

**ONDAS:  
ES FÍSICA**

**Oscar E. Martínez**



## Prologo

Ahora que lo terminé me doy cuenta que este no es el libro que desearía usar para mis cursos. Pero sí es el que hubiera deseado cuando comencé a escribirlo hace algunos años (más de cuatro para ser más preciso). El libro está ahí, es estático, y el curso es dinámico, cambia con cada alumno, con cada ocasión. Así que a resignarse y esperar que sirva como guía, y que cada docente en cada ocasión le dé su color personal y circunstancial. Quizás por ello me llevó tanto tiempo completarlo, algo imposible sin las palabras de aliento de mi familia, ese oportuno “dejá de quejarte y terminalo” por lo que les estoy infinitamente agradecido, y solo quienes me conocen sabrán valorar lo que ellas (Nelly, Laura y Sandra) debieron soportar. Pero además este libro lo sufrieron en sus etapas tempranas varios grupos de alumnos y docentes auxiliares. A los alumnos el agradecimiento por la paciencia (cuando la hubo) y a los docentes auxiliares el agradecimiento por el esfuerzo puesto en cambiar la manera de enfocar la enseñanza que debieron afrontar. Particularmente va el agradecimiento para Hernan Grecco y Yanina Cesa, que lo padecieron en varias oportunidades al inicio y supieron acompañarlo con experimentos introductorios en cada tema.

Ondas es un tema viejo en la física, y hay montones de libros que se ocupan del mismo. No se si he logrado hacer algo distinto que justifique un libro más, pero la intención existió. Ondas es un tema en que no aparecen nuevas teorías, sino que se manifiesta de manera especial el juego entre la teoría, el modelo y la realidad. Fue mi intención hacer esto explícito todas las veces que pude. Y a lo largo del libro reaparecen los mismos problemas enriquecidos por nuevos enfoques y mayores detalles. Ondas es transversal a toda la física y aparece en el marco de diversas teorías, mecánica, electromagnetismo, fluidos, mecánica cuántica, relatividad. Es por ello que el tema debe encararse recurrentemente a lo largo de las carreras de física e ingeniería. Este es un curso introductorio, pero que requiere de una base matemática sólida. No se pretende conocimiento a priori de electromagnetismo, pero si los alumnos lo poseen es conveniente que el docente aproveche la circunstancia para enriquecer con más ejemplos los temas acá desarrollados.

Comienza con el péndulo y termina con difracción por objetos periódicos tridimensionales. En el medio, modos normales, ondas propagantes, ondas en tres dimensiones, interferencia y difracción. En resumen: ondas. La óptica recibe un tratamiento especial por un lado por su relevancia y por otro por ser un caso en que la detección es cuadrática (se mide intensidad y no amplitud) y por requerir de trucos especiales para determinar fases relativas. La óptica geométrica recibe un tratamiento marginal, solo como caso límite, queda en cada docente el interés o la necesidad de ampliarlo. Se busca ser muy explícito en las aproximaciones que se van introduciendo, distinguiéndolas de las restricciones impuestas al rango de validez de las soluciones propuestas. Al final de cada capítulo se incluye una guía de problemas que se pueden hacer en paralelo con la lectura (avancen con el capítulo). No incluyo resultados pues como siempre digo, el resultado no es importante, lo que importa es el camino. Saber el resultado a priori suele confundir, ocultar las dudas.

En la escritura debí establecer un compromiso entre la extensión y la claridad. Quizás muchos temas o desarrollos hubieran requerido de más espacio y ejemplos para que el libro pudiera leerse sin ayuda. No es esta mi intención, el libro es un auxiliar del docente. Leerlo solo, duele.

Y una última advertencia, he notado a lo largo de mis años de tambaleante aproximación a la docencia que hay una abusiva necesidad y un permanente reclamo por entender “todo”, por salir de las clases sin dudas o con menos dudas. El conocimiento no avanza así, ni en la ciencia ni en el aprendizaje. Cada duda que se

resuelve, cada descubrimiento, abre las puertas a nuevas preguntas, nuevas dudas. No quiero dar la impresión de un conocimiento acabado que solo debe ser “enseñado”. Por ello, si alguien termina un curso utilizando este libro y se va con la sensación de haber entendido, desde ya les pido disculpas.

Los comentarios y correcciones son bienvenidos, escribanme a [oem@df.uba.ar](mailto:oem@df.uba.ar) poniendo tema: libro ondas (es que soy de leer poco el correo electrónico).

Buenos Aires 30 de julio de 2007

Oscar E. Martínez

Deseo agradecer las múltiples correcciones que he recibido de mis alumnos a lo largo del año 2007.

Buenos Aires 5 de marzo de 2008

Oscar E. Martínez

## INDICE

1) Oscilador unidimensional armónico	7	
1.1 Caso de estudio		7
1.2 oscilador armónico libre		14
1.3 energía del oscilador armónico libre		17
1.4 Oscilador armónico con disipación		18
1.5 energía del oscilador armónico con disipación		21
1.6 oscilador armónico forzado		22
1.7 energía, potencia y resonancia		26
1.8 la Lorentziana		29
1.9 Otro caso de estudio		31
Apéndice: números complejos		32
Guía 1		34
2) Sistemas con más de un grado de libertad	37	
2.1 Caso de estudio		37
2.2 oscilador armónico con dos grados de libertad		43
2.3 los modos normales		44
2.4 sistemas con más grados de libertad		45
2.5 sistemas con disipación		46
2.6 sistemas forzados		47
2.7 ¿Cuándo es débil el acoplamiento		50
2.8 Caso de estudio		53
Guía 2		53
3) Ondas en una dimensión	55	
3.1 Caso de estudio: la cuerda		55
3.2 La ecuación de ondas clásica		60
3.3 condiciones de borde		61
3.4. condiciones iniciales		64
3.5 ondas con pérdidas		67
3.6 ¿Dónde está la energía?		69
3.7 Caso de estudio: volviendo al péndulo		71
Guía 3		75
4) Otras ecuaciones de ondas	77	
4.1. ondas longitudinales en un resorte		77
4.2 Ondas de presión en un fluido. Sonido		79
4.3 sistemas discretos periódicos.		83
Guía 4		89
5) Ondas propagantes	91	
5.1 Caso de estudio: la solución que dejamos		91
5.2 Ondas propagantes, velocidad de fase.		93
5.3 Energía y potencia transportadas		94
5.4 Algunas condiciones de borde: reflexión de ondas		95
5.5 Más ejemplos de reflexiones		99
5.6 Fuentes. Propagación con disipación.		102
Guía 5		105
6) Paquetes de ondas.	107	
6.1 Caso de estudio: batido de dos ondas propagantes.		107
6.2 Paquetes periódicos.		110
6.3 Energía del paquete.		112

6.4 El problema inverso: Fourier.		116
Guía 6		120
7) Ondas en dos y tres dimensiones	123	
7.1 Caso de estudio: red bidimensional de masas acopladas		123
7.2 Ondas propagantes		125
7.3 Otras ecuaciones de ondas. Ondas electromagnéticas en materiales		127
7.4 Refracción en superficies planas, ley de Snell		130
7.5 Ondas esféricas y cilíndricas		133
7.6 Aproximación paraxial.		135
7.7 Lentes		137
7.8 Puntos fuera del eje. Magnificación.		140
Guía 7		142
8) Ondas vectoriales: polarización	145	
8.1 Caso de estudio: ¿La luz es vectorial o escalar?		145
8.2 ondas planas linealmente polarizadas		148
8.3 polarización elíptica y circular		151
8.4 densidad de energía e intensidad		154
8.5 Componentes pasivos 1: el polarizador		155
8.6 Componentes pasivos 2: láminas de onda		158
8.7 Componentes activos y otras situaciones atípicas		159
8.8 Polarización natural		161
Guía 8		163
9) Interferencia	165	
9.1 Caso de estudio: reflexión en una lámina delgada		165
9.2 Detectores cuadráticos, batidos y coherencia		166
9.3 interferencia entre dos ondas planas		167
9.4 Interferencia con ondas esféricas (fuentes puntuales)		169
9.5 interferencia entre dos fuentes puntuales en aproximación paraxial		171
9.6 Interferómetros. Young y Michelson		174
9.7 visibilidad de las franjas y coherencia		177
9.8 interferencia entre N fuentes puntuales		180
9.9 interferómetro de Fabry Perot		184
Guía 9		190
10) Difracción en sistemas sencillos	193	
10.1 Caso de estudio: atravesando una ranura		193
10.2 Integral de Kirchhoff.		196
10.3 Aproximación de campo lejano. Fraunhofer.		201
10.4 Aproximación paraxial		205
10.5 Haz Gaussiano. Más allá de la aproximación de Fraunhofer		209
Guía 10		213
11) Difracción por objetos periódicos.	215	
11.1 Caso de estudio: atravesando una diapositiva rayada		215
11.2 sistemas periódicos iluminados uniformemente.		219
11.3 sistemas periódicos, cuando la iluminación no es uniforme		223
11.4 Sistemas periódicos en más dimensiones		227
Guía 11		233

**¿Qué es más difícil, encontrar la respuesta o hacer la pregunta correcta?**

## **Capítulo 1: OSCILADOR UNIDIMENSIONAL ARMÓNICO**

### **1.1 Caso de estudio:**

Analizaremos el movimiento de una pelota de tenis colgada por medio de un hilo de poliamida (tanza de nylon®) a un gancho en el techo.

#### **Análisis preliminar:**

Análisis significa partirlo en pedazos mas simples para su comprensión. El enunciado anterior es una descripción de una situación real, distinto a un enunciado de un problema de curso de física. Pero es un problema real de física. La descripción así planteada es muy resumida (no dice por ejemplo la marca de la pelota, su grado de desgaste, el diámetro del hilo, etc.) y puede surgir en el análisis la necesidad de incorporar mas información, es lo natural y habitual, pero rara vez ocurre en un enunciado de problemas de la guía de trabajos prácticos. La idea de estos casos es introducir al lector en esta metodología, ir reduciendo el problema real a algo parecido a un problema de guía pero manteniendo lo relevante al problema real y teniendo claro cuales fueron las consideraciones incorporadas para simplificar el enunciado (que necesariamente limitan la validez de la respuesta).

Dado el título del capítulo un estudiante entrenado que ha cursado mecánica probablemente describa al sistema como un péndulo “simple” o péndulo “matemático”. Pero ya le habremos quitado al problema toda su riqueza y complejidad, y ni siquiera sabríamos qué aproximaciones hicimos. Vayamos por partes.

Ya hemos restringido el área del conocimiento a la mecánica al decir que estudiaremos el movimiento. Supondremos cosas mas o menos obvias como la estabilidad química del sistema (por ejemplo que no se descompone ni le prenderemos fuego). Nuestro análisis también será macroscópico, no tendremos en cuenta la estructura atómica de los materiales ni del medio circundante (aire). Supondremos pues que los materiales forman un continuo. El sistema tiene entonces infinitos grados de libertad que son las tres coordenadas de cada punto. Entendemos por **grado de libertad** a las coordenadas necesarias para caracterizar el estado del sistema. Entre los puntos del material existen fuerzas de interacción que los vinculan y condicionan sus movimientos relativos. Una rápida observación nos indica que si el sistema no interactúa con otros que consideramos externos (excepto a través de la fuerza de gravedad de la Tierra), tiende a una posición de equilibrio que es con el hilo tenso en dirección vertical. Acá conviene hacer notar que la gravedad está explícita en el enunciado al indicar que cuelga. Debemos distinguir esto de agregados que hagamos nosotros por exceso de interpretación, y que pueden dar lugar a olvidar casos relevantes, que llamaremos “suposiciones no explícitas” y las abreviaremos por SNE.

Si ejercemos alguna fuerza adicional sobre el sistema lo apartaremos de ese equilibrio. Veamos algunas posibilidades:

1-si apretamos la pelota, se deforma y al soltarla tiende a recuperar su forma. Un caso particular es cambiar la presión ambiente.

2-si sacudimos la pelota ida y vuelta con cierta violencia, el hilo realiza movimientos ondulatorios.

3-si hacemos fuerza sobre la pelota hacia abajo, el hilo se estira. Al soltar, se recupera parcialmente. Si la fuerza es excesiva, el hilo se rompe.

4-si golpeamos la pelota hacia arriba, el hilo se aparta de su forma rectilínea. Es obvio que hay una asimetría en el comportamiento del hilo ante la extensión o compresión.

5-si ejercemos una cupla sobre la pelota, tiende a rotar. Si el momento es según el hilo (y dependiendo de como se lo haya sujetado) puede ocurrir que al soltarla quiera regresar a su posición anterior, y oscile alrededor del equilibrio.

6-cualquier movimiento que le imprimamos que no rompa el hilo, veremos que después de un tiempo queda oscilando como un péndulo o mas generalmente describiendo una espiral hasta detenerse colgando vertical (péndulo bidimensional).

