. Dibujar éstos y explicar en detalle los movimientos de la molécula para cada uno. *Sugerencia: compare los pesos atómicos.*

3. Halle las frecuencias propias, modos y coordenadas normales de un sistema que consta de dos cilindros huecos de masa m y radios r y $2r$ respectivamente, que están colocados uno dentro de otro y apoyados dentro de una superficie cilíndrica de radio $6r$. Todas las superficies ruedan sin deslizar entre sí. Hay gravedad.

4. Determinar las frecuencias de oscilación de un sistema de dos osciladores idénticos de frecuencia ω acoplados por una interacción $-axy$.

5. Dadas tres masas n, M, m, enhebradas en un anillo fijo de radio a, unidas por resortes (no enhebrados en el anillo) de constantes elásticas k y longitud en reposo l_0, hallar el lagrangiano y determinar las frecuencias y modos normales de oscilación. Repetir el problema en el caso en que $M = m$.

6. Resuelva completamente usando el formalismo de pequeñas oscilaciones, algunos problemas de la guía de ecuaciones de Lagrange.

7. Sea un sistema formado por cuatro masas idénticas enhebradas en un aro fijo de radio a que interactúan a través de resortes, también idénticos de cte. k y longitud en reposo l_0. Obtenga las frecuencias y modos normales de oscilación. Obtenga las coordenadas normales. Si llama z_2 a la coordenada normal correspondiente a la frecuencia no nula y no degenerada, escriba la solución para las siguientes condiciones iniciales:

$z_1 = z_3 = z_4 = 0$, $z_2 = b$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z}_4 = 0$ en función de las coordenadas generalizadas originales.

8. Considere un péndulo esférico de masa m sostenido por una varilla elástica caracterizada por una constante "del resorte" k.

   E ncuentre el hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de movimiento

N aturalmente habrá encontrado que un momento es constante, digamos P_ϕ y que el ángulo ϕ no aparece en ecuación alguna. Restrinja entonces el estudio a las otras dos coordenadas y momentos conjugados y halle los puntos de equilibrio de este sistema reducido en función de P_ϕ

   R ealice un estudio de las pequeñas oscilaciones del problema reducido (exprséelo en forma lagrangiana si le hiciera falta) indicando las frecuencias de oscilación, y los modos propios de oscilación.

   I nterprete el resultado en términos del problemas original.

9. Un sólido rígido consiste en un prisma de sección triangular (triángulo equilátero para ser precisos), de sección S y longitud (2A). Por el centro de una de las caras triangulares emerge una varilla de longitud R (y masa despreciable) y de la punta de ésta pende una bola de masa M (que a los efectos de este problema la consideraremos una masa puntual) conformando un péndulo de longitud L.

El sólido rígido está sostenido por el centro de masas con un mecanismo que a los fines del problema es irrelevante, pero que permite rotaciones libres alrededor de cualquier eje.

   C ómo son los momentos de inercia del sólido rígido y '? cuáles sus correspondientes ejes principales?.

   C uantos grados de libertad tiene el sistema?

   C uales son las simetrías geométricas?

   P roponga un sistema de coordenadas generalizadas para describir el sistema.

   C uál es el lagrangiano ?

   C uáles son las simetrías del Lagrangiano ? (son las mismas que las simetrías geométricas?)

   C uales son las constantes de movimiento ? (Use el teorema de Noether si fuera necesario).

   A parentemente el sistema tiene un equilibrio estable con la varilla apuntando en la misma dirección que la gravedad y el péndulo en su posición de reposo.

Aproxime el Lagrangiano muy cerca de la posición de equilibrio aprovechando que tanto el péndulo como el prisma están en posición casi vertical. (*Sugerencia: Por lo general es suficiente guardar hasta el segundo orden en velocidades y ángulos de desplazamiento respecto de la vertical en la aproximación del Lagrangiano, pero guarde órdenes más altos si esto implica que desaparecen términos en velocidades generalizadas al cuadrado.*)

D iscuta el resultado anterior.

10*. Indique cuántas frecuencias nulas tiene una molécula no simétrica y describa los modos normales asociados.

11*. Indique cuántas frecuencias no nulas tiene una molécula no simétrica.