MECANICA CLASICA

Ecuaciones de Newton. Fuerzas de vínculo. Leyes de conservación. Coordenadas curvilíneas.

1. Dos masas m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida. Se coloca la barra sobre una superficie horizontal sin rozamiento tal que la masa m_1 la toque pero no la m_2. Si se la deja en libertad, donde golpea m_2 a la superficie?

2. Una partícula está sometida a una fuerza $F(x) = -kx + \frac{a}{x^3}$.

   a. Hallar el potencial $U(x)$. Discutir los tipos de movimiento posibles. Hallar las posiciones de equilibrio estable y encontrar la solución general $x(t)$.

   b. Interpretar el movimiento en el límite $E^2 \gg ka$.

   c. Cuánto vale el período de las oscilaciones?

3. Hallar el vector velocidad y el vector aceleración en coordenadas polares y esféricas. (es muy conveniente visualizar a partir de gráficos, además de efectuar el cálculo analítico).

4. Un disco homogéneo de masa M y radio R está girando con velocidad angular ω. Una mosca de masa m que inicialmente se encuentra en el centro del disco camina radialmente hacia afuera con velocidad relativa constante.

   a. Si el disco es obligado a girar con velocidad relativa constante por un motor, qué torque debe hacer éste para compensar el movimiento de la mosca? Cuál es la fuerza de Coriolis que siente la mosca?

   b. Si el disco gira libremente, cuál será la velocidad angular del disco cuando la mosca está a una distancia d del centro?

5. Un disco homogéneo de masa m y radio r rueda sin deslizar sobre un plano, inclinado un ángulo α respecto de la horizontal.

   a. Halle su aceleración angular y la aceleración lineal de su centro.

   b. Si en $t = 0$ el disco estaba en reposo a una altura h del suelo, cuál es su velocidad angular y lineal al llegar a éste?

   c. Qué magnitudes se conservan en el movimiento del disco?

6. Dos partículas de masas m_a y m_b están sobre una mesa horizontal sin fricción. Se encuentran unidas por una cuerda tensa que pasa por un anillo pequeño, sin fricción, fijo a la mesa. Inicialmente las partículas están quietas a distancias R_a y R_b del anillo y en $t = 0$ se le da un impulso a la masa m_b, perpendicular a la cuerda, de modo que ésta adquiere una velocidad v_0.

a. Qué magnitudes se conservan?

b. Dar la velocidad de las partículas en función de su distancia al anillo.

c. Hallar la tensión de la cuerda en función de la distancia de una masa al anillo.

7. Se lanza una partícula por una vía horizontal sin rozamiento con velocidad v_0. En un determinado lugar la vía tiene forma circular, de radio a, como se indica en la figura.

   a. Calcular la fuerza de vínculo en función de la posición y la energía inicial de la partícula.

   b. Encontrar en qué punto se despega del aro en función de la velocidad inicial.

   c. Describir las posibles trayectorias.

8. Se tiene una pelotita de masa m enhebrada en una barra, como se indica en la figura.

   a. Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

   b. Existen ecuaciones de vínculo?

   c. Analice y compare los casos en que φ varía libremente y en que la barra gira en el plano con velocidad constante.

   d. Qué pasa si se agrega una segunda bolita en la barra. (Considere nula la masa de la barra y plantee en todos los casos las ecuaciones de Newton).

9. Para los sistemas (en equilibrio) de las figuras, dibuje todas las fuerzas aplicadas. Indique qué interacciones representan y cuales forman pares de acción y reacción.

10. Tiene sentido decir que la fuerza de un resorte es conservativa ?. Si se verifica $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, es $\mathbf{F}$ conservativa ?. Analice los siguientes ejemplos, indicando claramente cuál es el sistema mecánico cuya energía se considera (ver figura).

11. Cuánto marca el dinamómetro ? (suponga su masa nula) (ver figura)

    a. Si $m = M$.

    b. Si $m \neq M$.

12. Dadas dos masas puntuales, expresar matemáticamente el hecho que las fuerzas de interacción entre ambas están sobre la recta que las une.

13. Es posible que se conserve el impulso lineal y no se conserve la energía ?. Y viceversa?. Dé ejemplos.

14. Pueden conservarse dos componentes del impulso angular de una partícula y no conservarse la tercera ?. Justifique su respuesta.

15. $F_r = 0$ implica $p_r =$ cte.? Justifique, dé ejemplos. $p_r =$ cte. implica $F_r = 0$? Justifique, dé ejemplos.

16. Suponga que un sistema de masas puntuales es descripto desde un sistema inercial S (la masa m_a tiene posición $\mathbf{r}_a$ y momento $\mathbf{p}_a$) y desde el sistema centro de masa S' (la masa tiene posición $\mathbf{r'}_a$ y momento $\mathbf{p'}_a$).

    a. Compare las siguientes definiciones del impulso angular referido al centro de masa:

    i. $\mathbf{L}_1 = \sum_a \mathbf{r'_a} \times \mathbf{p'_a}$

    ii. $\mathbf{L}_2 = \sum_a \mathbf{r_a} \times \mathbf{p'_a}$

    iii. $\mathbf{L}_3 = \sum_a \mathbf{r'}_a \times \mathbf{p}_a$

    b. Encuentre la relación entre el impulso angular referido a S y aquel referido a S' (centro de masa).

17. Dos partículas aisladas interactúan tal que $\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}$ es constante.

    a. Es válido afirmar que $\mathbf{L}_S =$ cte. donde S es un sistema arbitrario distinto del centro de masa? De un ejemplo físico.

    b. Visto desde el sistema CM, bajo qué condiciones el movimiento de las partículas es unidimensional, bidimensional o tridimensional?

    c. Si $\mathbf{L}_S =$ cte. con $S =$ CM, entonces el movimiento de las partículas será plano (en S)? Porqué?

18. Si el centro de masa de un sistema está acelerado, sigue siendo válida la relación: $d\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}/dt = \mathbf{N}_{\mathrm{CM}}$? ($\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}$ es el momento angular y $\mathbf{N}_{\mathrm{CM}}$ el momento de las fuerzas con respecto al centro de masa).

19. Las esferas del dibujo se mueven sin rozamiento por un carril horizontal. Si se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ (colineal con el carril) sobre la primera encuentre la fuerza neta sobre cada una de ellas y los valores de las fuerzas de contacto sobre la tercera y la quinta.

20. Para las condiciones de las figuras, indique cuánto vale la fuerza de rozamiento ($\mu_e \neq 0$)

21. Para cada uno de los ejemplos que se muestran, indique detalladamente que magnitudes se conservan y porqué ?. Hágalo para cada partícula y para todo el sistema.

22. Considere un protón en reposo en un sistema fijo. Desde el infinito incide un electrón con velocidad v_0, cuyo movimiento (cuando está muy lejos del protón) es aproximadamente rectilíneo uniforme. Al acercarse al protón la trayectoria del electrón se curva

debido a la interacción electrostática entre ambos ($V = -e^2/r$).
Debido a que la masa m_p del protón es mucho mayor que la del electrón m_e, puede suponerse fijo al primero (como $m_p \gg m_e$, debe ser $v_p \ll v_e$). Si no interactuaran, la trayectoria del electrón sería rectilínea y la distancia de máximo acercamiento electrón protón sería b.

a. Qué magnitudes se conservan?

b. Usando las leyes de conservación halladas en a., calcule la distancia de máximo acercamiento.

23. Utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas, obtenga las ecuaciones de movimiento para un péndulo plano y para uno esférico, respectivamente.

24. Una masa m sólo puede moverse en el interior de un tubo cilíndrico, sin fricción, como indica la figura. El tubo rota con velocidad angular constante.

    a. Analizar qué magnitudes se conservan.

    b. Hallar las ecuaciones de movimiento para la partícula en coordenadas cartesianas y en polares.

    c. Hallar la fuerza de vínculo en función del tiempo si en el instante inicial la masa está quieta con respecto al tubo a una distancia a.

MECANICA CLASICA

Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.

1. Se tiene el sistema de la figura, donde x_1, x_2 se miden a partir de las posiciones de equilibrio. Sea $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$.

   a. Definen (q_1, q_2) un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?.

   b. Si $q_1 = 0$, describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Idem si $q_2 = 0$.

   c. Calcular las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2.

2. Para los casos siguientes. Cuántos grados de libertad tiene el sistema?. Proponga conjuntos de coordenadas generalizadas adecuadas:

   a. m_1 y m_2 se mueven en el plano de la mesa.

   b. Idem, pero la mesa rota con $\omega =$ cte..

   c. m_1 y m_2 se hallan dentro de un tubo. Si q_1 y q_2 se miden a partir del centro de masa, son coordenadas apropiadas?.

   d. Las dos masas se hallan unidas entre sí por una barra rígida. Analice el caso en que *sólo* pueden moverse horizontalmente y también el caso bidimensional.

   e. Discuta los casos P fijo y P móvil.

   f. Una masa enhebrada en un alambre elíptico.

   g. Una máquina de Atwood. Analice los casos en que la cuerda desliza y no desliza sobre la polea.

   h. Una partícula puntual que cae por una esfera, *con* gravedad.

3. D_1 y D_2 son dos plataformas rotantes como se muestra en la figura. D_1 se mueve respecto a la tierra con velocidad $\dot{\theta}_1$. D_2 se mueve respecto a D_1 con velocidad $\dot{\theta}_2$. Una partícula de masa m se mueve libremente sobre D_2. Escriba el lagrangiano del sistema en términos de coordenadas polares ρ, φ, de un sistema cartesiano fijo a D_2. Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula e interprete.

4. Se tiene el sistema de la figura. Hallar la aceleración de cada masa utilizando:

   a. Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.

   b. Principio de los Trabajos Virtuales (PTV)

   c. Las ecuaciones de Lagrange.

d*. Repita a y b, pero ahora considerando que las poleas tienen masa M y radio R.

5. Dos partículas de masa m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible de longitud l; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el y. Las condiciones iniciales son las que indica la figura.

   a. Halle la ecuación de movimiento para θ utilizando el PTV.

   b. Halle la ecuación de Lagrage para θ.

   c. Si $m_1 = m_2 \equiv m$, halle la tensión T en el hilo como función de θ.

   d. Cuál es el período de movimiento de θ en este caso?. Suponga que θ sólo puede tomar valores pequeños.

6. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo como indica la figura. m_1 se mueve en el plano de la mesa y m_2 sólo verticalmente. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia r_0 del orificio y se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

   a. Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.

   b. Halle la tensión del hilo.

   c. Repita a y b suponiendo ahora que el movimiento de m_2 es bidimensional.

7. Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza por una superficie cónica $\rho = z\,\mathrm{tg}\alpha$, sin rozamiento.

   a. Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo θ medido en el plano perpendicular al eje del cono y la distancia r al vértice del mismo, tomada a lo largo del cono.

   b. Hallar r *máximo* y r *mínimo* para el caso en que $\alpha = 30^\circ$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\theta}^2(0) = 4\sqrt{3}g/a$.

   c. Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

   d. Suponiendo la partícula en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones de este movimiento. Compare este período con el de revolución para hacer una descripción cualitativa del movimiento perturbado.

8. Analizar los siguientes puntos

   a. Dado un sistema constituído por N partículas, cuál es el número de grados de libertad del mismo? y cuál el de ecuaciones de vínculo?

b. Se puede utilizar una velocidad como coordenada generalizada?

c. Las fuerzas generalizadas se aplican sobre cada partícula?

d. El número de grados de libertad de un sistema, es independiente del sistema de referencia utilizado para describir el movimiento?.

e. Para estudiar el equilibrio de un sistema, es siempre válido utilizar el *principio de los trabajos virtuales*?.

f. Es válida la formulación lagrangiana para un potencial dependiente de la velocidad? y para el campo electromagnético?.

g. Dé un ejemplo en que un desplazamiento virtual difiera de uno real. En qué casos son iguales?.

h. Las ecuaciones de vínculo para un sistema físico, dependen del sistema de referencia utilizado?, y las fuerzas de vínculo?.

i. Para calcular las fuerzas de vínculo de un sistema, qué métodos es posible emplear?.

j. Siempre se pueden escribir las ecuaciones de Newton desde el centro de masa de un sistema?.

k. Para un sistema de N partículas, cuántas ecuaciones de Newton se necesitan? y de Lagrange?.

l. Qué se entiende por un sistema inercial? Serán correctas las ecuaciones de movimiento si se escribe el lagrangiano desde un sistema no inercial?

m. Para una carga en un campo electromagnético, se puede conservar el impulso lineal de la misma? Qué magnitud se conserva?.

9. Sea el sistema de la figura.

   a. Halle las ecuaciones de movimiento utilizando el método de Lagrange.

   b. Para el caso $\mathbf{g} = 0$, integre las ecuaciones para condiciones iniciales $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.

   c. Discuta el caso en que φ varía libremente.

10. Considere el sistema de la figura.

   a. Encuentre las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble que oscila en un plano.

   b. Halle una expresión aproximada de las mismas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

c. Resuelva las ecuaciones proponiendo una solución de tipo armónico para los grados de libertad. En $t = 0$ ambas masas se hallan en reposo sobre la vertical y a la inferior se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

d. Halle las tensiones sobre los hilos.

11. Una partícula de masa m se desliza sin fricción por un alambre fijo en el punto A y que forma un ángulo θ_0 con un eje vertical y que se encuentra rotando alrededor del mismo eje con velocidad angular constante ω.

a. Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.

b. Halle $r(t)$ sabiendo que a $t = 0$, $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.

12. Considere el péndulo en tres dimensiones —péndulo esférico.

a. Encontrar las ecuaciones de Lagrange para el mismo.

b. A partir de las ecuaciones de Lagrange hallar las constantes de movimiento.

c. Discuta cualitativamente el movimiento de este péndulo.

13. Escriba el lagrangiano de un péndulo plano donde el punto de suspensión:

a. se desplaza uniformemente por un círculo vertical de radio a con frecuencia ω,

b. efectúa oscilaciones verticales de la forma $a \cos \omega t$,

c. efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a \cos \omega t$.

14. Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura. Existe gravedad.

