

Laboratorio 4.

Piezoelectricidad.

Objetivo

Analizar el comportamiento de un material piezoeléctrico sometido a un campo eléctrico de frecuencia variable.

Estudiar el modelo eléctrico equivalente, determinado a partir de las frecuencias de resonancia serie y paralelo, y del factor de mérito del piezoeléctrico.

El efecto piezoeléctrico

Un material tiene características piezoeléctricas cuando al ser sometido a compresiones o deformaciones mecánicas (además de variar sus dimensiones físicas de acuerdo con las leyes de la elasticidad), produce una polarización eléctrica, dada por la relación

$$\bar{P} = \bar{\bar{d}} \cdot \bar{\sigma}. \quad (1)$$

\bar{P} es el vector de polarización eléctrica, $\bar{\sigma}$ es el tensor de tensiones (de segundo rango, o sea una matriz de 3x3), y $\bar{\bar{d}}$ el tensor piezoeléctrico (de tercer rango). La componente σ_{jk} del tensor de tensiones indica la componente j de la tensión del cuerpo a través de un área unitaria perpendicular al eje k . Así, al escribir (1) en forma más explícita

$$P_i = \sum_{j,k} d_{ijk} \sigma_{jk} \quad (2)$$

queda claro que $\bar{\bar{d}}$ es un tensor propio del material, que determina cuál es la polarización inducida en cada dirección por las tensiones mecánicas aplicadas al mismo.

De la misma forma, un material piezoeléctrico se deformará mecánicamente al aplicársele un campo eléctrico \bar{E} , según la siguiente regla:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_k d_{ijk} E_k ; \quad (3)$$

se puede ver que es el mismo tensor $\bar{\bar{d}}$ el que determina cuál será la componente i de la deformación a través de un área perpendicular al eje j (ε_{ij}), producida por un campo eléctrico \bar{E} .

Entonces un material piezoeléctrico, si es sometido –por ejemplo- a vibraciones acústicas, generará entre sus caras un campo eléctrico de la misma frecuencia que la

vibración (así funcionan los micrófonos piezoeléctricos, y a la inversa los parlantes de agudos o *tweeters*). La respuesta en frecuencia de estos materiales no es plana, es decir, hay ciertas frecuencias para las cuales la transferencia de energía eléctrica-mecánica es máxima, y otras para las cuales ésta es mínima. En este sentido, el piezoeléctrico se comporta de manera análoga a un circuito eléctrico *RLC* sometido a una excitación de corriente alterna (figura 1).

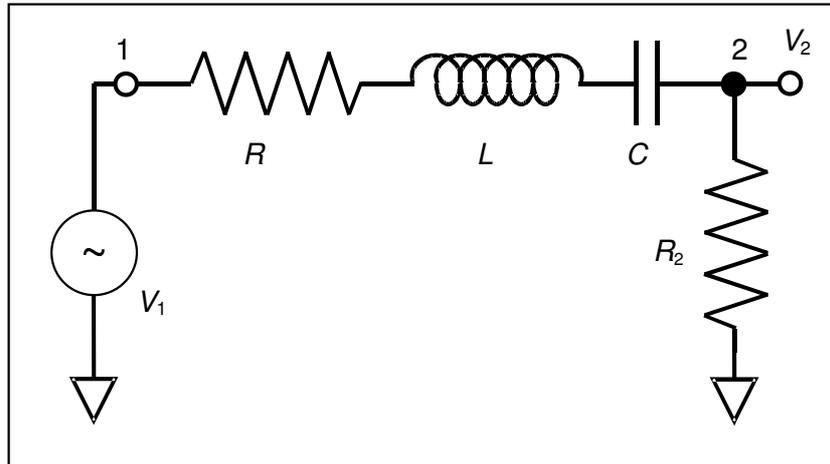


Figura 1: Circuito *RLC* serie, conectado a una fuente de corriente alterna

La analogía es clara si se recuerda que la ecuación de movimiento de un cuerpo vibrando debido a la acción de una fuerza externa dependiente del tiempo es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (4)$$

donde m es la masa del cuerpo, b el coeficiente de amortiguamiento (pérdida mecánica interna, en este caso), y k es la constante elástica del cuerpo. Esta ecuación es formalmente igual a la ecuación correspondiente a un circuito *RLC* serie, dada por:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV_1}{dt} \quad (5)$$

La diferencia está dada por lo que se denomina el factor de mérito o de calidad del resonador, Q . En dicho circuito, este factor se define como

$$Q = \omega_s \frac{L}{R} \quad (6)$$

donde ω_s es la frecuencia de resonancia. Este factor de mérito es un parámetro general de los circuitos resonantes, y se puede definir en forma más general como

$$Q = \frac{\omega_s}{\omega_+ - \omega_-} \quad (7)$$

donde ω_+ y ω_- son las frecuencias para las cuales la potencia transferida del generador al cristal (análogamente, de 1 a 2 en el circuito de la figura 1) cae a la mitad de la

potencia máxima que se transfiere en resonancia. En consecuencia, el ancho de la resonancia es inversamente proporcional a Q o dicho de otro modo, un valor grande de Q significa que la resonancia es muy estrecha y la estabilidad del resonador es grande (v_s está muy bien definida). Es por esto que a Q se lo denomina *factor de calidad* del oscilador. El factor de calidad de un oscilador cristalino es mucho más grande que el del circuito eléctrico. Es por esto que cuando se requiere un resonador estable y preciso se recurre a este tipo de elementos, por sobre los osciladores eléctricos.