Este movimiento en vaivén es importante no solamente por su simplicidad, sino porque veremos que tiene elementos en común con muchas otras situaciones en que un sistema es apartado del equilibrio. En el análisis de sistemas físicos más o menos complejos es común seguir esa secuencia de estudio:

Primero buscamos las situaciones de equilibrio, luego el comportamiento ante apartamientos del equilibrio para recién entonces hacer estudios mas complejos. Este es un esquema muy exitoso en parte porque los sistemas que normalmente encontramos están cerca de un estado de equilibrio (al menos en un sentido amplio del término).

### Posición de equilibrio

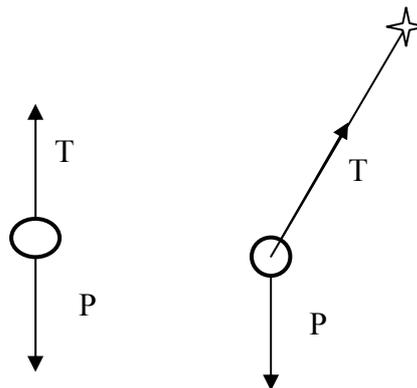


Fig. 1.1.1

Fig.1.1.2

El experimento nos permitió encontrar una condición de equilibrio. Es aquella en la cual el hilo se estira por acción del peso hasta que su fuerza de restitución elástica compensa la fuerza peso de la pelota (y su propio peso). El caso es descrito en la figura 1.1.1. Si estas son las únicas fuerzas en juego, no hay ninguna otra posición de equilibrio, ya que para compensar el peso el hilo debe estar tenso, y la tensión es hacia el gancho en la dirección del hilo (fig 1.1.2).

Hemos hecho una “suposición no explícita” (SNE), que el hilo no ejerce esfuerzos de corte (dijimos que la fuerza es en la dirección del hilo), algo que no podríamos probar. Retomaremos este tema más adelante.

### Movimiento alrededor del equilibrio

Analizaremos para este caso el movimiento pendular, (caso 6 antes descrito) ya que vimos que hay otros posibles. Haremos varias hipótesis

**hipótesis fuerte 1: el hilo no tiene masa.**

Con esto eliminamos todos sus infinitos grados de libertad. Que no tiene masa significa que no tiene inercia y no se necesita energía para que acompañe el movimiento. Suele plantearse que la hipótesis es válida por ser su masa mucho menor que la de la pelota. Sin embargo el caso 2 de movimiento antes enunciado indica que es mas fuerte que eso.

**hipótesis fuerte 2: la pelota es rígida.**

Sabemos que la pelota es deformable, pero en el movimiento pendular no parece deformarse apreciablemente (la presión aerodinámica varía alrededor de la misma cuando se mueve respecto del aire, quizás esta hipótesis no sea buena para objetos mas blandos). Eliminamos con esto infinitos grados de libertad de la pelota, convirtiéndola en un cuerpo rígido.

Al sistema le quedan 6 grados de libertad (las seis coordenadas que definen el estado de un cuerpo rígido).

**hipótesis fuerte 3: la pelota es puntual.**

Sólo puede trasladarse. Le quedan tres grados de libertad. Esta hipótesis parece simple, pero según como ejerzamos la fuerza sobre la pelota va a tender también a rotar además de trasladarse. Al contrastar nuestras predicciones del modelo resultante con la experiencia, es importante evaluar si no estamos poniendo energía en hacer rotar la pelota.

**hipótesis fuerte 4: en el movimiento pendular la longitud del hilo permanece constante.**

Podemos incluir como parte de esta hipótesis que el anclaje del hilo al techo es puntual y fijo. El experimento nos indica que el largo (al menos en apariencia) del hilo permanece constante. Sabemos por el caso 3 el hilo es estirable y ejerce una fuerza restitutiva, con lo que es difícil asegurar que al pendular no está también oscilando longitudinalmente. Esta hipótesis normalmente es una SNE, con el riesgo de que no podemos verificar a posteriori si es adecuada.

Estamos ahora ante una situación nueva. Hemos hecho hipótesis cuya validez no podemos garantizar. Ante esto tomaremos dos caminos posibles.

- a- Una vez hallada la solución, verificamos si es consistente con la hipótesis (por ejemplo calculamos la tensión del hilo y vemos si es constante: problema 6).
- b- Eliminamos la hipótesis cuando tengamos herramientas de cálculo que nos permitan cambiar por un modelo mas adecuado. (por ejemplo que el hilo es un resorte).

Sistema con un grado de libertad:

Hasta ahora el sistema quedó con dos grados de libertad. La pelota se puede mover sobre la superficie esférica de radio  $l_0$  (largo del hilo) centrada en el anclaje en el techo. Según como apartemos a la pelota del equilibrio el movimiento puede quedar restringido a un plano, oscilando hasta detenerse (a menos que la acción externa nunca se apague). Quienes hayan leído el índice sabrán que el caso bidimensional será analizado en el próximo capítulo. Por lo tanto ahora nos restringimos al caso unidimensional. Esta es una restricción, no una hipótesis. Nos limitamos a estudiar las condiciones iniciales y fuerzas que no saquen a la pelota del plano elegido. Esto es posible gracias a que las fuerzas de gravedad y tensión del hilo están en el plano y hemos supuesto que el hilo no realiza esfuerzos de corte (perpendiculares a su dirección).

Que el sistema tenga un solo grado de libertad significa que su estado puede ser descrito con una sola coordenada. Debemos elegir esa coordenada de modo que nos resulte mas sencilla la formulación del problema. Habiendo una posición de equilibrio es conveniente elegir la coordenada de modo que valga cero en dicha posición. En la figura 1.1.3 se muestra una posible coordenada, el ángulo que subtende el hilo con la vertical. Utilizamos para indicar dicha coordenada la letra griega  $\psi$  (mayúscula  $\Psi$ ).

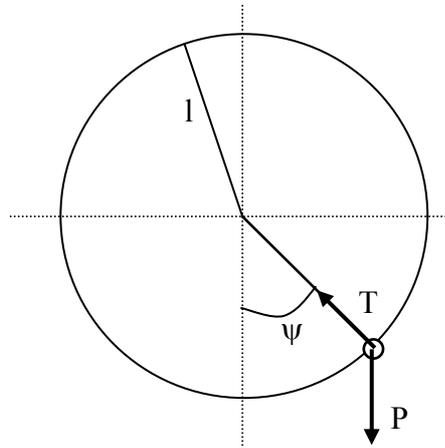


Fig. 1.1.3

### Leyes de conservación

Como todo problema dinámico, comenzamos a analizarlo a partir de leyes de conservación. Esto nos da una primera idea de los posibles movimientos. Dadas las fuerzas presentes aún en el caso mas simple (péndulo libre) no se conservarán las cantidades de movimiento lineal y angular. Analicemos la energía.

Energía cinética:

Siendo el desplazamiento

$$s = l_o \psi \quad 1.1.1$$

y escribiendo la velocidad en función de  $\psi$

$$v = l_o \frac{d\psi}{dt} = l_o \dot{\psi} \quad 1.1.2$$

donde introducimos como notación que el punto indica derivada respecto del tiempo. Queda

$$E_C = \frac{1}{2} m l_o^2 \dot{\psi}^2 \quad 1.1.3$$

donde  $m$  es la masa de la pelota.

Energía potencial gravitatoria:

$$E_P = mgh = mgl_o(1 - \cos\psi) \quad 1.1.4$$

que se ilustra en la figura 1.1.4. Aquí  $g$  es la aceleración de la gravedad. Hemos tomado el cero en la posición de equilibrio por comodidad. La expresión analítica 1.1.4 es periódica, pues se repite cada vuelta, movimiento que no sería posible en nuestro caso por estar colgado de un techo.

Restringimos adicionalmente a  $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ .

**hipótesis fuerte 5: La aceleración de la gravedad la hemos tomado como constante.**

Hasta ahora era una SNE, ahora de ser necesario podremos evaluar cuan relevante es a nuestro experimento. Por lo pronto que el hilo cuelgue de un techo nos indica que probablemente su longitud es mucho menor que el radio de la Tierra. Estimá qué error introduce esta hipótesis.

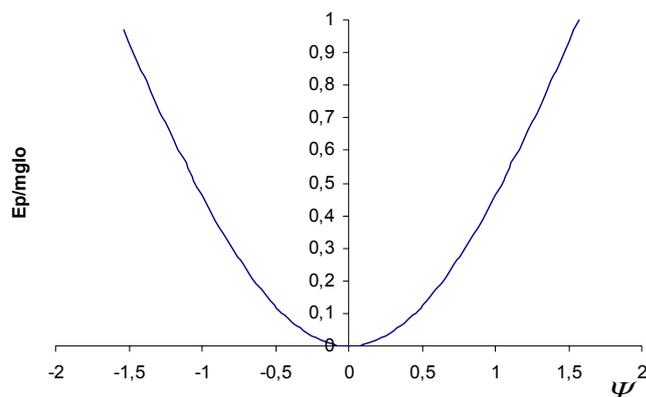


Fig. 1.1.4. Energía

Si apartamos la pelota de su equilibrio (manteniendo las restricciones ya impuestas) y la soltamos, caerá hacia el equilibrio, pero al pasar por ese punto ha adquirido energía cinética y pasa de largo. Si no hay ningún mecanismo de disipación (fuerza de rozamiento), llegará al otro lado a la misma altura (conservación de la energía). Al estar detenida vuelve a caer y regresa al punto de partida. Se encuentra ahora en exactamente la misma situación que al comienzo, y por lo tanto repetirá el movimiento. El resultado es entonces un movimiento periódico como el ilustrado en la figura 1.1.5 (se ha exagerado explícitamente que no es sinusoidal).

Hemos hecho una hipótesis adicional de despreciar la disipación. Al realizar el experimento vemos claramente que el péndulo tiende a detenerse. Cuan buena es esta aproximación (cuanto se aparta esta predicción de la realidad) depende de la calidad de concordancia que queramos entre el modelo y el experimento.

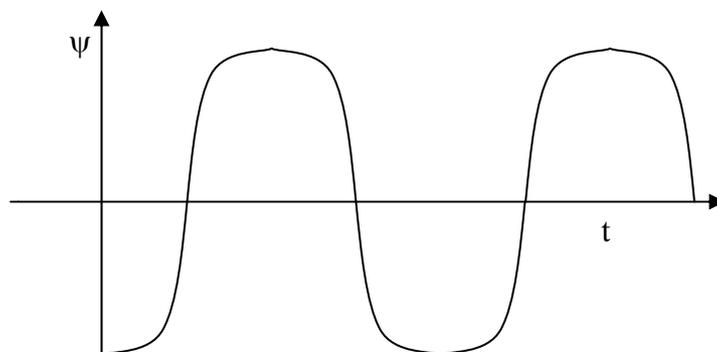


Fig.1.1.5

Si incluimos una fuerza disipativa en el modelo, entonces ya no se conserva la energía, y la pelota en su primera oscilación llega a una altura necesariamente menor. Si tuviéramos una descripción analítica de esta fuerza, podríamos calcular exactamente cuanto menor será esa altura. El movimiento cualitativamente se parecerá al graficado en la figura 1.1.6.

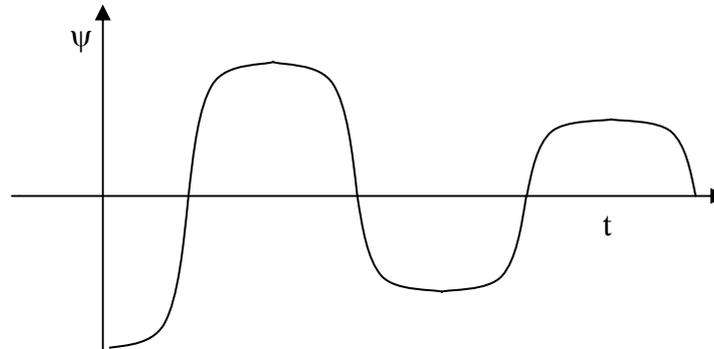


Fig.1.1.6

#### Ecuaciones dinámicas:

Para obtener una descripción más detallada del movimiento del sistema, analizaremos ahora las ecuaciones de movimiento. Como hemos impuesto un vínculo que obliga a un movimiento unidimensional, descomponemos las fuerzas entre las tangenciales a la trayectoria (perpendiculares al hilo) tomadas positivas en el sentido creciente de  $\psi$  y las perpendiculares a la trayectoria (en la dirección del hilo), las que tomaremos positivas si son centrípetas (en la figura 1.1.7 ambas componentes del peso serían negativas). Las centrípetas (indicadas con subíndice c) nos permitirán calcular la fuerza de vínculo necesaria, mientras que las tangenciales (subíndice t) nos darán el movimiento en sí mismo.