15*. Sea una partícula libre de masa m y carga q en un campo electromagnético con potenciales ϕ, $\mathbf{A}$ ($\mathbf{E} = -\nabla\phi - c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t; \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$). Obtenga a partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ —donde U es un potencial generalizado dependiente de la velocidad— las ecuaciones de movimiento. Muestre que la fuerza aplicada sobre la partícula es la de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, $U = q\phi - qc^{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

16*. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, dos sistemas de referencia cartesianos bidimensionales. Suponga que el origen de coordenadas O se mueve con $\mathbf{v} =$ cte. respecto a x_1, y_1 y que los ejes x_2, y_2 rotan con velocidad angular constante. Hallar explícitamente las ecuaciones de transformación: $x_1 = x_1(x_2, y_2, t)$ y $y_1 = y_1(x_2, y_2, t)$.

17. Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: un péndulo simple de masa m_2, con una masa m_1 en el punto sostén, la cual puede moverse sobre una línea horizontal contenida en el plano de movimiento de m_2. Resuelva las ecuaciones de movimiento y halle la frecuencia de oscilación del sistema para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio estable. Suponga condiciones iniciales adecuadas.

18*. Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: una máquina de Atwood con una cuerda de largo l, una polea con momento de inercia I y que rueda sin deslizar con la cuerda.

19*. Sea una partícula de masa m y carga q inmersa en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\widehat{z}$.

a. Si $\mathbf{A} = Bx\widehat{y}$ — compruebe que $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ —, calcule las ecuaciones de movimiento y muestre que las órbitas son espirales cilíndricas. Calcule el radio y el centro de la circunferencia transversal a dicha espiral. Las condiciones iniciales son $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

b. Repita el punto a. pero ahora para el potencial vector $\mathbf{A'} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$.

c. Calcule la función ψ que da el cambio de medida —cambio de *gauge*— $\mathbf{A'} = \mathbf{A} + \nabla\psi$.

d. Si $\mathbf{v}(0) = 0$, interprete físicamente la solución hallada en a.

20. Sea un oscilador isótropo bidimensional ($k_x = k_y \equiv k$).

a. Escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = y$.

b. Sea $\mathcal{L}^* = m\dot{x}\dot{y} - kxy$. Halle las ecuaciones de movimiento para este sistema. Compare con las obtenidas en a.

MECANICA CLASICA

Principios variacionales.

1. Suponga que sabe experimentalmente que una partícula cae una distancia dada y en un tiempo $t_d = \sqrt{2y_d/g}$, pero que no se conoce el tiempo de caída para otras distancias. Suponga además que el lagrangiano del problema se conoce pero en lugar de resolver la ecuación de movimiento se prueba una forma funcional $y = a + bt + ct^2$. Muestre que la integral $I = \int \mathcal{L}\, dt$ resulta un extremo para valores reales de los coeficientes sólo cuando $a = 0$, $b = 0$ y $c = -g/2$.

2. Una partícula se encuentra sometida a un potencial de tipo gravitatorio, $V(r) = -k/r$. Suponiendo que las órbitas son circulares, encuentre la relación entre los períodos y los radios de las órbitas utilizando el principio variacional de Hamilton †.

3. Se tiene una partícula sometida solamente a un potencial del tipo oscilador armónico, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Encuentre la ecuación de movimiento minimizando la acción de la siguiente manera:

   a. Divida el intervalo de integración en n partes.

   b. Reemplace las derivadas por su valor medio $\dot{x}_i = \Delta x_i/\Delta t_i$ y la integral por la sumatoria.

   c. Imponga la condición de extremo $\partial I/\partial x_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

   d. Tome el límite para $\Delta t_i \to 0$, $n \to \infty$.

   e. Interprete el resultado.

4. Considere el movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida al potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$ (oscilador anarmónico). La solución de la ecuación de movimiento no se conoce, pero, debido a la forma del potencial, se sabe que el movimiento será periódico y se prueba con una serie de Fourier de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

   (tomando t=0 en un punto de retorno) donde ω resulta la pulsación (desconocida) del movimiento. Considere la integral de la acción entre dos puntos t_1 y t_2 separados por el período $T = 2\pi/\omega$.

† Ayuda: considere la ecuación paramétrica de la elipse $x(\tau) = a\cos\alpha\tau$, $y(\tau) = b\,\mathrm{sen}\alpha\tau$, y apartamientos de la trayectoria circular variando a ó b.

a. Muestre que para $\beta = 0$, puede encontrarse un j tal que $a_0 = 0, a_n = 0$ para todo $n \neq j$ y $\omega = \frac{1}{j}\sqrt{\frac{k}{m}}$ representa una solución. Observar que todo j representra la *misma* solución. Interprete este hecho.

5. Según Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x,y)\,ds$, donde $n(x,y)$ es el índice de refracción del medio inhomogéneo que la luz atraviesa. El problema se supone plano. Muestre que si $n(x,y) = n_0(1 + y/h)$, donde n_0 y h son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/h\alpha)$; α y β constantes de integración. *Ayuda: considere las ecuaciones de Euler–Lagrange.*

6. Son afectadas las ecuaciones de movimiento si al lagrangiano se le agrega una derivada total con respecto al tiempo?.

7*. Hallar la curva de longitud mínima que une dos puntos de la superficie de un cilindro.

8*. Cuando se arroja un objeto hacia arriba, desde la superficie terrestre, el tiempo que transcurre hasta que vuelve a tocar tierra resulta $t_c = 2v_0/g$.

   a. A partir de una función de prueba dada por:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}(n\omega t)$$

   (desarrollo en serie de Fourier para $0 < t < t_c$), con $\omega = 2\pi/t_c$, encuentre la mejor aproximación a la trayectoria con el criterio del principio de Hamilton. Utilizando el valor que toma la acción para dicha trayectoria, compare la solución obtenida con la correspondiente al resultado $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Qué conclusiones saca?.

9*. Cambia la forma de un lagrangiano cuando se lo escribe en distintas coordenadas generalizadas?. Muestre un ejemplo.

10*. Muestre que el lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q},\ddot{q},t) = a\ddot{q} + bt\ddot{q} + \mathcal{L}'(q,\dot{q},t)$ (a y b son constantes arbitrarias) conduce a ecuaciones de movimiento que son de segundo orden.

MECANICA CLASICA

Simetrías, teorema de Noëther.

1. Sean tres masas m_1, m_2 y m_3, enhebradas en un aro circular fijo. Las masas interactúan a través de ciertos resortes especiales cuyo potencial es $V(\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{2}k(\theta_i - \theta_j)^2$, donde $i, j = 1, 2, 3$ y k es una constante. En base a la simetría del lagrangiano —teorema de Noëther— hallar qué magnitudes se conservan.

2. Qué componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$ se conservan para el movimiento de una partícula en los siguientes campos?.

   a. Los podetneciales son constantes sobre superficies elipsoidales ($a \neq b \neq c$).

   b. Las superficies equipotenciales son planos homogéneos infinitos.

   c. Las superficies equipotenciales son cilindros infinitos.

   d. De simetría helicoidal.

   e. Campo debido a una red unidimensional de cargas positivas separadas entre sí una distancia d constante.

   f. Las superficies equipotenciales son toros.

