Coordenadas cilíndricas y esféricas

2 de abril de 2015

Coordenadas cilíndricas

Consideremos un vector que indica la posición desde el origen en coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x, y, z)$. En el plano xy consideramos el módulo del vector $r = ||(x, y, 0)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el ángulo ϕ que forma con el eje $\hat{x}$. Usando la definición de seno y coseno, tenemos

$$(x, y, 0) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), 0) \tag{1}$$

Establecemos entonces dos direcciones nuevas, la dirección de los incrementos en r, y a dirección de los incrementos en ϕ. Matemáticamente esto corresponde a derivar $\mathbf{x}$ con respecto a r y a ϕ

$$\begin{aligned} \hat{r} &= (\cos(\phi), \sin(\phi), 0) \\ r\hat{\phi} &= r(-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) \end{aligned}$$

La definición de $\hat{\phi}$ la hemos hecho de tal forma que $||\hat{\phi}|| = 1$ como pueden verificar inmediatamente. $||\hat{r}|| = 1$ se verifica también y, adicionalmente, los productos escalares $\hat{r}\hat{\phi} = \hat{r}\hat{z} = \hat{\phi}\hat{z} = 0$, donde $\hat{z}$ es la dirección de los incrementos en z, $\hat{z} = (0, 0, 1)$. Decimos que $\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}$ forman una terna ortogonal. Finalmente se tiene que $(\hat{r} \times \hat{\phi})\hat{z} = 1$ es decir que así ordenados la terna es derecha.

La expresión de la velocidad y la aceleración se torna casi trivial desde este enfoque. Derivar respecto del tiempo e identificar (o proyectar usando los versores). La velocidad es:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

La aceleración resulta:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = & \tfrac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + (r\tfrac{d^2\phi}{dt^2} + \tfrac{dr}{dt}\tfrac{d\phi}{dt})\hat{\phi} + \tfrac{d^2z}{dt^2}\hat{z} + \\ & \tfrac{dr}{dt}\tfrac{d\theta}{dt}\hat{\phi} - r(\tfrac{d\phi}{dt})^2\hat{r} \end{aligned}$$

que agrupando es

$$\tfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = (\tfrac{d^2r}{dt^2} - r(\tfrac{d\phi}{dt})^2\hat{r} + (r\tfrac{d^2\phi}{dt^2} + 2\tfrac{dr}{dt}\tfrac{d\phi}{dt})\hat{\phi} + \tfrac{d^2z}{dt^2}\hat{z}$$

Coordenadas esféricas

Seguimos el mismo procedimiento. Después de una construcción geométrica que por ahora la debo (un gráfico) escribimos $\mathbf{x} = \rho(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$ y verificamos que $||\mathbf{x}|| = \rho$. Al igual que con las coordenadas cilíndricas definimos tres direcciones según los incrementos de cada una de las coordenadas generalizadas ρ, θ y ϕ , es decir derivamos:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)\\ \hat{\theta} &= (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, -\sin\theta)\\ \sin\theta\hat{\phi} &= (-\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\sin\theta, 0) = \sin\theta(-\sin\phi, \cos\phi, 0)\end{aligned}$$

verificando como antes que los vectores son unitarios y las tres direcciones son ortogonales. La terna resultante es derecha (verificar).

La velocidad se escribe ahora como$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \rho\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}$. El proceso de construcción de la terna deja esta expresión servida. Las aceleraciones se construyen o bien derivando una segunda vez más la expresión cartesiana e identificando o proyectando. O de lo contrario, se encuentra la derivada de los versores, que de paso debe ser perpendicular a ellos.

Velocidad

Derivamos el vector posición respecto al tiempo, usamos la notación $\frac{da}{dt} \equiv \dot{a}$ y $\frac{d^2a}{dt^2} \equiv \ddot{a}$para cualquier a.

La posición es $\mathbf{x} = \rho\hat{r}$, luego

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\rho}\hat{r} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \rho\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

para hallar la aceleración habrá que derivar los otros versores de dirección ($\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$). Hagamos eso primero.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\hat{r} + \cos(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}\\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}(\cos(\theta)\hat{\theta} + \sin(\theta)\hat{r})\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{gathered}\tfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\rho}\hat{r} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + ((\dot{\rho}\sin(\theta) + \rho\dot{\theta}\cos(\theta))\dot{\phi}) + \rho\sin(\theta)\ddot{\phi})\hat{\phi} +\\ \dot{\rho}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}) + (\rho\dot{\theta})(-\dot{\theta}\hat{r} + \cos(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}) -\\ (\rho\sin(\theta)\dot{\phi})(\dot{\phi}(\cos(\theta)\hat{\theta} + \sin(\theta)\hat{r})\end{gathered}$$

Lo cual agrupado por direcciones termina siendo:

$$\begin{gathered}\tfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \hat{r}(\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2 - \rho\sin^2(\theta)(\dot{\phi})^2 +\\ \hat{\theta}(\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\sin(\theta)\cos(\theta)(\dot{\phi})^2) +\\ \hat{\phi}(2\dot{\rho}\sin(\theta)\dot{\phi} + 2\rho\dot{\theta}\cos(\theta)\dot{\phi} + \rho\sin(\theta)\ddot{\phi})\end{gathered}$$