La impedancia del circuito eléctrico equivalente de la figura 1, $Z=R+j X$, es

$$Z_s = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (8)$$

Si V_1 y V_2 son las tensiones de entrada y salida, se calcula a partir de la corriente que circula por el circuito, I :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1 \exp(j\omega t) \\ V_2 &= V_1 - IZ = V_1 \frac{R_2}{R_2 + Z} \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad (9)$$

y la transferencia del circuito RLC resulta

$$T = \left| \frac{V_2}{V_1} \right| = \frac{R_2}{\sqrt{(R + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (10)$$

La potencia transferida, en cambio, se calcula

$$P_{trans} = \langle \Re(V_1 I) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_1^2 (R + R_2)}{(R + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (11)$$

donde los corchetes indican un valor medio sobre un período. La potencia máxima transferida corresponde a la frecuencia de resonancia, $\omega_s = 1/\sqrt{LC}$. Para definir el factor Q en términos de los elementos del circuito, a partir de (11) se encuentran las frecuencias ω_+ y ω_- , para las cuales la potencia transferida cae a la mitad. Así, Q resulta

$$Q = \frac{\omega_s L}{R + R_2} \quad (12)$$

El efecto de los terminales

El circuito eléctrico equivalente a tener en cuenta es un poco más complicado que el de la figura 1, ya que los dos electrodos que están sobre el piezoeléctrico funcionan

como una capacidad adicional, en paralelo con el oscilador cristalino. Es por esto que en el circuito eléctrico equivalente hay que incluir este efecto, como una capacidad C_2 en paralelo con el “piezoeléctrico” (figura 3):

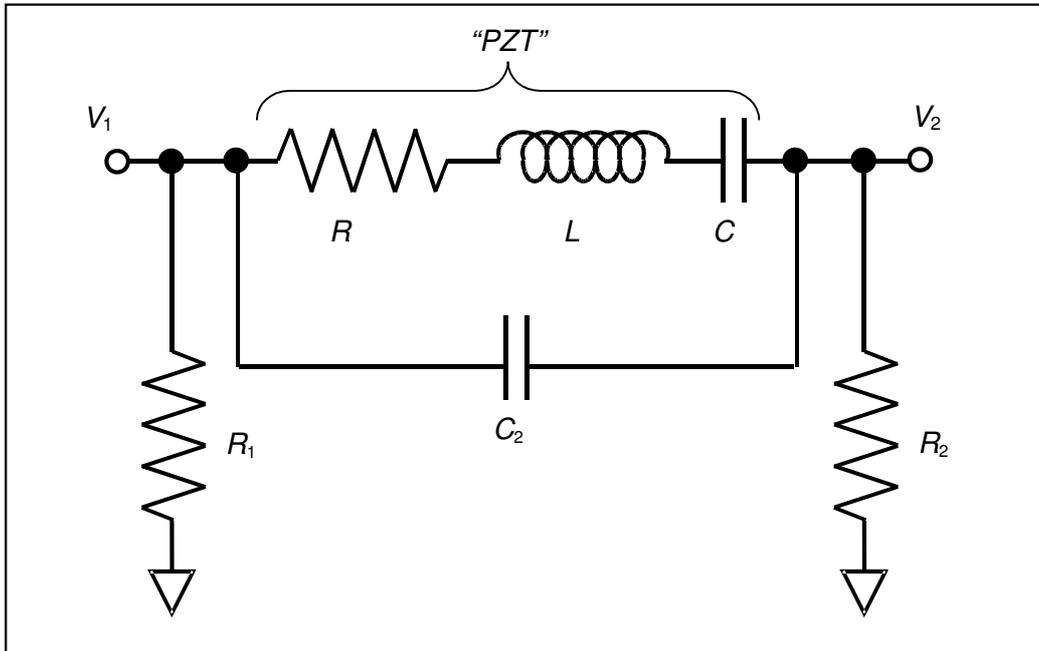


Figura 3: Circuito equivalente del piezoeléctrico con los electrodos de contacto

La impedancia Z del circuito equivalente de la figura 3 se calcula fácilmente: hay que sumar las impedancias en paralelo de las ramas superior (Z_1) e inferior (Z_2):

$$\begin{aligned} Z_1 &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right); \\ Z_2 &= -j\frac{1}{\omega C_2}; \end{aligned} \quad (8)$$

Y la inversa de esta impedancia Z es (Z^{-1} es la admitancia Y)

$$\frac{1}{Z} \equiv Y = \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + j \left[\omega C_2 - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right]. \quad (9)$$

Se puede calcular el módulo cuadrado de la impedancia, que da la siguiente expresión:

$$|Z|^2 = \frac{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{\omega^2 C_2^2 R^2 + \left[1 - \omega C_2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]^2}; \quad (10)$$

las resonancias del circuito de la figura 3, en principio se pueden obtener de(10), pero los mínimos de $|Z|^2$ no son fáciles de obtener. Sin embargo, si se desprecia R , suponiendo que la resistencia equivalente es chica comparada con la parte reactiva (X), la expresión tiene un cero en

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11)$$

(propiamente dicho, ω_s es un valor aproximado a la resonancia serie del circuito, donde la impedancia es puramente resistiva y la transferencia es máxima), y tiene un polo o diverge para

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_2} \right)} \quad (12)$$

con lo que ω_p es la aproximación de la antirresonancia, o resonancia paralelo del circuito. En este caso, la impedancia es máxima y la transferencia tiene un mínimo.

