

# Física Teórica 3

## Serie 9: Ecuación de Boltzmann

1<sup>er</sup> Cuatrimestre de 2010

**Problema 1:** Suponga un gas clásico formado por  $N$  partículas. Sea  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  la función de distribución de una partícula ( $\int \int d^3x d^3v f(\vec{x}, \vec{v}, t) = N$ ) y  $\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)$  una cierta magnitud asociada a una partícula del gas. Escriba las expresiones correspondientes a:

- Densidad de partículas en el punto  $\vec{x}$  y al tiempo  $t$ .
- Valor medio de  $\alpha$  en el punto  $\vec{x}$  y al tiempo  $t$ .
- Flujo de  $\alpha$  a través de un elemento de área de normal  $\hat{j}$  que se mueve con velocidad  $\vec{u}_0$  (usualmente se toma  $\vec{u}_0 = 0$  ó  $\vec{u}_0 \equiv$  velocidad media del gas).  
Como casos particulares de flujo considere:
  - La densidad de corriente (flujo de carga,  $\vec{u}_0 = 0$ )
  - El flujo térmico (flujo de energía cinética,  $\vec{u}_0 = 0$ ).
  - El llamado *tensor de presión*, el cual se define como el tensor simétrico cuya componente  $i, j$  viene dada por el flujo de componente  $\hat{i}$  de impulso lineal referido a la velocidad media del gas ( $\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) = m(v_i - \langle v_i \rangle)$ ), a través de un elemento de área de normal  $\hat{j}$  que se mueve con la velocidad media del gas ( $\vec{u}_0 = \langle \vec{v} \rangle$ ).
- Función de distribución de equilibrio suponiendo que actúa sobre las partículas un potencial externo  $V(\vec{x})$ .

**Problema 2:** Demostrar que la integral en el espacio de velocidades del término de colisión es idénticamente nula si y sólo si se cumple la ecuación de continuidad.

**Nota:** suponga que la fuerza exterior actuante sobre las partículas cumple  $\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{F} = 0$ . Observe que esta condición incluye el caso de una fuerza magnética  $\vec{v} \times \vec{B}$ .

**Problema 3:** Calcular la viscosidad y la conductividad térmica de un gas monoatómico diluido. Para ello siga los siguientes pasos:

- Considere que el fluido se halla encerrado entre dos placas paralelas separadas por una distancia  $L$ . La placa en  $z = 0$  está quieta, mientras que la placa en  $z = L$  se mueve en la dirección  $\hat{x}$  con velocidad  $u_x$ . Las capas de fluido que se hallan debajo del plano  $z = \text{cte}$ . ejercen un esfuerzo tangencial  $P_{zx}$  (componente  $zx$  del tensor de presión) sobre el fluido que se halla por encima de ella.  
Si  $\partial u_x / \partial z$  es pequeño se cumple que  $P_{zx} = -\eta \partial u_x / \partial z$  donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad.
- Encuentre una expresión para dicho coeficiente y observe que el mismo es proporcional al tiempo de relajación  $\tau$ .
- Considere ahora que el gas está en reposo pero existe un pequeño gradiente de temperatura en la dirección  $\hat{z}$ .
  - Calcule el flujo térmico en la situación estacionaria y demuestre que es proporcional a  $-\partial T / \partial z$ .

ii) Calcule el coeficiente de proporcionalidad (conductividad térmica  $\kappa$ ).

**Ayuda:** considere que  $f^o$  es una distribución Maxwelliana con  $n = n(z)$  y  $\beta = \beta(z)$ . Relacione  $\partial n(z)/\partial z$  con  $\partial\beta/\partial z$  pidiendo que  $\langle v_z \rangle = 0$ . Esto es, que no hay convección.

d) Halle el cociente  $\kappa/\eta$  y vea que es independiente de  $T$  y de  $\tau$ .

**Problema 4:** Calcule, utilizando la *ecuación de Boltzmann* en la aproximación de tiempo de relajación, la conductividad eléctrica de un gas Maxwelliano de electrones con un fondo iónico neutralizado. Esta es una buena aproximación para un plasma: suponer los iones fijos y que la corriente es debida sólo a los electrones.

**Problema 5:** Considere un gas Maxwelliano en estado estacionario sometido a un pequeño gradiente de temperatura unidimensional. La densidad de partículas es homogénea.

a) Proponga como solución de la ecuación de Boltzmann una Maxwelliana local (con  $T = T(z)$ ) más una pequeña corrección.

b) Calcule la velocidad media e interprete el resultado.

c) Escriba la ecuación de continuidad para ese gas.

d) A partir de lo obtenido en b) y c) deduzca la dependencia de  $T$  con  $z$  y también la de la presión con  $z$ .

e) Calcule el flujo térmico y compare con lo obtenido en el problema 3 b).

**Problema 6:** Sobre una chapa conductora se aplican un campo magnético en la dirección  $\hat{z}$  y un campo eléctrico según  $\hat{x}$ . El efecto resultante es conocido como *efecto Hall*. Demostrar que para el caso isotérmico, el coeficiente *Hall*  $R_H = \frac{|E_y|}{j_x H_z}$  vale  $R_H = 1/nec$ .

**Problema 7:** Suponga un recipiente de paredes adiabáticas y tapas mantenidas a distintas temperaturas ( $T_1$  y  $T_2$ ), el cual contiene un gas Maxwelliano en estado estacionario. Tenga en cuenta además, la acción de un campo gravitatorio uniforme que actúa en dirección perpendicular a las tapas.

a) Calcule el flujo térmico en función de la masa de las partículas  $m$ , su densidad  $n$ , la temperatura  $T$ , su gradiente  $dT/dz$  y el tiempo de relajación  $\tau$ .

b) Utilizando la condición de que el flujo térmico debe ser uniforme (explique por qué), demuestre que la temperatura debe satisfacer una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2T}{dz^2} = f(T) \frac{dT}{dz}$$

y halle  $f(T)$ .

c) Dibuje gráficos cualitativos de  $T(z)$  distinguiendo los casos  $T_1 > T_2$  y  $T_2 < T_1$  y compárelos con el caso sin gravedad.