Física Teórica 1 - ELECTROMAGNETISMO

Primer Cuatrimestre 2001

Repaso de Electrostática y Magnetostática

I. Transformaciones de Simetría. Ley de Gauss. Ley de Ampere.

1. En cada una de las siguientes distribuciones de carga: i) Escribir la densidad de carga $\rho(\vec{r})$ para todo $\vec{r}$. ii) Utilizando transformaciones de simetría, determinar la dependencia funcional y las componentes del campo eléctrico. iii) Utilizando la ley de Gauss, calcular el campo eléctrico. Graficar cualitativamente su módulo en función de una coordenada relevante. iv) Calcular el potencial escalar $\Phi(\vec{r})$. Graficar cualitativamente.

   - a. Una esfera cargada uniformemente en volumen.
   - b. Una esfera cargada uniformemente en superficie.
   - c. Una esfera cargada en volumen con una densidad de carga que depende sólo de la coordenada radial.
   - d. Un plano infinito cargado uniformemente en superficie.
   - e. Dos planos paralelos, infinitos, cargados uniformemente con densidades σ_1 y σ_2. Considerar los casos especiales $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_1 = -\sigma_2$.
   - f. Un hilo cargado con densidad uniforme.
   - g. Un cilindro infinito cargado uniformemente en volumen.
   - h. Un cilindro infinito cargado uniformemente en superficie.

2. En cada una de las siguientes distribuciones de corriente: i) Escribir la densidad de corriente $\vec{j}(\vec{r})$ para todo $\vec{r}$. ii) Utilizando transformaciones de simetría, determinar la dependencia funcional y las componentes del campo magnético. iii) Utilizando la ley de Ampere, calcular el campo magnético. Graficar cualitativamente su módulo en función de una coordenada relevante. iv) Calcular el potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$. Graficar cualitativamente su módulo.

- a. un hilo infinito por el que circula una corriente I.
- b. Un plano infinito con densidad de corriente superficial uniforme.
- c. Dos planos paralelos, infinitos, con corrientes superficiales uniformes de igual módulo y cuyas direcciones forman un ángulo α. Considerar los casos particulares $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$.
- d. Una corriente uniforme radial que fluye entre dos esferas concéntricas de radios a y b. Interpretar el resultado.
- e. Un cilindro infinito con corriente uniforme en su interior.
- f. Un cilindro infinito, hueco, con densidad superficial de corriente uniforme paralela al eje del mismo.
- g. Un solenoide infinito con n vueltas por unidad de longitud, alimentado por una corriente I.
- h. Un toro de sección circular con un total de N vueltas. ¿Qué ocurre si la sección del toro es arbitraria?

II. Integración directa: solución de Poisson.

3. Calcular el potencial escalar electrostático mediante la integral de Poisson, para las siguientes distribuciones de carga:

   - a. Un disco de radio a uniformemente cargado.
   - b. Un anillo de radio a uniformemente cargado. Hacer el cálculo para puntos sobre el eje perpendicular al plano de la distribución de cargas. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos y muy alejados de dicho plano.
   - c. Un segmento de longitud l uniformemente cargado. Obtener expresiones límites para un punto muy cercano al punto medio del segmento y para otro muy alejado.

   Interpretar físicamente los resultados (sobre todo los de las expresiones límites), y graficar cualitativamente.

4. a) Se tiene un disco de radio a, cargado con una densidad superficial uniforme, rotando con una velocidad angular constante ω alrededor de su eje. i) Usar la ley de Biot-Savart

para calcular el campo magnético producido en todos los puntos sobre el eje del disco. ii) Encontrar una expresión asintótica para puntos muy alejados del disco. iii) Calcular el momento magnético del disco. Comparar con el campo hallado en ii).

b) Idem para una espira circular con corriente I.

5. En el estado fundamental del átomo de hidrógeno, se puede representar el potencial de interacción entre el núcleo y el electrón por medio del potencial de Yukawa:

$$\Phi(r) = \frac{e}{r}\exp(-2r/a),$$

donde a es el radio de Bohr y e es la carga del electrón.