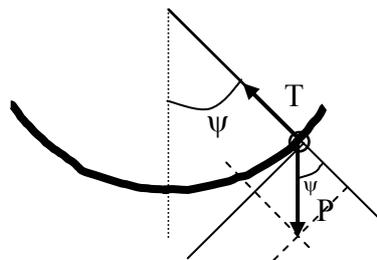


Fig. 1.1.7

Expresaremos la aceleración tangencial en término de la aceleración angular ( $\ddot{\psi}$ ), que es la derivada segunda temporal de nuestra coordenada:

$$a_t = l_o \ddot{\psi} \quad 1.1.5$$

y por ser un movimiento circular de radio  $l_o$ :

$$a_c = l_o \dot{\psi}^2 \quad 1.1.6$$

Igualando la fuerza a la masa por la aceleración:

$$ma_t = -mg \operatorname{sen} \psi + F_R \quad 1.1.7$$

$$ma_c = -mg \cos \psi + T \quad 1.1.8$$

Donde  $F_R$  es la fuerza de rozamiento. La primera ecuación es la que buscamos, la segunda nos permitirá encontrar la tensión del hilo y ver si algunas de las hipótesis se satisfacen (por ejemplo longitud de hilo constante).

### Sin rozamiento

Nuevamente en la búsqueda por simplificar el problema, comenzamos por analizar la dinámica en ausencia de disipación:

$$F_R=0 \quad 1.1.9$$

Combinando 1.1.5 con 1.1.7 queda una ecuación diferencial de segundo orden para  $\psi$ :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{l_o} \text{sen} \psi \quad 1.1.10$$

Como en el rango de interés el signo de  $\text{sen} \psi$  es el mismo que el de  $\psi$ , estamos frente a una aceleración restitutiva (se opone al apartamiento del equilibrio). Esto es consistente con el análisis ya hecho sobre la energía y nos hace ganar confianza sobre no haber cometido errores en el camino. Haremos una nueva aproximación que no solamente facilitará la resolución de la ecuación, sino que nos pondrá ante un caso relevante por su generalidad.

### Pequeñas oscilaciones

Supondremos que el apartamiento del equilibrio es en todo momento suficientemente pequeño como para poder aproximar la aceleración restitutiva por una expresión lineal en la coordenada. Que la aceleración y por ende la fuerza sean lineales en la coordenada equivale a que la energía potencial sea cuadrático en la misma, o sea que estamos aproximando un potencial que tiene un mínimo por una parábola. Esto tiene validez muy general para pequeños apartamientos, independientemente de la forma particular del potencial, y por ende se llegará a ecuaciones similares para cualquier sistema unidimensional ligeramente apartado del equilibrio. Desarrollando la función sinusoidal en serie de potencias de  $\psi$  (recordar que el ángulo es medido en radianes):

$$\text{sen} \psi = \psi - \frac{1}{3}\psi^3 + \dots \quad 1.1.11$$

y en tanto

$$\psi \gg \frac{1}{3}\psi^3 \quad 1.1.12$$

la ecuación 1.1.10 queda:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} \cong -\frac{g}{l_o} \psi \quad 1.1.13$$

Esta es la conocida ecuación del oscilador armónico libre. Hemos encontrado pues que en el rango de validez de las aproximaciones planteadas el comportamiento esperado es una oscilación armónica (sinusoidal en el tiempo). Y dado que esta es una ecuación de interés general que trasciende este caso, damos por terminado el planteo del mismo y pasamos al estudio del caso general.

## 1.2 Oscilador armónico libre

Como discutimos antes una ecuación como la 1.1.13 se obtiene cuando un sistema unidimensional es apartado ligeramente del equilibrio y se lo deja oscilar libremente despreciando las fuerzas disipativas. La aceleración de la coordenada que corresponda es igual a: menos una constante positiva multiplicada por el apartamiento del equilibrio. Escribimos esa ecuación general como:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega_0^2\psi \quad 1.2.1$$

Donde expresamos la constante como un cuadrado para indicar que debe ser positiva. Ahora le damos el paso a las matemáticas. Estamos frente a una ecuación de segundo orden, por lo que al integrarla dos veces para hallar la variable de interés ( $\psi$ ) aparecerán dos constantes de integración. Buscamos una función que derivada dos veces sea proporcional a menos esa función. Sabemos que las funciones  $\sin(at)$  y  $\cos(at)$  satisfacen este requisito, por lo que ya tendríamos las soluciones si le damos el valor adecuado a la constante  $a$ .

Utilizaremos un método un poco distinto y expresaremos la solución de otra manera, un poco mas larga ahora pero que redundará en ventajas a medida que avancemos. Para ello aceptaremos que algunos de los parámetros que aparecen en nuestra solución sean números complejos. A medida que avancemos, si el lector no está muy familiarizado con los números complejos, recomendamos acompañar la lectura con la del apéndice 1.

La ecuación 1.2.1 nos dice que la función es proporcional a su derivada segunda. Sabemos que la función exponencial satisface este requisito por lo que proponemos una solución del tipo:

$$\psi = e^{at} \quad 1.2.2$$

y sus derivadas serán:

$$\dot{\psi} = ae^{at} = a\psi \quad 1.2.3$$

$$\ddot{\psi} = a\dot{\psi} = a^2\psi \quad 1.2.4$$

y reemplazando 1.2.4 en 1.2.1 queda (para todo tiempo):

$$a^2 + \omega_0^2 = 0 \quad 1.2.5$$

que es un polinomio en  $a$  del mismo orden que la ecuación y cuyas raíces dan los valores de  $a$  tal que la solución propuesta es válida. Si  $a$  no satisface la ecuación 1.2.5 (polinomio característico), entonces 1.2.2 no es solución de 1.2.1. Este polinomio tiene dos raíces:

$$a = \pm i\omega_0 \quad 1.2.6$$

que nos da dos soluciones posibles:

$$\psi_1 = e^{i\omega_0 t} \quad 1.2.7a$$

$$\psi_2 = e^{-i\omega_0 t} \quad 1.2.7b$$

Por ser la ecuación diferencial lineal, cualquier combinación lineal de las soluciones también será solución (ver problema 9) , por lo que la solución general tendrá la forma:

$$\psi = A\psi_1 + B\psi_2 = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad 1.2.8$$

Nótese que por tener el polinomio característico el orden de la ecuación diferencial, el número de soluciones es igual al número de raíces del polinomio, o sea al orden de la ecuación. Al hacer la combinación lineal de esas soluciones aparecen tantas constantes como orden de la ecuación, y son precisamente las constantes de integración esperadas. Las constantes A y B salen pues de plantear las condiciones iniciales, mientras que la constante  $\omega_0$  es una magnitud característica del sistema físico, la *aceleración restitutiva* al equilibrio.

Como necesitamos que nuestra solución sea real y no compleja, la combinación lineal debe ser tal que la solución sea real. Un camino alternativo lo da el problema 3, ya que si hallamos una solución compleja, su parte real también será solución. Tomaremos entonces como solución:

$$\psi = \text{Re} \{ Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \} = \frac{1}{2} \{ Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \} + c.c. \quad 1.2.9$$

donde c.c. indica el conjugado complejo (ver apéndice 1). Como aún no hemos determinado las constantes A y B, el factor  $\frac{1}{2}$  puede ser absorbido por las constantes.

Desarrollando la expresión 1.2.9 y agrupando los términos de frecuencia negativa ( $e^{-i\omega_0 t}$ ) y los de frecuencia positiva ( $e^{i\omega_0 t}$ ) podemos obtener una expresión mas conveniente:

$$\psi = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} + B^* e^{i\omega_0 t} + A^* e^{-i\omega_0 t} = (A + B^*)e^{i\omega_0 t} + c.c. \quad 1.2.10$$

y escribiendo la constante compleja  $A+B^*=Ce^{i\phi}$ , agrupando las exponenciales queda:

$$\psi = Ce^{i(\omega_0 t + \phi)} + c.c. \quad 1.2.11$$

Notar que con este cambio de notación seguimos teniendo dos constantes de integración (ahora C y  $\phi$ ). Si analizamos la solución compleja gráficamente vemos que el primer término es un vector que rota con frecuencia angular  $\omega_0$  en el sentido antihorario y su complejo conjugado rota en sentido horario, con módulo C y que  $\phi$  es el ángulo que forma con el eje real en instante inicial (fase inicial). Escrita en su forma real queda:

$$\psi = 2C \cos(\omega_0 t + \phi) = \psi_M \cos(\omega_0 t + \phi) \quad 1.2.12$$

donde vemos que la amplitud  $\psi_M$  es dos veces el módulo C ya que en cada vuelta se encuentran ambos términos cruzando el eje real al mismo tiempo y suman constructivamente.

**Caso particular:** se suelta el péndulo desde un ángulo  $\psi_0$ . Veamos como se calculan las constantes C y  $\phi$ . La posición a  $t=0$  será:

$$\psi = 2C \cos(\phi) = \psi_0 \quad 1.2.13$$

y la velocidad inicial, que se obtiene de derivar 1.2.12:

$$\dot{\psi}(t=0) = -2C\omega_0 \sin(\phi) = 0 \quad 1.2.14$$

de 1.2.13  $C$  no puede ser nula, por lo que en 1.2.14 debe ser  $\text{sen}(\phi)=0$ , que se satisface para  $\phi=0$ . Insertando este resultado en 1.2.13 queda  $2C = \psi_0$ . Con lo que a partir del dato de la posición y velocidad inicial hemos obtenido las dos constantes de integración.

**Otro ejemplo: el resorte. Oscilaciones longitudinales.**

El resorte no es más que la idealización mecánica del oscilador armónico. Se denomina resorte a un arrollamiento helicoidal de un alambre típicamente metálico (¿porqué metálico?) que tiene una forma en reposo a la cual intenta volver si es deformado. En forma más general se utiliza el término para cualquier dispositivo mecánico que presenta una fuerza restitutiva elástica. Cualquiera sea el sistema, el comportamiento lineal con la deformación de la fuerza restitutiva (ley de Hooke) no puede ser mas que una aproximación válida para cierto rango de valores. Tarde o temprano el sistema sufrirá deformaciones permanentes al ser sometido a fuerzas excesivas o prolongadas. Si ahora  $l_0$  representa esa longitud de reposo del resorte, eso no significa que es su longitud de equilibrio en una situación mecánica dada. Por ejemplo si se cuelga del mismo un cuerpo de masa  $m$ , el peso estirará el resorte a una nueva situación de equilibrio. Ante esta nueva situación experimental es común hacer un gran número de aproximaciones y suposiciones hasta llegar a un modelo unidimensional para el que vale:

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = -k(l - l_0) + mg \tag{1.2.15}$$

¿Qué se ha supuesto sobre la masa del resorte para que sea válida esta ecuación? Construya las hipótesis que considere necesarias para llegar de una situación real a la ecuación 1.2.15.

La nueva posición de equilibrio  $l_e$  es cuando  $mg=k(l_e-l_0)$ , si es que para tal estiramiento sigue valiendo la aproximación lineal. Definiendo la coordenada nueva como el apartamiento del equilibrio armónico:

$$\psi = l - l_e$$

se obtiene la ecuación para el oscilador.

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{k}{m} \psi$$

que es la ecuación del oscilador armónico antes descrita.

**Otro ejemplo: el resorte. Oscilaciones transversales.**

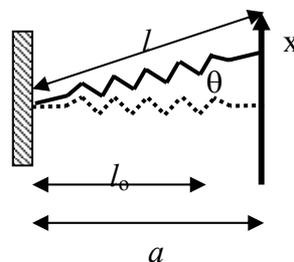


Fig. 1.2.1

Analicemos el ejemplo presentado en la figura 1.2.1. Otro ejemplo interesante es el presentado en la figura del problema 4. Acá la masa está sujeta por dos resortes, y si

se analiza la oscilación transversal y no longitudinal, la fuerza restitutiva no resulta proporcional al apartamiento. La componente de la fuerza que interesa es en la dirección del apartamiento y no a lo largo del resorte. Dicha fuerza para un resorte resulta:

$$F_x = F \sin(\theta) = -k(l - l_0)x/l = -k(1 - l_0/l)x \quad 1.2.16$$

y es necesario desarrollar esta expresión a primer orden potencias de  $x$ . Para ello hay que escribir  $l$  en función de  $x$ :

$$l^2 = a^2 + x^2 \quad 1.2.17$$

Como en 1.2.16 ya hay un término lineal con  $x$ , hay que desarrollar el paréntesis solamente a orden cero para que el producto quede desarrollado a primer orden. Por lo tanto basta con reemplazar  $l$  por  $a$ , que en 1.2.16 queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{a}\right)x \quad 1.2.18$$

Cabe notar que la aceleración restitutiva resultante (y por lo tanto la frecuencia) es menor que el caso de estiramiento longitudinal. En esta aproximación lo que hemos hecho es suponer que al moverse la masa en la dirección perpendicular al resorte, el estiramiento es constante en el movimiento y la fuerza oscila debido a la aparición de una proyección que depende del ángulo. Es similar al caso del péndulo en que la fuerza no varía, pero la componente restitutiva sí.

