Física Teórica 1 - ELECTROMAGNETISMO
Primer Cuatrimestre 2001

Serie 2:
Desarrollos Multipolares. Medios Materiales.
Función de Green. Método de imágenes

I. Problemas

1. **a)** Probar que *todos* los momentos multipolares de una distribución de carga esféricamente simétrica son nulos salvo el monopolar.
   b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del centro de momentos. Generalizar.
   c) Dado el desarrollo multipolar de dos distribuciones de carga $\rho_1(\vec{r})$ y $\rho_2(\vec{r})$,¿cómo es el desarrollo multipolar de la distribución total $\rho_1 + \rho_2$? ¿y si son tres ? Generalizar.

2. Se tiene una esfera conductora de radio a conectada a potencial V, rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ.
   a) Hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio mediante el método de imágenes, suponiendo conocido el problema de una carga puntual frente a una esfera conductora a tierra.
   b) Identificar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora. ¿Es única la distribución de cargas imagen?

3. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga (en el caso de tener momento cuadrupolar, determinar sus ejes principales):
   a) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
   b) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error porcentual cometido si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual, a distancias del orden de 1 m de su centro.
   c) Dos distribuciones lineales formadas por una sucesión equiespaciada, a distancia s, de cargas puntuales: la primera consta de tres cargas en el siguiente orden q, $-2q$, q; y la segunda consta de cuatro cargas $-q$, $3q$, $-3q$, q.
   d) Una distribución plana constituida por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternativamente en los vértices de un cuadrado de lado s.
   En los puntos c) y d) tomar el límite cuando $s \to 0$ con $q \cdot s^2 \to cte.$

4. Volvemos al problema de una esfera conductora de radio a conectada a potencial V, rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ.
   a) Hallar el potencial electrostático utilizando ahora el método de la función de Green.
   b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green.
   c) Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.

5. Un disco de radio a con centro en el origen de coordenadas y perpendicular al eje z tiene una distribución de carga $\sigma_d = \sigma_0(\frac{r}{a} - c)$. El disco está en el interior de una cáscara

esférica de radio b con distribución de carga permanente $\sigma_e = \sigma_0 cos\theta$. Sobre el eje z, a una distancia d del origen, hay un dipolo puntual de intensidad $\vec{p} = p_0\hat{z}$. Encontrar los valores de c y p_0 para que el primer momento multipolar no nulo de la distribución sea el cuadrupolar y calcular , en ese caso el potencial para puntos lejanos.

6. Se tiene una esfera de radio a conectada a tierra. A una distancia d del centro de la misma ($d > a$) hay un dipolo puntual $\vec{p} = p_0\hat{z}$.
a) Calcular el potencial y el campo eléctrico en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.
b) Idem que en a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.
c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera.
d) Hallar los momentos multipolares hasta el cuadrupolar para esta configuración.
e) ¿Cómo serían el potencial y el campo si la esfera estuviera aislada y descargada?

7. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio a con una densidad superficial de momento dipolar $\vec{P}$ perpendicular al disco. Hacer el cálculo para los puntos situados sobre el eje del mismo. Obtener expresiones límite para puntos muy cercanos y muy lejanos. Graficar e interpretar los resultados.

8. Se conecta a tierra una esfera conductora de radio a. Concéntrico con ella se coloca un anillo de radio b ($b > a$), cargado uniformemente con carga total Q.
a) Calcular el potencial en todo punto del espacio, usando el método de la función de Green.
b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo, utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica. Comparar con el resultado del punto a).
c) Hallar, por integración, la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?
d) Separar en la expresión para el potencial la contribución debida al anillo cargado y a las cargas inducidas. Halle los momentos multipolares, hasta el orden cuadrupolar inclusive, del anillo cargado y de las cargas inducidas por separado.
e) ¿Cómo resolvería por el método de Green si la esfera estuviera aislada y descargada? ¿Cómo se modificarían los momentos calculados en d) en este caso?
Fórmulas útiles: $P_l(0) = 0$ si $l = 2n+1$; $P_l(0) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$ si $l = 2n$.

9. La distribución de carga $\rho(\vec{r})$ de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del orden de 10^{-13}cm. Si bien el potencial de los núcleos se aproxima en general por $\phi = Ze/r$, ésto equivale a suponer que $\rho(\vec{r})$ está distribuído de forma esféricamente simétrica. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar Q distinto de cero. Esto equivale a decir que la distribución $\rho(\vec{r})$ se aparta de una esfera.
a) Para simplificar, considere que la distribución de carga $\rho(\vec{r})$ es uniforme en un elipsoide de revolución de semiejes a y b. Calcule Q respecto de ejes apropiados, usando que la carga total es $q = Ze$ (*Sugerencia:* si usa z como el eje de simetría del elipsoide, note que el cambio de variables $u = x/b$, $v = y/b$, $w = z/a$, convierte el dominio de integración en

la esfera de radio 1).

b) ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de Q_{zz}?