3. Cómo serían las órbitas de los planetas si el potencial gravitatorio solar tuviera simetría cilíndrica?.

4. Se tienen dos partículas de masa m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Demuestre explícitamente que para que se conserve el impulso angular es necesario que $V = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

5. Calcule las constantes de movimiento para una partícula en el espacio, en un campo electromagnético, con potenciales:

   a. $\phi = \phi(x, y)$; $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y)\widehat{z}$

   b. $\phi = \phi(x^2 + y^2, z)$; $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x^2 + y^2, z)\widehat{z}$

MECANICA CLASICA

Fuerzas Centrales.

1. Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es τ. Este movimiento es detenido súbitamente. Luego se las suelta y caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un $t = \tau/4\sqrt{2}$.

2. El potencial de un oscilador isótropo es $V = \frac{1}{2}kr^2$.

   a. Dibuje el potencial efectivo para un caso general.

   b. Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.

   c. Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.

   d. Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la circular.

3. Considere los siguientes puntos.

   a. Discuta el movimiento de una partícula en un campo central $F(r) = -k/r^2 + c/r^3$. En particular, muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma
   $$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\alpha\varphi}$$
   que es una elipse cuando $\alpha = 1$.

   b. Cuando $\alpha > 1$, es una elipse que precede. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad de precesión del perihelio. Encuentre una expresión para la velocidad de precesión en términos de α

   Ayuda: Observe que el problema se reduce al de Kepler, si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto *no* es necesario calcular nuevamente la órbita, si ya resolvió el problema de Kepler —lo resolvió?.

4. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial central $V(r) = k/r^2$.

   a. Hallar la ecuación de la trayectoria de la partícula como función de constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$. Interpretar el movimiento bidimensional (θ, r) en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular las direcciones de las así ntotas si las hubiere. Qué ocurre cuando $k = 0$?. Verificar que en el límite $k \to 0$, la solución hallada es la físicamente correcta.

b. Suponer ahora que el potencial es atractivo. Qué ocurre cuando $l^2 > -2mk$?. Suponer que $l^2 < -2mk$, $E < 0$. Interpretar el movimiento bidimensional en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Qué pasa con $\dot{\theta}$? (no se pide calcular la trayectoria). Calcular el tiempo que tarda la partícula en llegar al origen si partió de un punto de retorno.

Ayuda:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - bu^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{b}} \arccos(\frac{bu}{\sqrt{ab}}), & \text{si } a, b > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln(\sqrt{-b}u + \sqrt{a - bu^2}), & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Para calcular la trayectoria, suponer r_0 un punto de retorno y $\theta_0 = 0$. Considere además la ayuda del problema anterior.

5. Considere una partícula de masa m que se mueve en el espacio bajo la acción de un campo de fuerzas radial $F(r) = -kr + c/r^3$, siendo r la distancia al origen de coordenadas.

   a. Escriba el lagrangiano y las constantes de movimiento en función de las coordenadas generalizadas elegidas.

   b. Halle la ecuación de la órbita ($r = r(\theta)$).

   c. Grafique cualitativamente la trayectoria de la partícula para $c = 0$ y $c \neq 0$.

   d. Discuta en qué casos la órbita no será cerrada y calcule la velocidad angular de precesión.

MECANICA CLASICA

Choque y dispersion.

1. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de diámetro a.
2. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas de masa m, en un potencial como se indica en la figura, es decir pozo de potencial esféricamente simétrico con $V = 0$ para $r \geq a/2$ y $V = -V_0$ para $r < a/2$.
3. Considere una esfera rígida que absorbe las partículas de un haz incidente sobre ella con una probabilidad proporcional a la componente normal de la velocidad (v_n: componente de la v que es normal a la superficie de la esfera). Las partículas no absorbidas rebotan elásticamente.

   a. Hallar la sección eficaz diferencial.

   b. Hallar la sección eficaz total.

   c. Justificar el resultado obtenido en ba..
4. Considere una partícula sujeta a una fuerza central cuyo potencial $V(r)$ $V(r) = 0$ si $r > R$

   $V(r) = A * (R^2 - r^2)$ si $r \leq R$ donde $A > 0$.

   a. Escriba el Lagrangiano del sistema.

   b. Considere las trayectorias de dispersión con energía $E = mv^2/2$ y momento angular $l = mvs$ (s el parámetro de impacto naturalmente).

   c. Grafique el potencial efectivo.

   d. Encuentre la distancia al centro de fuerzas, r, como función del ángulo que forman el vector posición y el vector velocidad inicial.

   e. Encuentre la sección eficaz diferencial

   f. Encuentre la sección eficaz total. Comente el resultado.
5. En el ciclotrón de la CNEA se aceleran partículas α a una energía de 55 MeV. Se obtiene un haz interno de 0,5 nanoamperes de intensidad que se hace incidir sobre un blanco de oro de 0,5 miligramos de oro/cm^{2}de espesor. A 20 cm de blanco y formando un ángulo de 5 grados con la dirección del haz incidente se coloca un detector de estado sólido que cuenta todas las partículas que pasan por un orificio circular de 1 mm de diámetro. Cuántas partículas se espera contar por segundo por efecto de la dispersión Coulombiana?. Si el radio del núcleo constituido por A nucleones es $R \sim 1.2A^{1/3}$ fermi,

podrán observarse efectos nucleares?. Cómo se manifestarán dichos efectos?. Considere los siguientes datos: 1 MeV $= 1,60 \times 10^{-6}$ ergios; 1 fermi$= 10^{-13}$ cm; oro: Au_{79}^{197}; part α: He_2^4; masa de nucleón: $1,67 \times 10^{-24}$ g; N_a=nro. de Avogadro$=6.02 \times 10^{23}$ (g mol-1; $e = 1,6 \times 10^{-19}$ coulombs; $e^2 = 1.43 \times 10^{-13}$ MeV cm.

MECANICA CLASICA

Sistemas no inerciales.

1. Sea el sistema de la figura, que consiste en una mesa horizontal montada sobre un eje vertical que rota con velocidad angular ω constante. Un cuerpo puntual de masa m se desliza sin fricción sobre unos rieles que corren diametralmente sobre la mesa. Este cuerpo está unido a dos resortes tendidos paralelamente a los rieles y cuyos extremos están fijos a la mesa en puntos diametralmente opuestos, la longitud libre de ambos resortes es igual al radio de la mesa y la constante elástica vale k para ambos.

   a. Cuántos grados de libertad tiene el sistema?.

   b. Utilizando la distancia r de la masa al centro de la mesa, escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento.

   c. Usando las ecuaciones de Newton en un sistema en el plano de la mesa fijo a los rieles, escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento. Calcule las fuerzas de vínculo.

   d. Se conserva la energía?. Y el Hamiltoniano?.

2. Determinar la trayectoria de un proyectil lanzado desde la superficie terrestre (colatitud θ) con velocidad inicial v_0 perpendicular a la superficie en el punto de lanzamiento — medida en el sistema fijo a tierra.

3. Una partícula de masa m se mueve sin fricción por un aro de radio a que gira con $\omega =$ cte., alrededor de un eje, que pasa por su circunferencia y es normal al plano del aro. Existe gravedad.

   a. Hallar las ecuaciones de movimiento desde un sistema unido rígidamente al aro y con origen en el centro del mismo.

   b. Integre las ecuaciones de movimiento suponiendo que no existe gravedad y para ángulos pequeños.