Una aproximación interesante que a veces facilita la resolución es la que se puede realizar cuando el resorte está muy estirado (y sigue siendo un resorte, o sea además es muy estirable). En este caso vale

$$a \gg l_0 \quad 1.2.19$$

y la ecuación 1.2.18 queda coincidente con la longitudinal (en este límite la frecuencia transversal coincide con la longitudinal).

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(1 - 0)x \quad 1.2.20$$

### **1.3 Energía del oscilador armónico libre**

Analicemos ahora que ocurre con la energía en este oscilador. Para comenzar recordemos que la fuerza restitutiva es proporcional al desplazamiento, lo que significa que la energía potencial (su integral respecto del desplazamiento) debe ser cuadrática con el mismo. La generalidad de este hecho proviene de que si estamos analizando pequeños desplazamientos alrededor del equilibrio, la energía potencial debe tener un mínimo. Eligiendo cero el valor de la coordenada en dicho mínimo y el valor de la energía potencial  $E_p$ , al desarrollar la energía en potencias de la coordenada se obtiene:

$$E_p(\psi) \cong E_p(0) + \frac{dE_p}{d\psi} \psi + \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{d\psi^2} \psi^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{d\psi^2} \psi^2 = C_1 \psi^2 \quad 1.3.1$$

Si el término de segundo orden también resultara nulo, entonces habría que seguir con órdenes superiores, pero en ese caso no se obtendría un oscilador armónico, ya que la fuerza restitutiva sería de orden superior (potencias mayores a uno). De todos modos esto ocurre en muy raras ocasiones, como en casos particulares de transformaciones de fase que se estudian eventualmente en cursos avanzados de sólidos.

Tenemos pues una forma de energía proporcional a la coordenada al cuadrado. La energía cinética por otro lado será proporcional al cuadrado de la velocidad (o sea la derivada temporal de la coordenada). Acá es importante tener presente que la

coordenada que elegimos no necesariamente es proporcional al desplazamiento mas que a primer orden en el desarrollo (ver problema 1). La energía cinética tendrá la forma:

$$E_C(\dot{\psi}) = C_2 \dot{\psi}^2 \quad 1.3.2$$

y podemos calcular ambas a partir de la solución 1.2.12 como

$$E_P(t) = C_1 \psi_M^2 \cos^2(\omega_o t + \phi) \quad 1.3.3$$

$$E_C(t) = C_2 \psi_M^2 \omega_o^2 \text{sen}^2(\omega_o t + \phi) \quad 1.3.4$$

Para el caso del péndulo con la coordenada elegida de las ecuaciones 1.1.2 y 1.1.3 es  $C_1 = \frac{1}{2} m g l_o$  y  $C_2 = \frac{1}{2} m l_o^2$ . Por el análisis previo sabemos que ambas deben tomar el mismo máximo, que para la energía potencial (ecuación 1.3.3) ocurre cuando el coseno vale 1, y para la cinética (ecuación 1.3.4) cuando el seno es uno (esto ocurre a tiempos distintos), o sea que

$$C_1 = C_2 \omega_o^2 \quad 1.3.5$$

Cuando la velocidad llega a sus máximos módulos la posición pasa por cero y viceversa. Se dice que la coordenada y su velocidad están en cuadratura. La energía total resulta:

$$E_T(t) = C_1 \psi_M^2 \cos^2(\omega_o t + \phi) + C_1 \psi_M^2 \text{sen}^2(\omega_o t + \phi) = C_1 \psi_M^2 \quad 1.3.6$$

que como ya sabíamos se conserva (no es función del tiempo).

### 1.4 Oscilador armónico con disipación

Hasta ahora hemos considerado una situación ideal en que no hay fuerzas disipativas. Nuestro experimento nos dice que tarde o temprano el péndulo tenderá a detenerse, es decir que perderá su energía mecánica como consecuencia de alguna fuerza disipativa. Para resolver el problema dinámico es necesario dar la expresión explícita de la fuerza de rozamiento. Conocemos de mecánica dos fuerzas disipativas modelo:

- a)  $F_R = -\mu_D N$  si está en movimiento (el signo menos para indicar que se opone al movimiento) y  $F_R \leq \mu_E N$  si está en reposo ( $\mu_D$  y  $\mu_E$  son los respectivos coeficientes de rozamiento).
- b)  $F_R = -\gamma v$

El caso a) tiene la dificultad analítica de obligar a cambiar de signo en cada punto de retorno, evaluar si en dicha posición se vence el rozamiento estático y volver a escribir la ecuación. Su grado de dificultad es tal que lo dejamos como ejercicio. El caso b) es más fácil de introducir analíticamente y por lo tanto es el que discutiremos acá. Será el experimento en todo caso el que nos dirá cual es el mas adecuado (si alguno lo es) para cada situación, a menos que tengamos un modelo ya probado que nos induzca a aceptar uno u otro. Por ejemplo, uno esperaría que en el péndulo el rozamiento con el aire se ajuste más a la expresión b, pero ¿cómo será el rozamiento del hilo con el gancho, o la fricción interna del hilo al deformarse? ¿Cuál es el mecanismo dominante? Verificar el modelo con el experimento será lo que nos permita ir **ganando confianza** en el modelo.

Nótese que hemos dicho ganando confianza y no demostrado, ya que los experimentos nunca demuestran la validez de un modelo, solo nos permiten ir ganando confianza en sus predicciones. No se verifica experimentalmente un modelo, solamente se verifican algunas de sus predicciones dentro del error experimental.

La nueva ecuación será:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega_o^2\psi - \gamma\dot{\psi} \quad 1.4.1$$

donde las unidades de  $\gamma$  son las mismas que la frecuencia.

La ecuación sigue siendo lineal y expresa que la función es proporcional a una combinación de sus derivadas. Utilizamos entonces el mismo método que para el oscilador libre y proponemos como solución la 1.2.2:

$$\psi = e^{at} \quad 1.4.2$$

con sus derivadas 1.2.3 y 1.2.4 que remplazadas en la ecuación diferencial 1.4.1 da el nuevo polinomio característico:

$$a^2 + \gamma a + \omega_o^2 = 0 \quad 1.4.3$$

y nuevamente los valores permitidos del parámetro  $a$  son las raíces

$$a = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2} \quad 1.4.4$$

estas raíces serán reales si el término dentro de la raíz cuadrada es positivo, esto es si la disipación es tan grande que domina sobre la oscilación. Si el rozamiento es tan grande que el sistema no llega a oscilar se lo denomina oscilador sobreamortiguado. Graficar este caso se deja como ejercicio. No es el caso de interés para la temática de este libro y se lo pospone para otros cursos. Analizaremos el caso en que el rozamiento es pequeño y el sistema realiza muchas oscilaciones antes de perder una fracción apreciable de su energía. Es el caso

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \ll \omega_o^2 \quad 1.4.5$$

en este caso tenemos dos raíces complejas

$$a = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega' \quad 1.4.6$$

con

$$\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} < \omega_o \quad 1.4.7$$

Tenemos entonces dos soluciones posibles

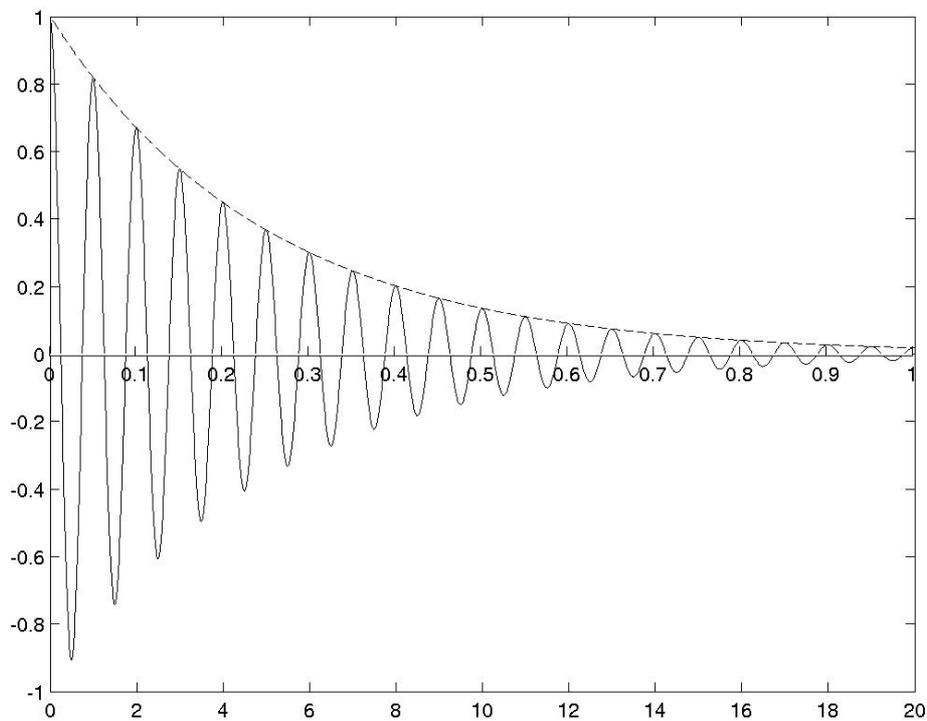
$$\psi_1 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega't} \quad 1.4.8a$$

$$\psi_2 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega't} \quad 1.4.8b$$

Y repitiendo lo hecho para el oscilador libre, tenemos como solución general la combinación lineal de ellas, apareciendo nuevamente dos constantes de integración, por ser una ecuación de segundo orden. Nótese que el término exponencial debido a la disipación es decreciente en el tiempo y común a ambas soluciones. La solución general es pues:

$$\psi = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega't+\phi)} + c.c. = \psi_M e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega't + \phi) \quad 1.4.9$$

Esta solución puede interpretarse como una oscilación armónica de frecuencia angular  $\omega'$ , fase inicial  $\phi$  y amplitud que decrece en el tiempo  $\psi_M e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ . En la figura 1.4.1 se muestra el aspecto típico de una oscilación de estas características.



1.4.1 oscilador amortiguado;  $\omega_0=10$ ,  $\gamma=1$ .  
Línea partida: término exponencial

### 1.5 Energía del oscilador armónico con disipación

A partir de las ecuaciones 1.3.1 , 1.3.2 y 1.3.5 podemos escribir la energía total como

$$E_T(t) = C_2[\omega_o^2 \psi^2 + \dot{\psi}^2] \quad 1.5.1$$

y es ahora la derivada temporal:

$$\dot{\psi} = \psi_M e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ -\frac{\gamma}{2} \cos(\omega't + \phi) - \omega' \text{sen}(\omega't + \phi) \right] \quad 1.5.2$$

e introduciendo 1.5.2 usando 1.47 en 1.5.1 (luego de muchas cuentas) la energía queda:

$$E_T = C_2 \psi_M^2 e^{-\gamma t} \left\{ \omega_o^2 + \frac{\gamma}{2} \omega' \text{sen}[2(\omega't + \phi)] + \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \cos[2(\omega't + \phi)] \right\} \quad 1.5.3$$

Notar que la energía oscila al doble de la frecuencia del oscilador, lo cual es razonable si pensamos que el módulo de la velocidad es máximo dos veces por oscilación (una en cada sentido). Podemos escribir 1.5.3 de una manera mas compacta:

$$E_T = E_o e^{-\gamma t} \left\{ 1 + \frac{\gamma \omega'}{2 \omega_o^2} \text{sen}[2(\omega't + \phi)] + \left( \frac{\gamma}{2 \omega_o} \right)^2 \cos[2(\omega't + \phi)] \right\} \quad 1.5.4$$

El término entre corchetes es periódico y se repite en particular cada vez que se cumple un período completo. Llamemos a ese término  $f(t)$  :

$$E_T = E_o e^{-\gamma t} \{ f(t) \} \quad 1.5.5$$

Si calculamos la energía perdida en una oscilación (un período) como la energía en el tiempo  $t$  menos la energía en  $t+T$  , se obtiene:

$$E_T(t) - E_T(t+T) = E_o e^{-\gamma t} f(t) - E_o e^{-\gamma(t+T)} f(t+T) = E_o e^{-\gamma t} f(t) (1 - e^{-\gamma T}) = E_T(t) (1 - e^{-\gamma T}) \quad 1.5.6$$

donde se ha utilizado que  $f(t)=f(t+T)$  . Si además utilizamos la condición 1.4.5 (condición de disipación baja), podemos desarrollar el último paréntesis en potencias de  $\gamma T$  a primer orden como:

$$1 - e^{-\gamma T} \cong \gamma T \quad 1.5.7$$

Y observando que en el último término de la ecuación 1.5.6 además de este paréntesis aparece nuevamente la energía total en  $t$ , la variación de energía en un período queda:

$$\Delta E_T = \gamma E_T T = \frac{2\pi\gamma}{\omega'} E_T = \frac{2\pi}{Q} E_T \quad 1.5.8$$

donde el factor  $Q$  así definido se lo denomina factor de mérito del oscilador, ya que indica en cuantas oscilaciones pierde una fracción apreciable de su energía.