- a. Encontrar la densidad de carga para todo r.
- b. Interpretar el resultado.
- c. Verificar que esa distribución corresponde a la de un átomo neutro.
- d. ¿Se contradice el resultado con el teorema de Earnshaw?

6. Se tiene un solenoide de longitud L, radio a y n vueltas por unidad de longitud, por el que circula una corriente I.

- a. Demostrar que el campo magnético a lo largo del eje es:

$$B_z = \frac{2\pi nI}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

donde θ_1 y θ_2 se muestran en la figura.

- b. Si el solenoide es largo ($a \ll L$), demostrar que la componente radial del campo magnético se puede escribir:

$$B_r \approx \frac{96\pi nI}{c}\Big(\frac{a^2 zr}{L^4}\Big),$$

válida hasta segundo orden en a/L para puntos cercanos al centro del solenoide ($z \ll L, r \ll a$). En esta expresión el origen de coordenadas coincide con el centro geométrico del solenoide.

- c. Como caso límite hallar el campo magnético producido por un solenoide infinito. Verificar el resultado comparándolo con el del problema 2 g).

III. Principio de Superposición

7. a. Usando el principio de superposición, encontrar el campo y el potencial electrostático (en todo punto del espacio) producido por dos hilos paralelos, infinitos, uniformemente cargados con $\lambda_1 = -\lambda_2$.
   b. Encontrar y dibujar cualitativamente las equipotenciales. ¿Qué aspecto tiene el campo en el plano equidistante entre los dos hilos?
   c. ¿Cómo puede usarse el resultado anterior para resolver el problema de dos cilindros, separados por una distancia mayor que la suma de sus radios, a potenciales diferentes? ¿Por qué no se puede usar superposición en este caso?

8. A un cilindro infinito de radio a, se le ha hecho una cavidad cilíndrica de radio b, siendo sus ejes paralelos pero no coincidentes. La separación entre sus ejes es d, de modo que $d + b < a$.

   - a. Si el cilindro posee una densidad de carga volumétrica uniforme, calcular el campo eléctrico dentro de la cavidad interior. ¿Puede tal cilindro estar hecho de material conductor?
   - b. Si el cilindro se vuelve conductor y se le hace circular una densidad de corriente $\vec{j}$ uniforme paralela a su eje, calcular el campo magnético dentro de la cavidad interior.

   Notar que la cavidad "congela" el campo en el valor que tenía en su centro antes de haberse realizado, y que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí.

9. Se tienen dos cáscaras cilíndricas concéntricas de radios a y b. Calcular el potencial electrostático para todo punto del espacio en los siguientes casos (justificar la superposición utilizada):

   - a. Los cilindros son conductores y están conectados a potenciales V_1 y V_2.
   - b. Los cilindros están cargados uniformemente con cargas Q_1 y Q_2 por unidad de longitud. ¿Qué sucedería si los cilindros fueran conductores?
   - c. El cilindro interior está conectado a potencial V y el exterior cargado con carga Q por unidad de longitud. Interpretar cada una de las contribuciones al potencial.

10. **a.** Calcular el potencial electrostático para todo punto del espacio producido por una esfera metálica a tierra rodeada por una cáscara esférica con una densidad de carga uniforme σ.

    b. Suponiendo conocido el potencial producido por una carga frente a una esfera a tierra, y el resultado del punto a), indicar esquemáticamente cómo utilizar el principio de superposición cuando se tienen dos cáscaras esféricas metálicas concéntricas en los siguientes casos:

    - b1) cáscara interior a tierra, cáscara exterior con densidad σ, carga puntual q en la región exterior
    - b2) cáscara interior a tierra, cáscara exterior con densidad σ, carga puntual q entre las dos cáscaras
    - b3) cáscara interior a V_1, cáscara exterior a V_2, carga puntual q en la región exterior.

IV. Preguntas Molestas

1. ¿Qué es una transformación de simetría?

2. ¿En que característica fundamental difieren las transformaciones de simetría que se usan para determinar dependencias funcionales de aquellas usadas para encontrar componentes de los campos?