4. Una cuenta se mueve sin fricción por un alambre con forma de parábola ($z = cr^2$). Cuando la parábola rota con velocidad angular ω alrededor del eje de simetría, la cuenta rota en una circunferencia de radio R. Expresar la aceleración de la gravedad, g, en función de R, ω y c utilizando la formulación newtoniana.

5. Se tiene el sistema de la figura, donde el tubo sin fricción contiene una masa m unida por dos resortes de constantes k_1 y k_2, sobre la mesa que rota con $\omega =$ cte.. La mesa está sobre un ascensor que sube con aceleración **a** hacia arriba. Obtenga la ecuación de movimiento para la masa m usando las ecuaciones de Newton.

6. Una rueda de un automóvil tiene en su llanta un orificio de radio s tapado desde el interior mediante un remache, de masa m, como indica la figura. La presión del aire en la rueda sostiene inicialmente al remache en su lugar ($F = \Delta p \pi s^2$). En $t = 0$, el automóvil está quieto y el remache se encuentra en la parte inferior de la llanta.

   a. Halle una expresión para el tiempo que tarda un destaparse el orificio si el automóvil arranca con una aceleración constante $\mathbf{a}$ (considere que la goma rueda sin deslizar).

   b. Estime numéricamente el resultado y haga para ello todas las aproximaciones físicas que considere necesarias. Datos: $p =$ 1atm., atm. $=$ 1.033Kg/cm^2. $R =$ 50cm, $s =$ 5mm, $a = g/4$, $m =$ 10g, $g =$ 9.8m/s.

7. Péndulo de Foucault.

   a. Deducir la ecuación de movimiento para un péndulo simple teniendo en cuenta la rotación de la tierra alrededor de su eje.

   b. Suponga pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio tal que pueda suponerse que el movimiento tiene lugar en un plano horizontal. Cómo se modifican las ecuaciones de movimiento bajo esta hipótesis?.

   c. Resuelva las ecuaciones de movimiento halladas en b. con condiciones iniciales apropiadas.

8. Se tiene una masa m suspendida de un resorte de constante elástica k en el interior de una caja de acrílico delgada —despreciar rozamiento— de manera que m sólo puede moverse en el plano π, como indica la figura. Dicha caja rota con velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical y está unida en A y B a dos soportes que se deslizan a lo largo de dos rieles horizontales. Sabiendo que $y(A) = y(B) = y_0 \mathrm{sen} \Omega t$,

   a. Cuántos grados de libertad tiene el sistema?.

   b. Hallar las ecuaciones de movimiento para m, utilizando la formulación newtoniana.

   c. Se conserva la energía?.

   d. Analizar la relación entre Ω y ω.

9. Considere:

   a. La posibilidad de reemplazar un campo gravitatorio por un sistema acelerado. En qué casos ambos efectos pueden ser indistinguibles?.

   b. Que relación existe entre la pregunta anterior y el hecho de que la masa inercial coincida con la masa gravitatoria (resultado del experimento de Eötvos).

10. Se tiene una plataforma rotante que gira con velocidad angular $\omega = \omega_0 \widehat{z}$ ($\omega_0 =$ cte.) respecto de la tierra y una piedra de masa m apoyada sobre la superficie terrestre en reposo de la misma (considere a la tierra como un sistema inercial).

   a. Desde el punto de vista de un observador solidario a la plataforma, explique porqué gira la piedra. Indique claramente cuáles son las fuerzas que actúan. Repita el cálculo desde el punto de vista de un observador inercial fijo a la tierra.

   b. Escriba las ecuaciones de movimiento de la piedra desde el punto de vista del observador no inercial (suponga que la misma puede deslizar libremente sobre la tierra) y resuélvalas (si puede).

   c. Qué tienen que ver las ecuaciones halladas en b. con las que obtiene el observador inercial en coordenadas polares?.

   d. Repita todo si $\omega_0 = \omega_0(t)$.

MECANICA CLASICA

Cinemática y dinámica del cuerpo rígido, ángulos de Euler, Ecuaciones de Euler.

1. Hallar el centro de masa y calcular el tensor de inercia respecto del mismo, para el cuerpo plano de la figura (su densidad es ρ). Hallar los ejes principales de inercia y expresar el tensor de inercia en dichos ejes.

2. Determinar los ejes principales de inercia y calcular el tensor de inercia respecto del centro de masa para los siguientes sistemas:

   a. Cono circular recto de altura h y radio de la base r.

   b. Anillo plano circular de radios r_1 y r_2.

   c. Esfera de radio r.

   d. Cubo de lado a.

3. Halle la energía cinética de:

   a. OA y AB son dos varillas delgadas homogéneas de longitud l unidas por una bisagra en A (ver fig.). OA gira en el plano de la figura alrededor de O y el punto B se desliza a lo largo del eje x.

   b. Un cilindro homogéneo de radio a que rueda dentro de una superficie cilíndrica de radio R.

   c. Un cono homogéneo rodando en un plano.

   d. Un cono homogéneo cuya base rueda en un plano y cuyo vértice está fijo a una altura sobre el plano, igual al radio de la base, de manera que el eje del cono permanezca paralelo al plano.

4. Muestre que las componentes de la velocidad angular, respecto de un sistema espacial de ejes, están dadas en función de los ángulos de Euler por:

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\mathrm{sen}\phi - \dot{\psi}\mathrm{sen}\theta\cos\phi$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}$$

5. Un automóvil parte del reposo con una de sus puertas totalmente abierta (a 90°). Cuando el automóvil acelera, la puerta se cierra. Calcular el tiempo necesario para que se cierre totalmente si la aceleración es constante y el centro de masa está a una distancia d de las bisagras. Estime numéricamente el valor del tiempo utilizando valores realistas de los distintos parámetros.

6*. Un cilindro semicircular uniforme de masa m y radio a está apoyado sobre un plano horizontal. Escriba las ecuaciones diferenciales para pequeños desplazamientos alrededor de esa posición.

7. Se tienen dos placas de lados a y b cuyo espesor es despreciable. Una de ellas está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular $\Omega = \text{cte.}$. La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura. Determinar:

   a. El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad.

   b. Existe algún punto de equilibrio estable?

   c. El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad.

   d. Existe ahora algún punto de equilibrio estable?

8. Se tienen dos volantes de radio R y masa m cuyos centros se encuentran unidos por una barra de longitud l según como se ve en la figura. El ángulo formado por la barra y el plano de cada volante es siempre de $90°$ (no puede variar).Cada volante gira libremente sobre sí mismo.

   a. Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

   b. Escriba el lagrangiano $\mathcal{L}$ y encuentre constantes de movimiento. Es $H = E$?

   c. Escriba las ecuaciones de movimiento.

9. Dada una barra de longitud l y masa m cuyo extremo puede deslizar a lo largo del eje z y a su vez puede girar en torno de él, mientras está apoyada sobre una esfera de radio a (ver figura), determinar:

   a. El lagrangiano.

   b. Las ecuaciones de movimiento.

   c. Las magnitudes que se conservan.

