

Física Teórica 3

Serie 10: Ecuaciones de Langevin, Fokker Planck y Maestras

1^{er} Cuatrimestre de 2010

Problema 1: Teorema de Nyquist

- Escriba la ecuación de *Langevin* para un circuito eléctrico con autoinducción L .
- Relacione la amplitud espectral del ruido térmico en un circuito con la resistencia y la temperatura.

Problema 2: Se observa el movimiento *Browniano* de partículas de radio $4 \times 10^{-5} \text{cm}$, sumergidas en un líquido de viscosidad $\eta = 0,0278 \text{g cm}^{-1} \text{s}^{-1}$, a una temperatura de $18,8^\circ \text{C}$. El valor observado de $\langle x^2 \rangle$ en un intervalo de 10s es $3,3 \times 10^{-8} \text{cm}^2$. Determine a partir de estos datos la constante de Boltzmann k_B .

Problema 3: Movimiento Browniano de una partícula libre

Considere el movimiento Browniano unidimensional de una partícula en ausencia de fuerzas externas. Se desea hallar la evolución de su distribución de velocidades $P(v, t)$ sabiendo que en el instante inicial la velocidad de la partícula es v_0 , o sea $P(v, 0) = \delta(v - v_0)$.

Ayuda: intente llevar la ecuación de Fokker-Planck a la forma de una ecuación de difusión

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = C \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2},$$

a través de cambio $P(v, t) = \exp(\gamma t) Q(u, t)$; $u = v \exp(\gamma t)$ definiendo la nueva escala de tiempo,

$$\theta = [\exp(2\gamma t) - 1] / 2\gamma$$

con $\gamma = \alpha/m$, $\alpha =$ constante de rozamiento, $m =$ masa de la partícula.

Problema 4: Movimiento Browniano de un oscilador en alta fricción

Halle la evolución de la función de distribución correspondiente a la elongación de un oscilador que efectúa movimiento Browniano en un medio de alta fricción a temperatura T . Resuelva para una condición inicial arbitraria $P(x, t = 0)$ y en particular si $P(x, t = 0) \sim (y - 1)^2 \exp(-y^2)$; $y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2k_B T}} x$.

Ayuda: tenga en cuenta que es muy fácil escribir $(y - 1)^2$ a través de los polinomios de *Hermite*.

Problema 5: La ecuación de Langevin para una partícula de masa M en movimiento Browniano, la cual se halla sometida a una fuerza restauradora $-\lambda x$, es de la forma:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{B} \frac{dx}{dt} + \lambda x = F(t)$$

- Halle a partir de esta ecuación expresiones para los valores medios de $\langle x^2(t) \rangle$ y $\langle v^2(t) \rangle$
- Compruebe además que para $\lambda = 0$ se reproduce la situación del problema 3, mientras que para $M \rightarrow 0$ se tiende a las condiciones del problema 4.

Problema 6: Movimiento Browniano de un rotador en alta fricción

Sea un rotador de masa m es decir, una varilla de masa despreciable que tiene uno de sus extremos fijo y en el otro una masa m que se mueve así libremente sobre una superficie esférica de coordenadas (θ, φ) . Suponga que este rotador se halla inmerso en un medio de alta constante de fricción y a temperatura T .

- a) Halle la evolución de la función de distribución de las coordenadas del rotador $P(\theta, \varphi, t)$.
- b) Compare el espectro de frecuencias de relajación de este problema con el espectro del observable L^2 (momento angular de la mecánica cuántica).