Para osciladores mecánicos es buen ejercicio que estimen valores típicos de  $Q$  (resortes, péndulos, péndulos de torsión, diapasones, etc.). Cuanto mas grande este número más se aproxima el oscilador a un oscilador libre ideal.

## 1.6 Oscilador armónico forzado

Hasta ahora al oscilador lo apartábamos del equilibrio y lo dejábamos evolucionar. Veamos ahora que ocurre si lo sometemos a una fuerza que varía en el tiempo y analizamos su movimiento mientras esa fuerza es aplicada. Esta claro que en el momento que dejamos de aplicar la fuerza el sistema evolucionará como lo hemos descrito antes (ecuación 1.4.9) con las condiciones iniciales aquellas en que se encuentre al dejar de aplicar la fuerza. La acción externa la indicamos como una aceleración generalizada  $a(t)$ , que es la que aparece sobre la coordenada generalizada  $\psi$  (su derivada segunda). Para convertirla en fuerza hay que multiplicar por la masa y la constante de conversión de  $\psi$  a un desplazamiento (por ejemplo  $l_0$  en el caso del péndulo antes descrito). La nueva ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega_0^2\psi + \gamma \frac{d\psi}{dt} = a(t) \quad 1.6.1$$

### ¿Qué esperamos?

Haremos un pequeño ejercicio de predicción cualitativa. Este es un recurso importante al encarar un problema, pues nos orienta a buscar la solución por un lado, nos permite ver la razonabilidad de la solución que se obtenga y finalmente nos permite medir si estamos teniendo alguna intuición sobre la física involucrada. En primer lugar sabemos que el sistema tiene una frecuencia propia a la que “le gusta” oscilar (falacia patética). Si nosotros lo forzamos a una frecuencia mucho menor, es muy parecido al caso estático, aplico una fuerza y se estira (si es un resorte) proporcional a esa fuerza. El movimiento sigue a la fuerza en fase, o sea oscila a la misma frecuencia que la fuerza externa. Por otro lado si lo excito con una frecuencia muy alta (mucho mayor que la propia) la inercia debe jugar algún rol, esperamos que no pueda responder instantáneamente a dicha fuerza y el movimiento se atrase. Si lo excitamos a la frecuencia propia del sistema, podríamos encontrar una solución en que la fuerza que realizamos compensa justo la fuerza disipativa. Pare ello pensemos que si el sistema oscila sin fuerza externa, la fuerza disipativa es proporcional a la velocidad, que varía senoidalmente a la frecuencia propia. Si la fuerza externa es senoidal, habrá una amplitud de movimiento en la que cancela justo la fuerza disipativa (si se ajusta el movimiento a la fase correcta). Esto es así siempre que la fuerza vaya en el mismo sentido que la velocidad, o sea si la velocidad y la fuerza están en fase. El movimiento tendría que quedar en cuadratura con la fuerza. Habiéndose cancelado la fuerza disipativa con la forzante el movimiento será el del oscilador libre. Esto solamente puede ocurrir si se lo fuerza a la frecuencia propia del sistema.

Veamos ahora *un poco de matemáticas* sobre como resolver este problema. Supongamos que somos capaces de hallar soluciones a este problema, y sean  $\psi_{p1}$  y  $\psi_{p2}$  dos de dichas soluciones. Podemos demostrar que su diferencia

$$\psi_h = \psi_{p1} - \psi_{p2} \quad 1.6.2$$

es solución de la ecuación homogénea, o sea con  $a(t)=0$ . Para esta demostración basta con reemplazar 1.6.2 en la ecuación homogénea y utilizar 1.6.1 para cada una de las soluciones particulares. Notar que esta es precisamente la ecuación ya resuelta 1.4.1. Por lo tanto como conocemos todas las soluciones a dicha ecuación (todas las posibles  $\psi_h$ ), con solamente encontrar una  $\psi_p$  tendremos todas las soluciones posibles a 1.6.1 ,

ya que cualquier otra solución por 1.6.2 será la ya hallada más alguna de las soluciones homogéneas también conocidas. A  $\psi_p$  se la conoce como solución particular, y a las  $\psi_h$  como soluciones homogéneas. La solución particular dependerá de la forma particular (valga la redundancia) de  $a(t)$ . Analicemos el caso

$$a(t) = a_o \cos(\omega t) \quad 1.6.3$$

Veremos más adelante que esta forma funcional tiene importancia por varios motivos, una porque muchos sistemas reales son excitados precisamente de esta forma, otra porque cualquier otra forma funcional de interés puede ser escrita como superposición de formas armónicas de distintas frecuencias (Fourier). Por otro lado es una manera de investigar las propiedades del sistema llamada espectroscopía en la que se estudia experimentalmente la respuesta del sistema a excitaciones armónicas variando de manera continua la frecuencia en el rango de interés (o sea en el rango en que se espera encontrar las resonancias).

Utilizaremos nuevamente la notación compleja para facilitar encontrar una solución particular. Propongo una aceleración forzante:

$$a(t) = a_o e^{i\omega t} \quad 1.6.4$$

donde la parte real coincide con la propuesta 1.6.3. La parte real de la solución particular que encuentre para 1.6.4 será solución particular para 1.6.3 (demostrarlo). Nuevamente resulta razonable ensayar con una solución exponencial proporcional a 1.6.4:

$$\psi_p = C e^{i\omega t} \quad 1.6.5$$

reemplazando en 1.6.1 con 1.6.4 se obtiene la ecuación algebraica:

$$(\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)C = a_o \quad 1.6.6$$

con lo que se encontró la solución:

$$C = \frac{a_o}{(\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} = \frac{a_o(\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad 1.6.7$$

donde se ha utilizado el truco de multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, para que quede una expresión explícita para las partes reales e imaginarias. Escribiendo:

$$C = A - iB \quad 1.6.8$$

La solución buscada, que es la parte real de 1.6.5 queda:

$$\psi_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad 1.6.9$$

con

$$A = \frac{a_o(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad 1.6.10$$

$$B = \frac{a_o\omega\gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad 1.6.11$$

En la figura 1.6.1 se puede ver un gráfico típico de estas dos funciones. Hemos mantenido la separación entre parte en coseno y en seno, pues ahora la fase tiene un

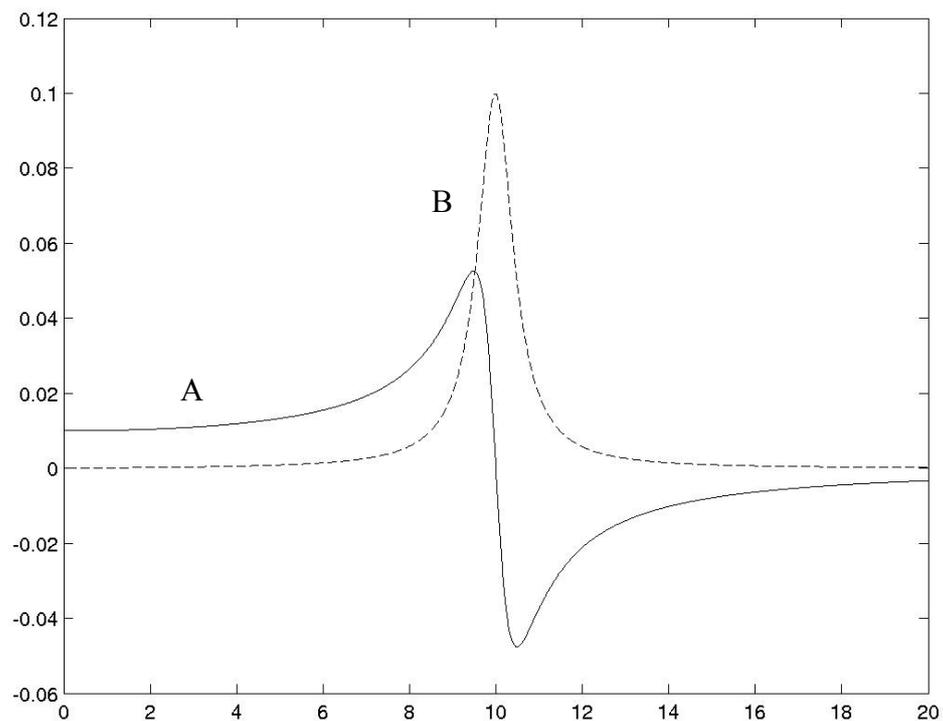
significado muy preciso pues es la relación entre la fase del movimiento y la fase forzante. Si cambiamos el origen de tiempo, cambia en la misma magnitud la fase del forzante y la del movimiento, manteniéndose la diferencia.

Nótese que en la solución particular **no aparece ninguna** constante de integración, ya que las dos necesarias están en la parte homogénea que debemos sumar para obtener la solución completa:

$$\psi = \psi_p + \psi_h \quad 1.6.12$$

Esta solución general se ajusta con las condiciones iniciales, que determinan los valores de los coeficientes contenidos en  $\psi_h$ . Si analizamos la forma de esas soluciones, vemos que  $\psi_h$  decae con un tiempo característico  $\tau = 1/\gamma$ , por lo que si dejamos pasar un tiempo grande comparado con  $\tau$ , la parte homogénea de la solución se habrá hecho tan pequeña que resulta despreciable. Entonces

$$\psi \cong \psi_p \quad \text{para } t \gg \tau \quad 1.6.13$$



1.6.1 oscilador forzado (idénticos parámetros a 1.4.1)

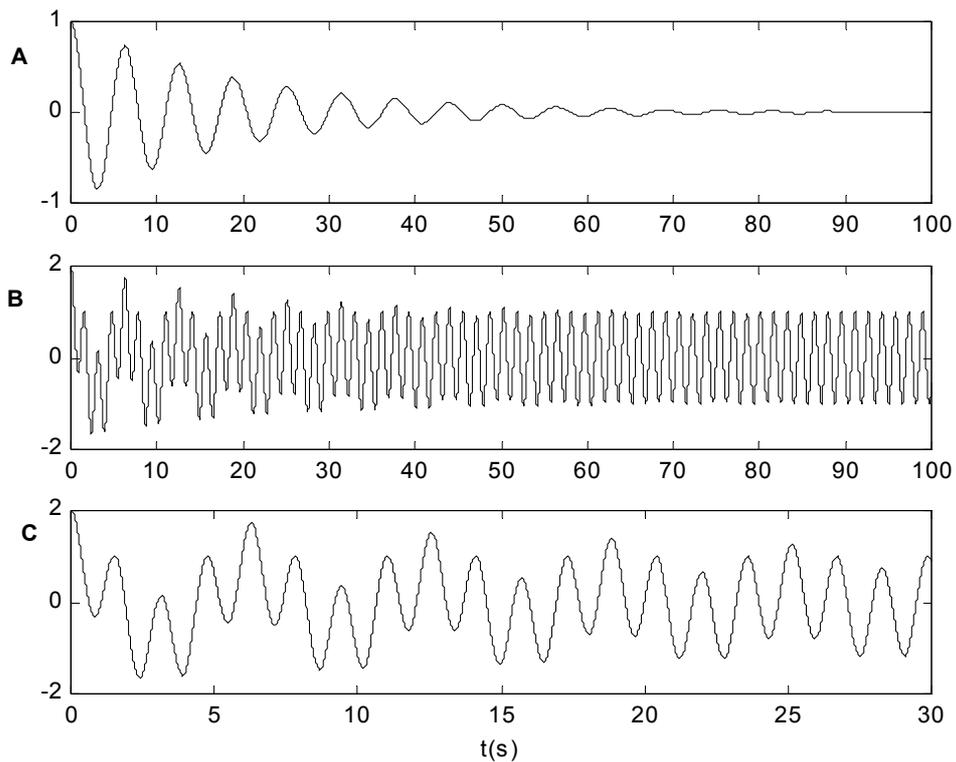


Fig. 1.6.2 Oscilador forzado. Parámetros  $\omega=4$ ,  $\omega_0=1$ ;  $\gamma=0,1$ . A) solución homogénea (se observa como tiende a extinguirse). B) Solución completa (se observa como tiende a la solución estacionaria.. C) idem B detalle del transitorio.

A esta solución a tiempos largos se la denomina “estado estacionario”, y es la que se utiliza habitualmente para describir el movimiento resultante ante un oscilador forzado. No hay que perder de vista que la solución así expresada vale solamente para tiempos largos. En este caso el sistema pierde memoria de su estado inicial y queda dominado por el forzante.

En la figura 1.6.2 se ilustra la evolución temporal para el caso de un oscilador forzado en que se incluyen las soluciones homogéneas. Se puede observar como se van extinguiendo las oscilaciones en las frecuencias propias del sistema, quedando oscilando a tiempos largos a la frecuencia del forzante.