10*. Un extremo de la barra de la figura —todas sus dimensiones son despreciables respecto a l— puede resbalar sobre un eje y el otro extremo sobre el piso. A $t = 0$ tiene una velocidad $\Omega_z = \omega_0$ alrededor del eje vertical y $\theta(0) = \pi/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$:

   a. Encuentre Ω_z y $\dot{\theta}$ como funciones de θ.

   b. Suponiendo que la barra sigue en contacto con el piso, cuál es el menor valor de ω_0 para el cual la barra abandona el piso?
   Sugerencia: Una vez resuelta la parte a), escriba la ecuación de movimiento para el centro de masa de la barra e imponga la condición de que la reacción del piso sólo puede apuntar en la dirección z positiva.

11. Un cilindro circular sólido de masa m, radio a y largo l, está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa (ver figura). Este eje gira con velocidad angular constante Ω. Suponiendo $l > \sqrt{3}a$, encontrar las posiciones de equilibrio estable y las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos de la misma.

12. Se tiene un aro de radio a y masa m que rueda sin deslizar en el interior de un cilindro fijo de radio b. Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para el aro.

13*. Una esfera homogénea de radio a se mueve por la superficie interna de un cilindro vertical de radio b sin deslizar, determine la ley de movimiento de la esfera.

14. El sistema de la figura consiste en dos masas unidas rígidamente a un eje vertical que gira con velocidad angular ω.

    a. Calcular el tensor de inercia para ejes x e y fijos al espacio.

    b. Encontrar los ejes principales de inercia e interpretar.

    c. Calcular el impulso angular $\mathbf{L}$ en ambos sistemas (fijo al espacio y fijo al cuerpo).

    d. Calcular el par que ejercen los cojinetes, según ambos sistemas. Interprete el resultado físicamente.

15. Un trompo con un punto de apoyo fijo o que inicialmente gira alrededor de su eje con velocidad angular ω (la velocidad de precesión es despreciable), toca el piso y casi instantáneamente (debido al rozamiento) pasa a rodar sin deslizar (ver figura):

    a. Pruebe que la componente x de $\mathbf{L_o}$ ($\widehat{\mathbf{x}} \parallel \mathbf{op}$) se conserva en el contacto.

    b. Cuál es la nueva velocidad angular del trompo una vez que empieza a rodar sin deslizar?

    c. Escriba las ecuaciones de Euler (en términos de los ángulos de Euler), después que el trompo empieza a rodar sobre el plano. Calcule el valor de la fuerza de rozamiento.

    d. Cuánto tarda el trompo en dar una vuelta alrededor de o?

16. Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 (ver figura), con velocidad angular constante $\Omega_3 = \omega$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano x_1, x_2 es I. Inicialmente el volante está en posición vertical ($\theta = \pi/2$) y $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Un peso $m\mathbf{g}$ se cuelga del eje x_3 a una distancia d del origen. Por medio de las ecuaciones de Euler:

    a. Establecer las ecuaciones diferenciales para Ω_1, Ω_2 y Ω_3 en términos de θ, ϕ y ψ y sus derivadas.

b. Linealice las ecuaciones obtenidas, bajo la suposición de que $\theta \simeq \pi/2$ y las velocidades $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ son pequeñas.

c. Resuelva el sistema obtenido en b) e interprete los resultados. *Sugerencia: elimine en ambas ecuaciones los factores* senωt *usando la variable compleja* $\lambda = \theta + i\phi$*).*

d. Establezca los límites de validez de la aproximación.

17. Una partícula se mueve paralelamente al eje y con velocidad v y con parámetros de impacto ρ_1 y ρ_2 (ver figura). Choca con un elipsoide de revolución homogéneo (los semiejes son $a = b$ y c), uniéndose con este último. Describa el movimiento del elipsoide, suponiendo que su masa es mucho mayor que la de la partícula incidente.

18*. Se tiene una esfera homogénea de masa M y radio R cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas (x, y, z) (ver figura). Una partícula de masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v} = -v_0\widehat{\mathbf{x}}$ a lo largo de la recta definida por $z = y = R/2$. Cuando la partícula choca con la esfera queda pegada sobre su superficie. Describir el movimiento subsiguiente del sistema si:

a. Inicialmente la esfera no rota.

b. Inicialmente la esfera rota con $\Omega = \omega_0\widehat{\mathbf{z}}$. ($\omega_0 =$ cte.)

c. Inicialmente la esfera rota con $\Omega = \omega_0\widehat{\mathbf{z}} + \omega_1\widehat{\mathbf{y}}$. ($\omega_0, \omega_1 =$ ctes.).

MECANICA CLASICA

Pequeñas oscilaciones.

1. Obtener los modos normales de oscilación para la molécula de CO_2, interpretando físicamente cada uno de ellos. Escriba la solución general. Hallar las coordenadas normales utilizando argumentos de simetría.

2. Para el sistema de la figura,

   a. determine la solución general del movimiento en un entorno de la posición de equilibrio.

   b^*. En el caso $m_1 = m_2$, considere la existencia de fuerzas de rozamiento proporcionales a la velocidad aplicadas sobre las masas.

3. Deducir las ecuaciones de movimiento de dos péndulos simples conectados por un resorte lineal relativamente liviano, como se indica en la figura. Suponer que el movimiento ocurre en el plano del dibujo y calcular las frecuencias naturales de vibración para pequeños desplazamientos. Determinar a priori las coordenadas normales. Analizar el movimiento del sistema para la siguiente condición inicial: $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = \theta_0$ y $\theta_2(0) = 0$.

4. La molécula de CsOH es lineal en equilibrio. Cuando la molécula vibra aparecen 3 tipos diferentes de interacciones.

   a. $V_{\text{CsO}} = 4\epsilon[(\frac{\sigma}{r})^{12} - (\frac{\sigma}{r})^6]$ donde ϵ y σ son constantes y r es la distancia entre los 2 átomos.

   b. Una interacción análoga O–H pero 15 veces más débil.

   c. Una interacción elástica de curvatura entre las uniones Cs–O y O–H con potencial $V = \frac{1}{2}kl^2(\pi - \alpha)^2$.

   Hallar: el lagrangiano de la molécula, teniendo en cuenta las 3 interacciones simultáneamente, las frecuencias características de oscilación y los modos normales correspondientes. Dibujar éstos y explicar en detalle los movimientos de la molécula para cada uno. *Sugerencia: compare los pesos atómicos.*

5. Halle las frecuencias propias, modos y coordenadas normales de un sistema que consta de dos cilindros huecos de masa m y radios r y $2r$ respectivamente, que están colocados uno dentro de otro y apoyados dentro de una superficie cilíndrica de radio $6r$. Todas las superficies ruedan sin deslizar entre sí. Hay gravedad.

6. Determinar las frecuencias de oscilación de un sistema de dos osciladores idénticos de frecuencia ω acoplados por una interacción $-axy$.

7. Dadas tres masas n, M, m, enhebradas en un anillo fijo de radio a, unidas por resortes (no enhebrados en el anillo) de constantes elásticas k y longitud en reposo l_0, hallar el lagrangiano y determinar las frecuencias y modos normales de oscilación. Repetir el problema en el caso en que $M = m$.