c) Ponga números: para $Z = 63, Q_{zz}/e = 2.5\ 10^{-24} cm^2$. Suponiendo que el radio medio es $R = (a+b)/2 = 7\ 10^{-13} cm$, determinar la diferencia $(a-b)/R$.

d) Un núcleo con momento cuadrupolar Q_{zz} se halla en un campo eléctrico externo con simetría cilíndrica y con un gradiente $\partial_z E_z \neq 0$. Muestre que la energía de interacción entre el cuadrupolo y el campo es:

$$W = -\frac{Q_{zz}}{4} \partial_z E_z$$

10. Hallar la función de Green para condiciones de Dirichlet, para la región interna entre dos esferas concéntricas de radios a y b. Utilizar el método de imágenes. Comparar el resultado con el ya obtenido por separación de variables.
Sugerencia: Es necesario resolver a través de una serie infinita de imágenes. Hallar primero una relación de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes. Construir luego la serie de potenciales y escribirla de forma tal que pueda ser comparada con el resultado obtenido en la serie de separación de variables.

11. **a)** En un medio de constante dieléctrica ϵ se sumerge una esfera conductora de radio a cargada con una carga total Q. Hallar los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en todo punto del espacio, y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.
b) La misma esfera conductora del caso anterior se conecta ahora a una batería de potencial V. Resolver lo mismo del caso anterior.
c) Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, se manifiesta una diferencia esencial entre ellos: la forma de dependencia de los campos con ϵ. Explicar las causas de esta diferencia.

12. Considere el semiespacio limitado por un contorno plano con una protuberancia semiesférica de radio a. El contorno es conductor y está conectado a tierra.
a) Calcular la función de Green para este semiespacio. ¿Qué método utilizaría? Identificar cada contribución a esta función.
b) Se coloca un dipolo puntual a una distancia d del centro de la semiesfera y apuntando en la dirección perpendicular al plano. Hallar el potencial en el semiespacio donde se encuentra el dipolo, utilizando la función de Green hallada en el punto anterior.

13. Por un cable rectilíneo de radio a circula una corriente I. Concéntrico con el cable hay un cilindro de hierro dulce ($\mu = 1000$) de radio interior b y exterior c. Dentro y fuera del cilindro hay vacío. La permeabilidad del cable vale 1.
a) Calcular y graficar $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$ en todo punto del espacio.
b) ¿Es efectivo el cilindro de hierro dulce para apantallar el campo magnético en la zona $r > a$?
c) Encontrar la densidad de corriente de magnetización en volumen y en superficie y las cargas de magnetización.
d) Explicar la relación entre cada campo y sus fuentes.

14. Un método (ideal) para medir el campo eléctrico en un punto de un medio material consiste en abrir pequeñas cavidades centradas en ese punto y medir el campo eléctrico en su interior. Suponga un medio dieléctrico en el que existe un campo eléctrico uniforme.
a) Se abre una cavidad en forma de paralelepípedo muy achatado, o sea, con una dimensión mucho menor que cualquiera de las otras dos. Determine el campo en el centro de la cavidad y la densidad superficial de carga inducida, para las dos orientaciones siguientes: i) el corte es paralelo al campo; ii) el corte es perpendicular al campo.
b) Repita el análisis del punto anterior si la cavidad es de forma esférica. ¿Dependen los resultados del radio de la esfera?

II. Preguntas Molestas

1. **a.** ¿Cuál es el cuadrupolo de un dipolo ideal?
b. ¿Cuál es el dipolo de una carga puntual? ¿y el cuadrupolo?
c. ¿De qué dependen las respuestas a las preguntas anteriores?

2. ¿Cuáles son los momentos multipolares no nulos de las siguientes distribuciones?
a. Cilindro infinito cargado con una densidad arbitraria
b. Un dipolo en la dirección z rodeado por una cáscara esférica conductora conectada a tierra no concéntrica con él.

3. En el caso de un cuerpo con densidad de magnetización permanente $\vec{M}$, $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$. Como $\vec{B} = \mu\vec{H}$, tenemos que: $\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{\mu-1}\vec{M}$. O sea que siempre $\vec{B}$ es proporcional al $\vec{M}$. ¿Cuál es el error en ese razonamiento?, o es que acaso está bien?

4. Encontrar el campo magnético en todo punto del espacio producido por un toro de sección circular con una magnetización uniforme de la forma $\vec{M} = M_0\hat{\phi}$. ¿Cómo cambian los resultados si el toro está sumergido en un medio de permeabilidad μ?

5. ¿Cuál es el significado físico de la función de Green?

6. ¿Qué relación hay entre el método de la función de Green y el método de imágenes?

7. ¿Cómo se complementan estos dos métodos en la resolución de los problemas?

8. ¿Cuál es la contribución de las cargas imágenes a los momentos multipolares de un problema interno?

9. ¿Dónde deben colocarse las cargas imágenes ?

10. Una vez colocadas las cargas imágenes, ¿qué sucede con los contornos?

11. ¿Qué relación hay entre la carga total de la distribución imagen y la carga inducida sobre el contorno?