Física Teórica 3
Serie 1: Termodinámica

1^{er} Cuatrimestre de 2010

Problema 1: Considere un sistema termodinámico cuya ecuación fundamental es:

$$U = (\frac{v_0\theta}{R^2})\frac{S^3}{NV}$$

a) Hallar las tres ecuaciones de estado correspondientes.

b) Encuentre el valor de μ en función de T, V y N.

c) Muestre en un diagrama la dependencia de la presión con respecto al volumen a temperatura fija. Represente dos de tales isotermas indicando cuál de ellas corresponde a la temperatura más alta.

Problema 2: Transformada de Legendre

a) Sea una función $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ de modo tal que $df = \sum_{i=1}^{n} u_i dx_i$:, donde $u_i = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{x_j}$. Si definimos la función $g = f - \sum_{i=r+1}^{n} u_i x_i$, demuestre que:

$$g = g(x_1, \ldots, x_r, u_{r+1}, \ldots, u_n) \text{ (transformada de Legendre de } f \text{)}$$

b) Sabiendo que la diferencial de la energía interna se expresa como

$$dE = TdS - p\,dV + \sum_i \mu_i dn_i,$$

Construya las transformadas de Legendre de la energía y exprese sus formas diferenciales, que sean funciones naturales de:

i) $(T,\, V,\, n)$: energía libre de Helmholtz A.
ii) $(T,\, p,\, n)$: energía libre de Gibbs G.
iii) $(S,\, p,\, n)$: entalpía H.
iv) Analice la transformación a las variables $(T,\, p, \mu)$ luego de resolver el Problema 3.
v) ¿Es posible realizar una transformación a las variables $(S,\, T,\, p)$?

Problema 3: Ecuación de Gibbs Duhem. Una función $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ es homogénea de primer orden si satisface que $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n)$, donde $\lambda =$ cte.

a) Demuestre que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_j} x_i$

b) Sabiendo que la energía interna es una función homogénea de primer orden, demuestre que

$$E = TS - pV + \sum_i \mu_i n_i,$$

y por lo tanto

$$0 = SdT - V dp + \sum_i n_i d\mu_i \text{ (relación de Gibbs-Duhem)}$$

Asimismo, muestre que para un sistema de un sólo componente, μ es la energía libre de Gibbs por mol.

Problema 4: Considere un resorte que sigue la *ley de Hooke*, es decir, que la elongación es proporcional a la tensión cuando está estirado a T constante. La constante de proporcionalidad es dependiente de la temperatura.

a) Determinar la energía libre A, la energía interna y la entropía S como funciones de x (despreciar la expansión térmica).

Problema 5: Es sabido que cuando se estira a cierta distancia un determinado resorte este se rompe. Antes de que esto suceda (pequeñas longitudes) la energía libre del resorte está dada por

$$\frac{A}{M} = \frac{1}{2}kx^2\,,$$

siendo M la masa del resorte y x su longitud por unidad de masa. Luego de romperse (grandes longitudes)

$$\frac{A}{M} = \frac{1}{2}h(x - x_0)^2 + c$$

En estas ecuaciones, k, h, x_0 y c son todas independientes de x pero pueden depender de T. Asimismo $k > h$ y $c, x_0 > 0$ para todo valor de T.

a) Determinar la ecuación de estado $f \equiv \text{tensión} = f(T, x)$ del resorte para longitudes pequeñas y grandes.

b) En forma similar, determinar los potenciales químicos

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial M}\right)_{T,L}\,,$$

donde L es la longitud total del resorte.

c) Mostrar que

$$\mu = \frac{A}{M} - fx$$

d) Encontrar la fuerza que a una dada temperatura rompe el resorte.

e) Determinar el cambio discontínuo en x cuando el resorte se rompe.

Problema 6: Considere un cuerpo paramagnético con una susceptibilidad magnética isotérmica χ_T.

a) Obtenga la energía libre A como función de la magnetización M y de la temperatura T.

b) Encuentre la expresión de la energía interna E y la entropía S.

Problema 7: Considere un gas ideal de H_2 en condiciones normales de presión y temperatura ($T = 300K$ y $p = 1\text{atm}$)

a) Estime $\frac{\hbar}{\sqrt{2mk_BT}}(\frac{N}{V})$
Le resultarán útiles los siguientes datos: $\hbar c \simeq 2000eV\AA$, $m_Hc^2 \simeq 2000Mev, k_B \simeq 8{,}3 \times 10^{-5}eV/K, N_{\text{Avogadro}} = 6{,}023 \times 10^{23}$ y $V_{\text{mol}} = 22{,}4lt$

b) Idem 1 para un gas de O_2.