8. Hallar los modos y frecuencias propias de oscilación para el sistema de la figura. Considere que los discos no deslizan sobre el piso.

9. Resuelva completamente usando el formalismo de pequeñas oscilaciones, algunos problemas de la guía de ecuaciones de Lagrange.

10. Sea un sistema formado por cuatro masas idénticas enhebradas en un aro fijo de radio a que interactúan a través de resortes, también idénticos de cte. k y longitud en reposo l_0. Obtenga las frecuencias y modos normales de oscilación. Obtenga las coordenadas normales. Si llama z_2 a la coordenada normal correspondiente a la frecuencia no nula y no degenerada, escriba la solución para las siguientes condiciones iniciales: $z_1 = z_3 = z_4 = 0$, $z_2 = b$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z}_4 = 0$ en función de las coordenadas generalizadas originales.

11. El marco cuadrado de la figura está sostenido por cuerdas de piano tensas, de constante de torsión k_1. El disco D está igualmente sostenido en este marco por cuerdas de constante de torsión k_2, que forman un ángulo con el marco. Sea I el momento de inercia del marco; I_3, el momento de inercia del disco en la dirección perpendicular a él e I_2, el correspondiente a una dirección contenida en el plano del disco. Suponga $MS^2 = I$, $I_2 + I_3 = 2I$. Sabiendo que las fuerzas de torsión para un apartamiento θ respecto a la posición de equilibrio son de la forma $F = -k\theta$, donde k es la constante de torsión.

    a. Escriba el lagrangiano del sistema.

    b. Halle las frecuencias normales de oscilación del sistema.

    c. Halle las coordenadas normales.

    d. Escriba la solución general del movimiento del sistema.

12. Se tiene un péndulo de torsión como indica la figura. Los hilos AB, BC y CD son cuerdas de piano, de cte. de torsión k_1, k_2 y k_1, respectivamente. Dos masas m_1 y dos masas m_2 están unidas por sendas varillas rígidas (de masa despreciable), de longitud $2l_1$ y $2l_2$, respectivamente. Sabiendo que las cuplas producidas por las fuerzas de torsión son de la forma $N = -k\theta$, donde θ es el apartamiento angular de la posición de equilibrio y $k =$ cte. de torsión,

    a. Escriba el lagrangiano del sistema en función de los ángulos de giro de las varillas.

    b. Hallar las frecuencias propias de oscilación del sistema.

c. Hallar las coordenadas normales.

13. Considere un péndulo esférico de masa m sostenido por una varilla elástica caracterizada por una constante "del resorte" k.

    E ncuentre el hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de movimiento

    N aturalmente habrá encontrado que un momento es constante, digamos P_ϕ y que el ángulo ϕ no aparece en ecuación alguna. Restrinja entonces el estudio a las otras dos coordenadas y momentos conjugados y halle los puntos de equilibrio de este sistema reducido en función de P_ϕ

    R ealice un estudio de las pequeñas oscilaciones del problema reducido (expréselo en forma lagrangiana si le hiciera falta) indicando las frecuencias de oscilación, y los modos propios de oscilación.

    I nterprete el resultado en términos del problemas original.

14. Un sólido rígido consiste en un prisma de sección triangular (triángulo equilátero para ser precisos), de sección S y longitud (2A). Por el centro de una de las caras triangulares emerge una varilla de longitud R (y masa despreciable) y de la punta de ésta pende una bola de masa M (que a los efectos de este problema la consideraremos una masa puntual) conformando un péndulo de longitud L.

El sólido rígido está sostenido por el centro de masas con un mecanismo que a los fines del problema es irrelevante, pero que permite rotaciones libres alrededor de cualquier eje.

- C ómo son los momentos de inercia del sólido rígido y '? cuáles sus correspondientes ejes principales?.
- C uantos grados de libertad tiene el sistema?
- C uales son las simetrías geométricas?
- P roponga un sistema de coordenadas generalizadas para describir el sistema.
- C uál es el lagrangiano ?
- C uáles son las simetrías del Lagrangiano ? (son las mismas que las simetrías geométricas?)
- C uales son las constantes de movimiento ? (Use el teorema de Noether si fuera necesario).
- A parentemente el sistema tiene un equilibrio estable con la varilla apuntando en la misma dirección que la gravedad y el péndulo en su posición de reposo.

Aproxime el Lagrangiano muy cerca de la posición de equilibrio aprovechando que tanto el péndulo como el prisma están en posición casi vertical. (*Sugerencia: Por lo general* *es suficiente guardar hasta el segundo orden en velocidades y ángulos de desplazamiento respecto de la vertical en la aproximación del Lagrangiano, pero guarde órdenes más altos si esto implica que desaparecen términos en velocidades generalizadas al cuadrado.*)

D iscuta el resultado anterior.

15*. Indique cuántas frecuencias nulas tiene una molécula no simétrica y describa los modos normales asociados.

16*. Indique cuántas frecuencias no nulas tiene una molécula no simétrica.

MECANICA CLASICA

Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas. Hamilton–Jacobi

1. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para

    a. Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Utilizar coordenadas cartesianas.

    b. Una partícula en un potencial central $U(r)$

    c. Un trompo simétrico con un punto fijo en el campo gravitatorio terrestre.

    En a., resuelva las ecuaciones. En b. y c., halle constantes de movimiento. Particularizando en b. a $U(r) = -k/r$, discuta las órbitas posibles. En todos los casos construya los diagramas de fases correspondientes.

2. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y en coordenadas *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. Es el hamiltoniano la energía total?.

4. Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = \frac{1}{r}(1 + \dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ y H. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. Se conserva H?. Es $H = E$?. Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

5. Considere un oscilador armónico unidimensional:

    a. Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.

    b. Halle la trasformación canónica de función generatriz: $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$ (ω: pulsación del oscilador).

    c. Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de E (energía) constante en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.

d. Halle la función generatriz de tipo $F_2(P,q)$ que genera la misma transformación canónica $(q,p) \to (Q,P)$. Qué relación hay entre F_1 y F_2?.

6. Considere un péndulo físico constituído por una barra de longitud l, que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.

   a. Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos\psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.

   b. Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.

   c. Muestre que el área encerrada por la separatriz es 16α. Deduzca que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

7. Considere los siguientes puntos:

   a. Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. Qué obtiene para $f = q_i$ ó $f = p_i$?. Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f,H] = 0$.

   b. Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observe que si $f =$ cte. de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?.

8. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección $\widehat{z}$.

   a. Elija $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ y resuelva el problema.

   b. Demuestre que la transformación que sigue es canónica y líguela a una solución alternativa de la parte a. $(\omega = qB/mc)$

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\operatorname{sen}q_1 + p_2) \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\operatorname{sen}q_1 + p_2)$$

9. Una partícula de masa m se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} A[a^2 - (x-a)^2] & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \ (A > 0) \\ 0 & \text{si } x \geq 2a \end{cases}$$

y choca elásticamente con la pared en $x = 0$. Construir el diagrama de fases correspondiente, mostrando claramente las regiones de libración y movimiento no acotado. Muestre que la variable de acción para el movimiento de libración es

$$J = \frac{a^2\sqrt{2mA}}{2\pi}\left[\epsilon - \tfrac{1}{2}(1-\epsilon^2)\ln\left[\frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)}\right]\right]$$

si la energía es $E = \epsilon^2 a^2 A$ ($\epsilon < 1$) y que el período de libración es $\tau = 2\pi\frac{dJ}{dE}$ y que si $\epsilon \to 1, \tau \to \infty$.

10. Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

  a. Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.

  b. Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de la energía E en cada caso.

11. Considere una partícula con hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + l^2/2mq^2$

  a. Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.

  b. Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(q, J)$ donde ψ es la variable de ángulo. Cómo es la frecuencia del movimiento?.

  c. Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (con n,p números naturales y $\hbar =$ cte..). Discuta este punto con su docente.

12. Una partícula que se mueve en una sola dimensión está sometida a un potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} k(x-a)^2 & x > a \\ \frac{V_0}{a}(a - |x|) & |x| < a \\ k(x+a)^2 & x < -a \end{cases}$$

  a. Dibuje el diagrama de fases indicando: i) en cuántas regiones queda dividido el espacio de fases, ii) cuál es la ecuación que define a la curva separatriz, iii) cómo son los posibles movimientos.

b. i) Calcule la variable de acción para los movimientos con $E < V_0$. ii) Cuánto vale el período de dichos movimientos?. Las oscilaciones son armónicas?.

13. Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ $(k > 0)$, $V(\psi)$ periódico $[V(\psi + 2\pi) = V(\psi)]$.

14. Considere el sistema de la figura: una masa m se mueve sobre un plano inclinado un ángulo α con la horizontal y choca elásticamente con una pared en la base del plano. Tomando como coordenada la distancia a dicho punto medida sobre el plano:

    a. Construya el diagrama de fases y calcule la frecuencia del movimiento para un dado valor de la variable de acción J.

    b. Encuentre la variable de ángulo θ en función de q.

15. Resuelva los siguientes puntos

    a. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador tridimensional isótropo en *cilíndricas* y en *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

    b. Resuelva el problema de la partícula en el campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ utilizando como potencial vector $\mathbf{A} = Bx\widehat{y}$.

16. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:

    a. un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad).

    b. una máquina de Atwood, con polea *sin masa* y con polea de masa M y radio R.

17. Se tiene un sistema de dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{\rm cm} + H_{\rm rel}$

$$H_{\rm cm} = \frac{P_{\rm cm}^2}{2M} \qquad\qquad H_{\rm rel} = \frac{p_{\rm rel}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

    donde: $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, L es el momento angular total y $p_{\rm rel}$ es el momento canónicamente conjugado de r.

18. Demuestre la siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g, h funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f. Sea c una constante.

    a. $[f, c] = 0$; $[f, f] = 0$; $[f, g] + [g, f] = 0$; $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$; $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$; $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$; $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$; $[f, F(f)] = 0$

    b. $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$; $[f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$

c. $[f, g^n] = ng^{n-1}[f, g]$; $[g, F(f)] = F'(f)[g, f]$

19. Sea el sistema de la figura, compuesto por dos trompos simétricos cuyos discos se hallan fijos a la mitad de dos ejes idénticos de longitud $2a$. A es un punto fijo alrededor del cual el eje AB se mueve libremente, B es una articulación y C es una arandela. Además, los trompos pueden girar sobre sí mismos. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton del sistema.

20. Considere los siguientes puntos:

    a. Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

    b. Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ son las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$

21. Considere los siguientes puntos

    a. Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q, p) a (Q, P) se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

    Use [,].

    b. Considere un oscilador unidimensional de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q$. Muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{\mathrm{sen} p}{q})$, $P = q \cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

22. Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton

$$x = X \cos\lambda + \frac{P_y \mathrm{sen}\lambda}{m\omega} \qquad p_x = -m\omega Y \mathrm{sen}\lambda + P_x \cos\lambda$$
$$y = Y \cos\lambda + \frac{P_x \mathrm{sen}\lambda}{m\omega} \qquad p_y = -m\omega X \mathrm{sen}\lambda + P_y \cos\lambda$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

23. Considere una partícula sometida a un potencial $V(q) = U\mathrm{tg}^2(\alpha q)$, U, α constantes positivas. Halle el hamiltoniano y plantee las ecuaciones de Hamilton. Construya el correspondiente diagrama de fases. Halle las variables de acción y ángulo del problema.

24. Encuentre la variable de acción para una partícula de masa m que se mueve con velocidad v y rebota elásticamente entre dos paredes fijas separadas por una distancia d. Sugerencia: haga el diagrama de fases.

25. Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\mathbf{r}|)$.

    a. Calcule las variables de acción para la parte angular del movimiento. Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?.

    b. Bajo qué condiciones el movimiento de la partícula será periódico?. Demuestre explícitamente que para el problema de Kepler y para el escilador armónico el movimiento es periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Obtenga la frecuencia de movimiento como función de la energía.

    c. Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i\hbar$?. Cuánto vale el momento angular de las mismas?. (n_i entero y $\hbar =$ cte.).

26. Para el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$

    a. Dibujar el diagrama de fases indicando las zonas de libración.

    b. Calcular las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.

    c. Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?.

27. Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1 q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistemas?. Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton (S). Encuentre o deduzca de allí el comportamiento dinámico del sistema.

28. Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida a una fuerza uniforme $F = at$ ($a =$ cte.) que aumenta linealmente con el tiempo. Encuentre el hamiltoniano del sistema. Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi?. Muestre que la función principal de Hamilton (S) puede escribirse como

$$S = \frac{1}{2}at^2x + \alpha x - \phi(t)$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para ϕ. De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

29. Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$$

Resuelva el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. Qué sistema físico podría corresponder a este problema?. Resuelva este problema de otras tres maneras:

   a. Resolviendo las ecuaciones canónicas

   b. Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.

   c. Por medio de variables de ángulo–acción.

30. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x sometida a un potencial $V = a\sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x = x(t)$ utilizando S.

31. Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z, L_z es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.

32. Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente variables canónicas?. Idem para H y L_z.

33. Pueden ser L_x y L_y simultáneamete variables canónicas?. Idem para L_x y L^2.

34. Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?.

35. Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\, dq'$. Pruebe que esta función *no* es periódica como funciópn de q, pero que $F_1(q, Q)$ *sí* los es.

36. Considere una partícula sujeta a una fuerza central cuyo potencial $V(r)$ es tal que $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$ y $V(r) < 0$ suficientemente cerca de $r = 0$

   E ncuentre la acción reducida $A(E, r; s)$ para el problema unidemensional efectivo.

   c. Proponga una función generatríz $F(E, r; s, \phi)$ donde (E, s) son los nuevos momentos y (r, ϕ) las coordenadas del problema reducido al plano que contiene la trayectoria.

   d. Encuentre las variables canónicas conjugadas de E y s

   e. Encuentre las variables de acción asociadas a (p_r, r) y (p_ϕ, ϕ)

f. Considere el caso particular

$V(r) = 0$ si $r > R$

$V(r) = A * (r^2 - R^2)$ si $r \leq R$ donde $A > 0$. y encuentre para este caso la separatríz entre orbitas abiertas y cerradas en el espacio de fases.