*Analizemos un poco el resultado obtenido.* Para ello veamos la relación entre la componente en cuadratura (B) y la componente en fase (A) con el forzante, a partir del cociente entre 1.6.11 y 1.6.10:

$$\frac{B}{A} = \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega\gamma}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} \quad 1.6.14$$

Analizamos primero lejos del pico, o sea

$$|\omega_0 - \omega| \gg \gamma \quad 1.6.15$$

en este caso queda

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \frac{\omega}{(\omega_0 + \omega)} \frac{\gamma}{|\omega_0 - \omega|} \ll 1 \quad 1.6.16$$

con lo que:

$$|B| \ll |A| \quad 1.6.17$$

o sea que domina el término en fase. Si estamos a la izquierda del pico, o sea cerca del cero en frecuencia,  $A$  es positivo, y significa que el oscilador sigue a la fuerza. En particular en  $\omega = 0$ , es  $A = a_o / \omega_o^2$  que es la solución estática (para el péndulo quedaría  $kl_o\psi = F$ ). Si  $\omega \ll \omega_o$  resulta  $A \cong a_o / \omega_o^2$  y el movimiento sigue a la fuerza en forma cuasiestática (tomando en todo instante el valor de equilibrio)  $\psi = (a_o / \omega_o^2) \cos(\omega t)$ . Si  $\omega \gg \omega_o$  el movimiento está exactamente en contrafase ( $A$  es negativo) con la fuerza. Justo en  $\omega = \omega_o$  el término en fase se anula ( $A=0$ ), y queda exactamente en cuadratura, con un valor para  $B$ :

$$B = \frac{a_o}{\omega_o \gamma} \quad 1.6.18$$

con lo que

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{a_o}{\omega_o \gamma} \text{sen}(\omega_o t) \\ \dot{\psi} &= \frac{a_o}{\gamma} \text{cos}(\omega_o t) \end{aligned} \quad 1.6.19$$

quedando

$$\gamma \dot{\psi} = a(t) \quad 1.6.20$$

que indica que la fuente externa justo compensa el rozamiento en cada instante de modo de aprovechar al máximo el trabajo de la fuerza exterior para sustentar el movimiento. Vemos que este resultado coincide con nuestras expectativas del análisis previo.

## **1.7 Energía, potencia y resonancia**

La fuerza externa armónica está realizando un trabajo sobre el oscilador, y como discutimos antes será siempre positivo si la fuerza está en fase con la velocidad, lo que ocurre solamente en  $\omega = \omega_o$ . Veamos entonces como es este trabajo en función de la frecuencia. Como  $\psi$  es una coordenada generalizada, la velocidad es proporcional a su derivada temporal y la fuerza proporcional a la aceleración generalizada  $a$ . La potencia que entrega la fuerza externa es proporcional entonces al producto de la aceleración por la derivada temporal de la coordenada:

$$P \propto a \dot{\psi} = a_o \omega \cos(\omega t) [-A \text{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t)] \quad 1.7.1$$

donde la constante de proporcionalidad dependerá de la coordenada generalizada particular que hayamos elegido.

En el caso particular del péndulo antes descrito aparecerá  $ml_o$  para pasar de la aceleración generalizada a la fuerza y otro  $l_o$  para pasar la velocidad generalizada a velocidad, con lo que hubiera quedado:

$$P = ml_o^2 a \dot{\psi} . \quad 1.7.2$$

Reagrupando 1.7.1 llegamos a:

$$P \propto a_o \omega [B \cos^2(\omega t) - \frac{1}{2} A \sin(2\omega t)] \tag{1.7.3}$$

Vemos que el primer sumando no cambia de signo en el tiempo ya que proviene del movimiento en que la velocidad esta en fase con la fuerza. El segundo sumando, que proviene del movimiento en que la velocidad esta en cuadratura, oscila cambiando de signo ya que a veces la velocidad tiene el mismo signo que la fuerza (el sistema recibe el trabajo) y a veces se oponen (el sistema realiza trabajo contra el exterior).

Si denominamos como  $\langle f \rangle$  al promedio temporal de cualquier función del tiempo en un período de oscilación, que se obtiene como:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t') dt' \tag{1.7.4}$$

que es equivalente a buscar el valor constante que encierra el mismo área en un periodo. En la figura 1.7.1 se ilustra el caso de una función periódica cualquiera y se muestra el rectángulo que encierra igual área por período, que resulta ser el de altura unidad en este caso.

Entonces para la potencia entregada por la fuerza externa se tiene:

$$\langle P \rangle \propto \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} a_o \omega [B \cos^2(\omega t') - \frac{1}{2} A \sin(2\omega t')] dt' \tag{1.7.5}$$

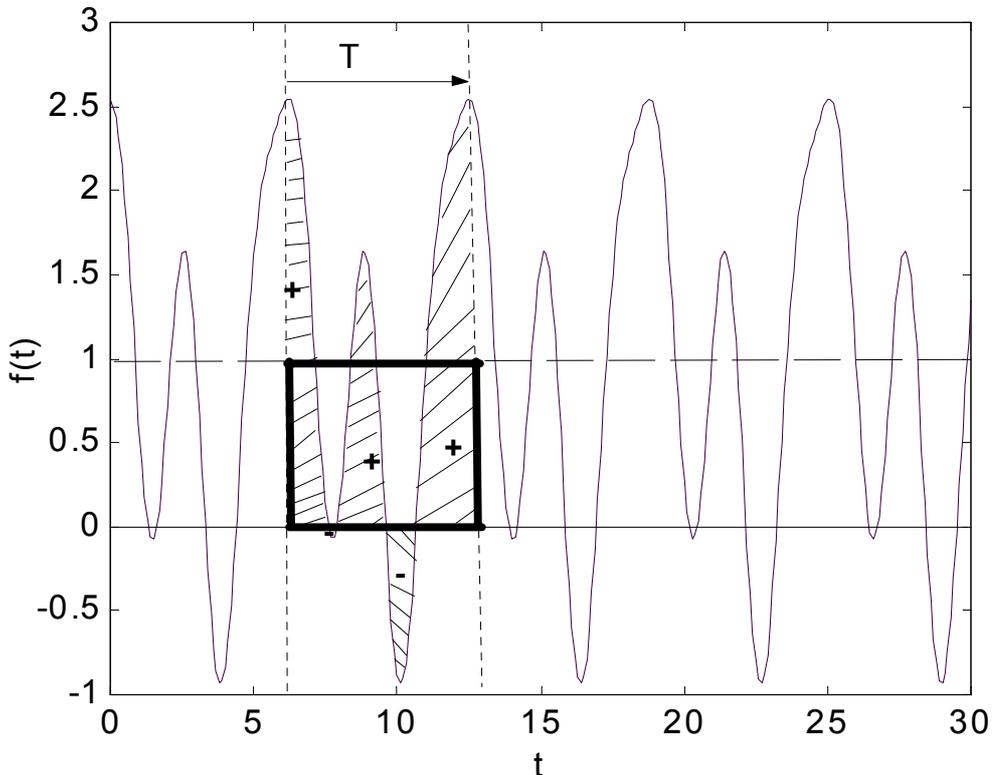


Fig. 1.7.1: Ilustración del concepto de valor medio de una función periódica.

El segundo sumando en el integrando oscila dos veces en T, por lo que su integral fácilmente se puede demostrar que se anula. El coseno cuadrado es siempre positivo, va entre 0 y 1 de manera simétrica, por lo que su valor medio será  $\frac{1}{2}$  (se deja la integral como ejercicio). Queda pues (usando 1.6.11):

$$\langle P \rangle_{\infty} \omega B = \frac{a_o \omega^2 \gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2} \quad 1.7.6$$

y observando que toma su valor máximo (que llamaremos  $P_o$ ) en  $\omega = \omega_o$ , queda expresado como

$$\langle P \rangle = \frac{P_o \omega^2 \gamma^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2} \quad 1.7.7$$

Para el caso particular del péndulo se hubiera obtenido:

$$P_o = \frac{m l_o^2 a_o^2}{2 \gamma} \quad 1.7.8$$

*Hagamos un análisis de este resultado:*

En primer lugar notemos que el trabajo realizado por la fuerza en cuestión en un ciclo completo es la potencia media multiplicada por el período. Para frecuencias muy bajas (situación cuasiestática) la potencia instantánea (1.7.3) es casi cero pues la velocidad es muy pequeña (proporcional a  $\omega$ ). Pero este no es el motivo por el que se anula la potencia media, ya que cuanto mas pequeña es la frecuencia, mas largo el tiempo de integración ( $T$ ). La potencia media se anula porque el trabajo neto en un ciclo a baja frecuencia es nulo, ya que el oscilador es empujado la mitad del ciclo y frenado la otra mitad. Cuando la frecuencia de excitación coincide con la propia, el movimiento queda en cuadratura con la fuerza que resulta estar siempre empujando. Se tiene allí la máxima amplitud de movimiento y la máxima transferencia de energía de la fuerza externa al sistema. A esta condición en que se excita al sistema a su frecuencia propia y se obtiene la máxima transferencia de energía se la denomina resonancia. Para altas frecuencias, nuevamente tiende a cero la potencia media y la amplitud queda reducida a valores muy pequeños. Para hallar el ancho de esta curva, busquemos los valores de  $\omega$  para los cuales la potencia se reduce a la mitad:

$$\langle P \rangle = \frac{P_o \omega^2 \gamma^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma)^2} = \frac{1}{2} P_o \quad 1.7.9$$

que se satisface para

$$(\omega_o^2 - \omega^2)^2 = (\omega \gamma)^2 \quad 1.7.10$$

que tiene dos soluciones positivas (las que buscamos) y dos negativas que no tienen significado. Las soluciones son:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_o^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \pm \frac{\gamma}{2} \quad 1.7.11$$

y la distancia entre ambas (ancho total a altura mitad de la curva) es

$$\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2 = \gamma = \frac{1}{\tau} \quad 1.7.12$$

o alternativamente

$$\tau\Delta\omega = 1$$

1.7.13

Hemos llegado a una relación importantísima de la física sobre la que volveremos en muchas oportunidades, y es que el producto del ancho de la curva de resonancia multiplicado por el tiempo de respuesta del sistema es un número del orden de la unidad.

Observemos que si realizamos un experimento en el cual vamos variando la frecuencia de excitación a amplitud forzante constante y medimos la energía entregada al sistema (absorción) el máximo de la curva nos da la frecuencia propia  $\omega_0$  y el ancho nos da el valor del coeficiente de disipación  $\gamma$ . Este tipo de mediciones no requieren de un seguimiento temporal de la evolución del sistema y ni siquiera del conocimiento del estado inicial del mismo, por ello se ha convertido en un métodos de caracterización de sistemas físicos muy difundido conocido como espectroscopía.

### **1.8 La Lorentziana**

En muchos sistemas físicos de interés el factor de mérito  $Q$  de las resonancias es alto, es decir vale la relación 1.4.5 que recordamos:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \ll \omega_0^2 \quad 1.8.1$$

Si deseamos ver la forma de la curva de resonancia en la región donde toma valores significativos, esto es para

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0 \quad 1.8.2$$

Podemos simplificar el denominador común a tantas expresiones anteriores que es:

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} = \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad 1.8.3$$

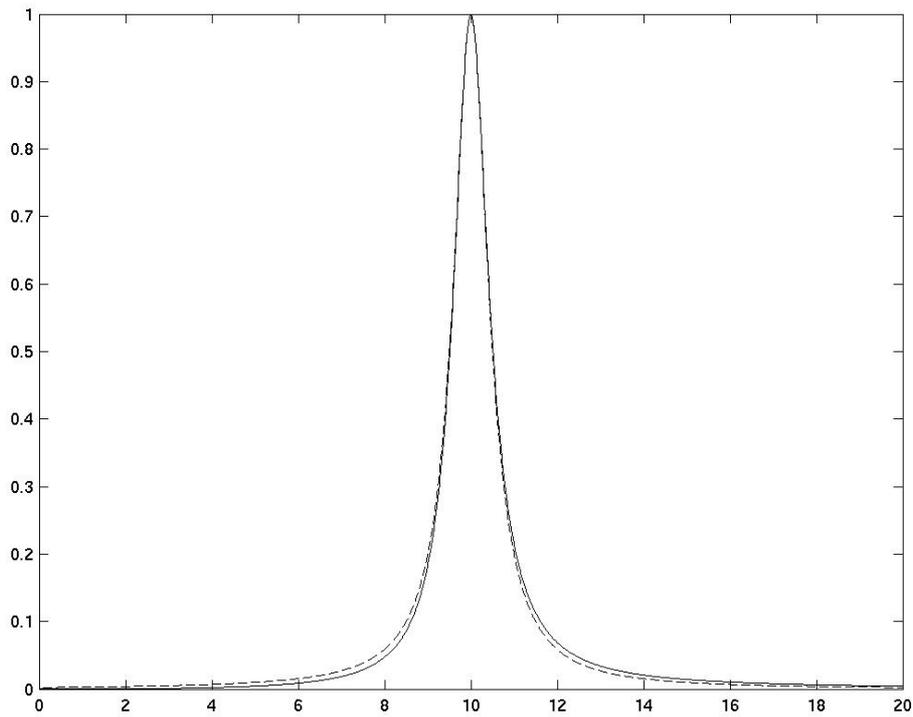
Y usando las aproximaciones antes mencionadas, reemplazamos  $\omega_0 + \omega$  por  $2\omega_0$  y  $\omega\gamma$  por  $\omega_0\gamma$ , quedando:

$$\frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{4\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2]} \quad 1.8.4$$