El valor de R se puede estimar midiendo V_1/V_2 y buscando cuál es el valor de la resistencia correspondiente a ese cociente para un circuito puramente resistivo. Midiendo el ancho Q de la resonancia serie se puede calcular L , la inductancia del modelo equivalente [usando la expresión (12)], y finalmente con los valores de ω_s y ω_p medidos se pueden determinar los valores de C y C_2 . Sin embargo, no hay que olvidar que las expresiones (11) y (12) son sólo aproximaciones, por lo que una vez calculados los valores de R , L , C y C_2 a partir de las mediciones habrá que verificar si la aproximación $R \ll X$ es consistente.

El experimento

En esta práctica se estudiarán las características de un cristal de cuarzo como resonador piezoeléctrico, siguiendo la analogía con circuitos eléctricos. Sobre el cristal se aplica una señal eléctrica armónica, que genera oscilaciones mecánicas. Estas oscilaciones, a su vez, generan una señal eléctrica que se registra en otra región del cristal. Concretamente, el objeto de estudio es un monocristal de cuarzo cortado a $+5^\circ$ de uno de los ejes cristalinos, en forma de prisma de base cuadrada de 4mm de lado y 50mm de longitud. Dos de sus caras laterales están metalizadas y poseen dos alambres soldados. Sobre uno de ellos se aplica la señal de entrada (V_1) y sobre el otro se registra la señal transmitida (V_2), como se muestra en la figura 2.

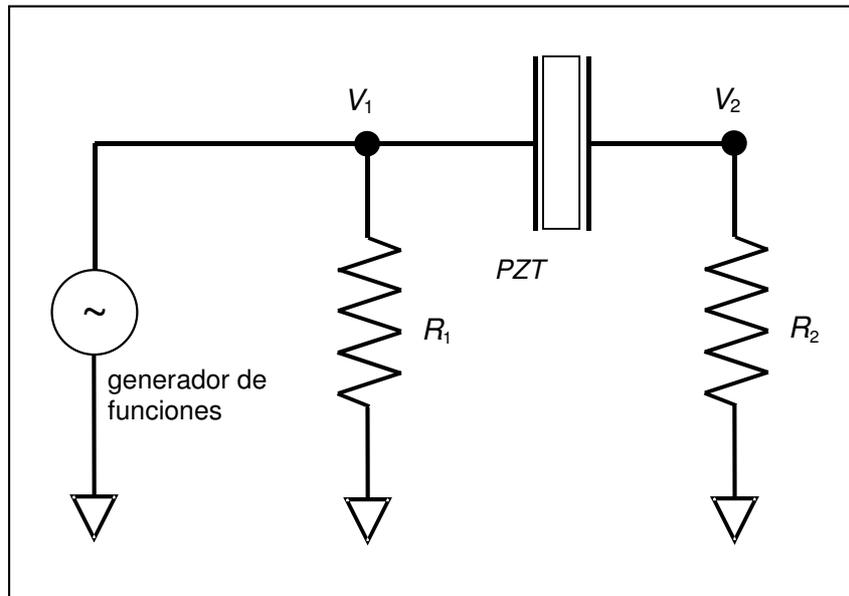


Figura 2: circuito utilizado en esta práctica. PZT:piezoeléctrico

Las tensiones V_1 y V_2 se pueden medir simultáneamente con un osciloscopio. De esta forma se pueden medir amplitudes y fases relativas.

En el mismo dispositivo sobre el cual está montado el piezoeléctrico hay una serie de resistencias variables que permiten, una vez ubicada la resonancia en serie, estimar R igualando la transferencia del circuito con la de esta resistencia variable.

- **Es válida la aproximación de $R \ll X$? Cuánto vale el módulo de la impedancia Z [eq (10)] para $\omega = \omega_s$? Utilizando los valores calculados de R , L , C y C_2 estime el error que comete en esa aproximación.**
- **Podría construir un circuito eléctrico RLC cuya transferencia sea comparable a la del piezoeléctrico?**
- **Una forma alternativa de estimar R es excitar al sistema con una onda cuadrada, de baja frecuencia, y observar la amortiguación del transitorio. Cómo debería ser ésta si se supone que R es chica? Pruebe!**

Bibliografía

R.P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II* (Addison-Wesley Iberoamericana, 1987).

E. Rodríguez Trelles. *Temas de Electricidad y Magnetismo*. (EUDEBA)