Física Teórica 3
Serie 6: Gas de Fermi

1^{er} Cuatrimestre de 2010

Problema 1: Considere un sistema formado por dos partículas que pueden estar en cualquiera de tres estados cuánticos de energías 0, ε y 2ε. El sistema está en contacto con un foco térmico a temperatura T.

a) Escriba una expresión para la función de partición Z si:

i) las partículas obedecen a la estadística de Maxwell-Boltzmann y son consideradas distinguibles.

ii) las partículas obedecen a la estadística de Bose-Einstein.

iii) las partículas obedecen a la estadística de Fermi-Dirac.

iv) Suponiendo que $\exp(-\beta\varepsilon) = \frac{1}{2}$, calcule en unidades de ε la energía media en cada uno de los tres casos y compare.

Problema 2: Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio a una temperatura del orden de $10^7 K$ y a una densidad elevada del orden de $10^{10} kg/m^3$. Muestre que los átomos de helio deben encontrarse totalmente ionizados y que el gas de electrones resultante puede considerarse como si estuviese a temperatura nula.
Dato: tenga en cuenta que la energía de ionización del helio es del orden de $10eV$ y que $k_B = 8{,}6 \times 10^{-5} eV/K$.

Problema 3: Para un gas ideal de N electrones en un volumen V:

a) Calcular la energía de Fermi.

b) Calcular la energía total E a $T = 0$.

c) Muestre que para cualquier temperatura se cumple $E = 3pV/2$. Usando esta relación y lo hallado en b), encuentre una expresión para la presión p a $T = 0$.

Problema 4: Sea un gas de electrones que pueden moverse en dos dimensiones sobre un área A.

a) Halle una expresión para pV/k_BT en función de la temperatura y el potencial químico.

b) Halle la energía de Fermi en términos del número medio de partículas a temperatura cero.

c) Muestre que el potencial químico viene dado, como función de la temperatura, por:

$$\mu(T) = \epsilon_F \left\{ 1 + \frac{1}{\beta\varepsilon_F} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_F}) \right\}$$

d) Calcule el calor específico cuando el sistema está altamente degenerado y muestre que es proporcional a la temperatura.

Problema 5: Un electrón en un campo magnético H tiene una energía $\pm\mu_B H$ dependiendo de que el spin sea paralelo o antiparalelo al campo. Suponiendo un gas de electrones a temperatura cero sujeto a dicho campo,

a) Halle el valor máximo de la densidad N/V tal que todos los spines sean paralelos entre sí. ¿Cuánto vale la energía del gas en ese caso?

b) Ahora suponga como dato una energía de *Fermi* mayor que $\mu_B H$. Halle la magnetización y, a partir de ella, la susceptibilidad.

Problema 6: Considere un gas de electrones en el límite ultrarrelativista. En ese caso, la energía de una partícula está relacionada con su impulso mediante $\varepsilon = cp$.

a) Obtenga la relación entre E y N para T=0.

b) Obtenga $\mu(T)$ al menor orden no nulo en la temperatura.

c) Idem a) y b) pero para el caso bidimensional.