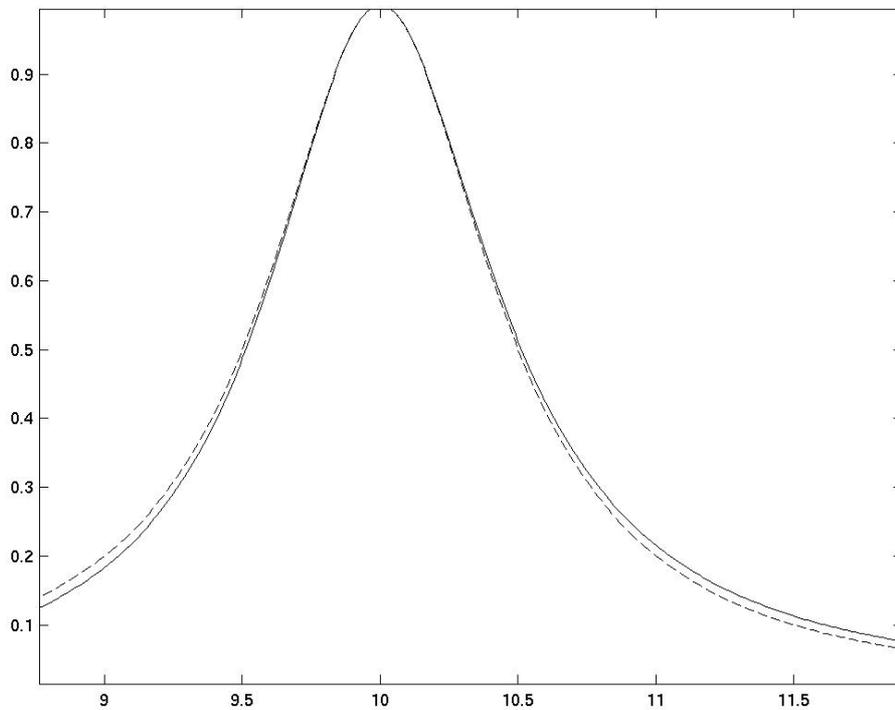
A la forma funcional obtenida, que si la renormalizamos para que su valor máximo sea la unidad queda:

$$R(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{(\gamma/2)^2}} \quad 1.8.5$$

se la denomina curva Lorentziana o curva de Lorentz. En la figura 1.8.1 se ha graficado un ejemplo de esta curva (curva en guiones), con  $\omega_0 = 10$  y  $\gamma = 1$ . Se la compara con la expresión sin aproximar (curva llena)..



1.8.1-a Potencia disipada: comparación entre expresión exacta y aproximación.



1.8.1-b Potencia disipada:

Si se calcula la energía media almacenada, la potencia media perdida por rozamiento o la amplitud del movimiento en cuadratura con la fuerza con estas mismas aproximaciones, se obtiene la misma forma funcional. Debe notarse que la expresión 1.8.5 es simétrica respecto de la resonancia, cosa que no ocurre con la expresión previa

a la aproximación. Se deja como ejercicio sugerido repetir estas aproximaciones para las curvas recién mencionadas.

### **1.9 Otro caso de estudio**

Observamos en una plaza en las hamacas dos chicos. En el primer caso la madre lo empuja para mantener la oscilación. En el segundo el chico se hamaca solo, sin ayuda externa. ¿Podemos describir estos movimientos en base a lo estudiado?

Aclaración: no se busca una explicación sociológica o psicológica sobre la relación con los padres. La pregunta es sobre la física de la situación.

Este caso queda para la discusión en clase. Se sugiere simular ambos casos con el modelo empírico de la pelota que cuelga del hilo.

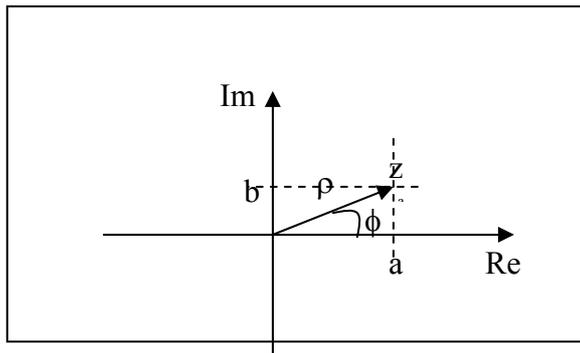
Apéndice I: números complejos

Tienen la forma:  $z=a+ib$   
 Con a y b números reales e  $i^2=-1$

Donde a es la parte real y b la parte imaginaria y se denota como:

$Re(z)=a$                        $Im(z)=b$

Se los representa en el plano con la parte real en la abscisa y la imaginaria en la ordenada.



Módulo:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Suma de complejos:

$z_1=a_1+ib_1$                        $z_2=a_2+ib_2$   
 $z_1 + z_2=a_1+ib_1+a_2+ib_2= a_1+ a_2+ ib_1+ib_2$   
 $Re(z_1 + z_2)= Re(z_1)+ Re(z_2)$                        $Im(z_1 + z_2)= Im(z_1)+Im(z_2)$

Nota: en la representación gráfica se corresponde a la suma de vectores.

Producto de complejos:

$z_1 \cdot z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)= (a_1 a_2-b_1b_2)+i(a_2 b_1- a_1b_2)$   
 Notar que el la parte real del producto NO es el producto de las partes reales.

Notación polar:

$z = \rho(\cos \phi + isen\phi)$                       con                       $\rho = |z|$

Notación exponencial:

$e^{i\phi} = \cos \phi + isen\phi$                        $z = \rho e^{i\phi}$

Notar que:

$|e^{i\phi}| = \sqrt{\cos^2 \phi + sen^2 \phi} = 1$

Producto en notación exponencial:

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\phi_1} \rho_2 e^{i\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$

de donde

$|z_1 \cdot z_2| = \rho_1 \rho_2 = |z_1| \cdot |z_2|$

exponente complejo:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} \quad \text{o sea: } \rho = e^a \quad \text{y} \quad \phi = b$$

Derivadas:

$z(t) = f(t) + ig(t)$  con  $f$  y  $g$  funciones reales

$$\dot{z} = \dot{f} + i\dot{g}$$

Desarrollo en serie:

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 + \dots + \frac{-1^n}{(2n)!}\phi^{2n} + \dots$$

$$\text{sen}(\phi) = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 + \dots + \frac{-1^n}{(2n+1)!}\phi^{2n+1} + \dots$$

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi + \frac{1}{2}(i\phi)^2 + \frac{1}{3!}(i\phi)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(i\phi)^n + \dots = \cos(\phi) + i\text{sen}(\phi)$$

Complejo conjugado:

$$\bar{z} = a - ib = \rho e^{-i\phi} = \rho(\cos\phi - i\text{sen}\phi)$$

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = a = \text{Re}(z)$$

en notación exponencial:

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{\rho e^{i\phi} + \rho e^{-i\phi}}{2} = \rho \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \rho \cos\phi$$

pues

$$\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \cos\phi$$

análogamente

$$\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \text{sen}\phi$$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + ib - a + ib}{2i} = b = \text{Im}(z) = \rho \text{sen}\phi$$

con lo que una manera de hallar las partes reales o imaginarias es sumar o restar el complejo conjugado.

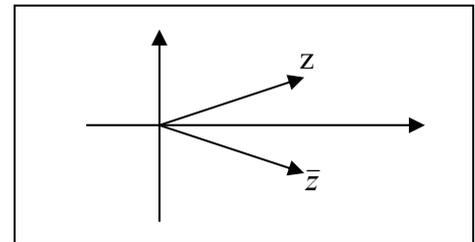
Producto por el conjugado:

$$z\bar{z} = \rho e^{i\phi} \rho e^{-i\phi} = \rho^2 e^{i(\phi-\phi)} = \rho^2 = |z|^2$$

y usando esto se puede escribir la inversa como:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

expresión que facilita hallar las partes reales e imaginarias de la inversa.



**Guía 1**

0) Encuentre la parte real, el módulo, la fase y el conjugado de

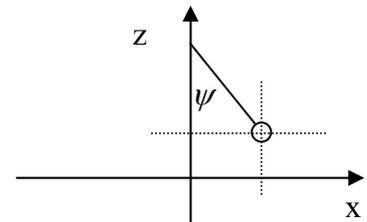
$$z = \frac{1}{a+ib} \quad z = \rho e^{i\phi} e^{i\omega t} \quad z = e^{a+ib} \quad z = e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}$$

$$z = Ae^{i\phi_1} + Be^{i\phi_2} \quad \text{con } A, B, \rho \text{ y } \phi \text{ reales.}$$

1) Escriba la ecuación del péndulo usando como coordenadas:

- a) x
- b) z
- c)  $\xi = \text{sen} \psi$

Escriba la energía potencial y cinética en dichas coordenadas. Discuta cuales elecciones son razonables y cuales no, y porque.



Prob 1...

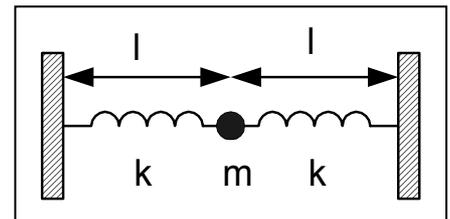
2)- Resuelva el péndulo en pequeñas oscilaciones tomando como coordenada el ángulo entre el hilo y la horizontal (techo).

3) Demuestre que si  $\psi$  es una solución matemática compleja de la ecuación del oscilador armónico, su parte real también es solución.

4) Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento para los siguientes sistemas.

a) Péndulo de longitud  $l$  en un campo gravitatorio constante  $g$ . Discuta todas las aproximaciones realizadas. Demuestre que sin dichas aproximaciones la superposición lineal de dos soluciones no es solución (el sistema no es lineal)

b) Oscilaciones longitudinales del sistema de la figura para los dos casos límite: i) resorte poco estirado ii) resorte muy elongable (slinky).



c) Oscilaciones transversales del sistema de la figura nuevamente para los mismos dos casos límite. Analice cuidadosamente las aproximaciones realizadas y para el caso **i**, describa las diferencias entre resortes inicialmente elongados ( $l > l_0$ ) y aquellos inicialmente relajados ( $l = l_0$ ). En todos los casos discuta el significado del límite cuando la constante restitutiva tiende a cero.

Compare las frecuencias de los modos longitudinales con los transversales.

5)-Resuelva el resorte vertical con un peso colgado usando como cero de coordenadas la del resorte en reposo sin peso. Escriba la energía potencial (gravitatoria más elástica) y encuentre el equilibrio y la curvatura. Al oscilar, ¿la energía potencial es solo la del resorte o también oscila la potencial gravitatoria?

6)-calcule la tensión del hilo en función del ángulo para un péndulo en pequeñas oscilaciones. Discuta la validez de la hipótesis de longitud de hilo constante. De valores de orden de magnitud razonables a los parámetros que necesite para la discusión. Discuta la validez de la aproximación  $g = \text{constante}$ .

7) Oscilador amortiguado. Si la condición inicial es  $\psi = \psi_0$  y  $\dot{\psi} = 0$ . Encuentre la solución a la ecuación de movimiento y escriba cual es la energía inicial.

8)-se tiene un péndulo que oscila con una disipación tal que su amplitud se reduce un 10% cada 10 oscilaciones. Con que precisión deberíamos determinar su longitud para notar el corrimiento en su frecuencia debido al rozamiento?

9)-verifique que si  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre, cualquier combinación lineal  $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$  también es solución. Muestre que esto también vale si la fuerza disipativa es proporcional a la velocidad. Vale si es un rozamiento constante?

10) Para un péndulo con fuerza de disipación proporcional a la velocidad calcule el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento y compárelo con la pérdida de energía.

11)-Resuelva un oscilador armónico libre al que se le agrega una fuerza de rozamiento constante. Sugerencia: resuelva cada media oscilación agregando la fuerza que cambia la posición de equilibrio. Calcule el movimiento cada medio ciclo. Evalúe como cambia la amplitud cada medio ciclo. Calcule como es esa amplitud máxima en función del número de oscilación y compárela con una fuerza disipativa proporcional a la velocidad.

12)-grafique las soluciones al oscilador amortiguado en el caso de amortiguamiento crítico y en el sobreamortiguado.

13)-a) resuelva de manera completa el oscilador forzado excitado en el pico de resonancia ( $\omega = \omega_0$ ) con la condición inicial de estar en reposo en su posición de equilibrio.

b) simplifique la expresión para el caso en que  $\gamma \ll \omega_0$  y grafíquela para poner en evidencia como el sistema tiende a su solución estacionaria.

14) Construya un péndulo de torsión, mida sus parámetros relevantes y escriba la ecuación diferencial que describe su movimiento.

15) Discuta entre los distintos osciladores unidimensionales que se le ocurran factibles, cuál construiría para verificar las predicciones del modelo de oscilador armónico libre.

16) Repita el problema 13 para el caso en que no se lo excita en el pico de resonancia. Resuelva y grafique en forma completa el caso de muy baja frecuencia.

17) Resuelva el oscilador armónico sin pérdidas y muestre que cuando domina la solución elástica (lejos de la resonancia) la solución hallada aproxima adecuadamente a la que tiene en cuenta las pérdidas.

**Nota general:** en todos los problemas (de todas las materias), analice a priori qué puede predecir sin hacer cálculos y analice a posteriori qué podría haber predicho sin hacer cálculos. Si va achicando la diferencia entre ambos está aprendiendo los conceptos (o perdiendo capacidad de análisis).



**Si el número de mediciones que puede realizar la humanidad es finita ¿No debería ser infinito el número de teorías que ajustan a esas mediciones?**

## Capítulo 2: SISTEMAS CON MAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

### 2.1 Caso de estudio:

Se tienen dos barras de acero de sección cuadrada de 1m de largo y 1cm de lado soldadas perpendicularmente a un alambre de sección circular mas delgado (de 2mm de diámetro) de modo de quedar colgando paralelas y separadas 20cm. El alambre es apoyado entre las dos barras en un soporte en v, de modo de poder rotar libremente. Se observa que si se aparta el sistema de equilibrio haciéndolo rotar rígidamente, tiende a oscilar como un péndulo físico. Si en cambio se aparta como un péndulo una sola de las barras impidiendo que la otra gire, y se libera el sistema el movimiento tiene un comportamiento más complejo. Se busca describir ese comportamiento.

El sistema es ilustrado en la figura 2.1.1 y 2.1.2. Allí definimos los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  que son las coordenadas relevantes al problema que queremos describir. En realidad el sistema tiene más grados de libertad que éstos, por ejemplo se lo puede mover en la dirección del alambre hasta hacer tope con el soporte, se lo puede levantar del mismo, se puede doblar el alambre e incluso romperlo. Estos grados de libertad son importantes en cuanto al cuidado del objeto, lo que no es algo menor en un experimento. El movimiento que nos interesa estudiar esta limitado a estos dos grados de libertad. Para ello verificamos experimentalmente que al hacerlo oscilar como hemos descrito el sistema no tiende a trasladarse.

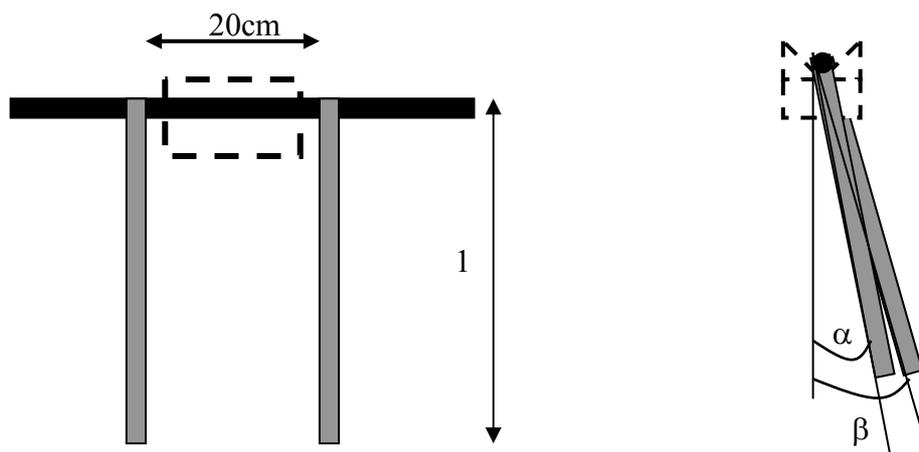


Figura 2.1.1 Esquema de los péndulos de torsión acoplados.

Para modelar el sistema necesitamos hacer algunos experimentos cualitativos para entender su comportamiento. Si tomamos ambas barras y las apartamos del equilibrio en la misma dirección, vemos que aparece una fuerza restitutiva como si fuera un péndulo rígido. Si en cambio las apartamos angularmente entre si ( $\alpha$  y  $\beta$  en sentidos opuestos) vemos que es deformable y aparece una nueva fuerza restitutiva del tipo que

se observa en un péndulo de torsión (problema 1.14). Si el apartamiento es pequeño el torque restitutivo se puede aproximar por una constante de torsión  $Q$  multiplicada por el ángulo entre las dos barras ( $\alpha - \beta$ ). Como los movimientos de las barras están limitados a girar sobre un eje, escribimos las ecuaciones de movimiento en función de las aceleraciones angulares y los momentos de inercia como:

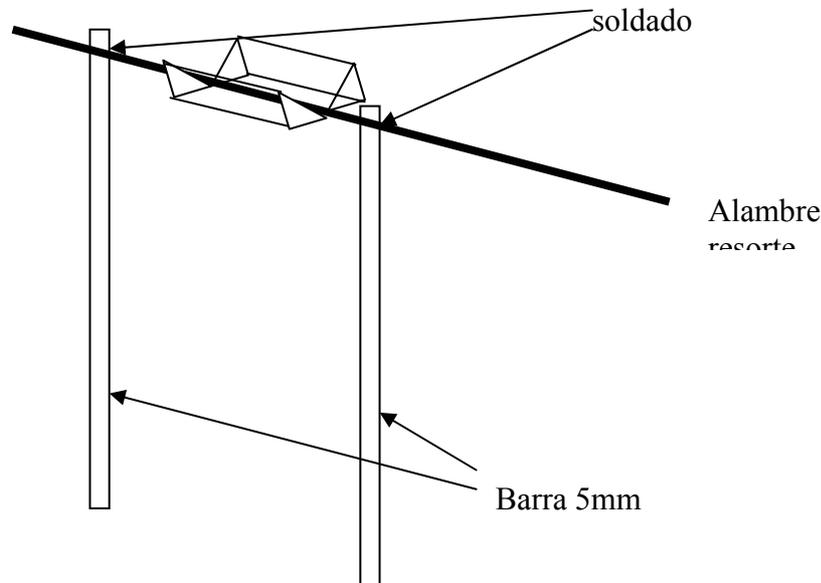


Figura 2.1.2 Vista en perspectiva del dispositivo

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl_o \alpha - Q(\alpha - \beta) \quad 2.1.1$$

$$I \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -mgl_o \beta - Q(\beta - \alpha) \quad 2.1.2$$

Donde  $l_o = l/2$  es la distancia del eje al centro de gravedad,  $l$  es el largo de la barra y ya se ha hecho la aproximación para ángulos pequeños. Nótese que el primer sumando del segundo término es el momento que ejerce la fuerza peso respecto del eje de rotación. El momento de inercia  $I$  es el de la barra respecto del eje y vale:

$$I = ml^2 / 3 \quad 2.1.3$$

y es igual para ambas barras.

Si dividimos ambas ecuaciones por el momento de inercia  $I$ , quedan constantes que tienen unidades de frecuencia al cuadrado, una relacionada con el movimiento pendulante y la otra con la componente de torsión. Las llamaremos:

$$\omega_p^2 = \frac{mgl_o}{I} = \frac{g}{l'} \quad 2.1.4$$

$$\omega_T^2 = \frac{Q}{I} \quad 2.1.5$$

donde  $l'$  es el largo equivalente del péndulo físico (centro de percusión). El valor de  $l'$  depende de la forma particular del péndulo físico, y para el caso particular de la barra es  $l' = 2/3l$ .

¿Qué esperamos?

Hacemos un análisis a priori cualitativo con lo que hemos descrito hasta ahora. Nuestra solución debe incluir una en la cual ambas barras oscilan juntas ( $\alpha=\beta$ ) a la frecuencia del péndulo físico  $\omega_p$ . Además si apartamos ambas barras de modo que ( $\alpha=-\beta$ ) se debe comportar como un péndulo de torsión cuya aceleración restitutiva se suma a la del péndulo (que sigue presente). Esto debe dar lugar a una oscilación simétrica donde se mantiene todo el tiempo  $\alpha=-\beta$  y como la aceleración restitutiva es mayor, la frecuencia de este movimiento debe ser mayor. Será mas difícil hacer el análisis cualitativo a priori para otros movimientos como el del caso en estudio. Veamos pues como resolver la matemática de este sistema.

Si observamos la estructura de las ecuaciones de movimiento 2.1.1 y 2.1.2, vemos que hay cierta simetría. Si sumamos ambas ecuaciones nos queda a la izquierda la derivada segunda de la suma y a la derecha el término en la diferencia se cancela, quedando un término proporcional a la suma:

$$\frac{d^2(\alpha + \beta)}{dt^2} = -\omega_p^2(\alpha + \beta) \quad 2.1.6$$

Si en cambio restamos ambas ecuaciones quedan solamente términos proporcionales a la diferencia entre las coordenadas:

$$\frac{d^2(\alpha - \beta)}{dt^2} = -\omega_p^2(\alpha - \beta) - 2\omega_T^2(\alpha - \beta) \quad 2.1.7$$

Nos han quedado dos ecuaciones no acopladas de dos osciladores armónicos independientes que podemos escribir definiendo nuevas coordenadas generalizadas:

$$\psi_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad 2.1.8$$

$$\psi_2 = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad 2.1.9$$

con las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega_p^2\psi_1 \quad 2.1.10$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -(\omega_p^2 + 2\omega_T^2)\psi_2 \quad 2.1.11$$

Que tienen como soluciones respectivas:

$$\psi_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + c.c. \quad 2.1.12$$

$$\psi_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)} + c.c. \quad 2.1.13$$

con

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \omega_p^2 \\ \omega_2^2 &= \omega_p^2 + 2\omega_T^2\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

Cabe notar que nuevamente las frecuencias son iguales a las aceleraciones restitutivas, en un caso igual a la proveniente de la gravedad de igual manera que en el péndulo y en el otro con un término adicional debido a la aceleración restitutiva proveniente de la torsión de la barra de acople.

Tenemos entonces cuatro constantes de integración, consistente con dos por grado de libertad. Invirtiendo 2.1.8 y 2.1.9:

$$\alpha = \psi_1 + \psi_2 \tag{2.1.15}$$

$$\beta = \psi_1 - \psi_2 \tag{2.1.16}$$

Con  $\psi_1$  y  $\psi_2$  dados por las soluciones 2.1.12 y 2.1.13. Veamos ahora el caso particular que motivó esta búsqueda. La condición inicial era:

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= \alpha_o \\ \dot{\alpha}(0) &= 0 \\ \beta(0) &= 0 \\ \dot{\beta}(0) &= 0\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

que de 2.1.8 y 2.1.9 queda:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= \alpha_o / 2 \\ \dot{\psi}_1(0) &= 0 \\ \psi_2(0) &= \alpha_o / 2 \\ \dot{\psi}_2(0) &= 0\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

por lo que la solución es:

$$\begin{aligned}A_1 &= A_2 = \alpha_o / 4 \\ \phi_1 &= \phi_2 = 0\end{aligned}\tag{2.1.19}$$

Que insertada en 2.1.15 y 2.1.16 queda:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\alpha_o}{4} (e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t}) + c.c. \\ \beta &= \frac{\alpha_o}{4} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t}) + c.c.\end{aligned}\tag{2.1.20}$$

Para analizar estos resultados utilizaremos por primera vez un truco (que repetiremos con frecuencia) para simplificar cuando sumamos dos números complejos de igual módulo. Escribimos sus fases en término de la fase media y la semidiferencia como (ver problema 1.1):

$$\omega_1 = \bar{\omega} + \Delta\omega \quad 2.1.21$$

$$\omega_2 = \bar{\omega} - \Delta\omega$$

con

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad 2.1.22$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

quedando 2.1.20 como:

$$\alpha = \frac{\alpha_o}{2} \cos(\Delta\omega t) e^{i\bar{\omega}t} + c.c. = \alpha_o \cos(\Delta\omega t) \cos(\bar{\omega}t) \quad 2.1.23$$

$$\beta = i \frac{\alpha_o}{2} \text{sen}(\Delta\omega t) e^{i\bar{\omega}t} + c.c. = \alpha_o \text{sen}(\Delta\omega t) \cos(\bar{\omega}t + \pi/2)$$

solución que graficamos en la figura 2.1.3 y 2.1.4 para el caso del experimento descrito en que

$$\Delta\omega \ll \bar{\omega} \quad 2.1.24$$

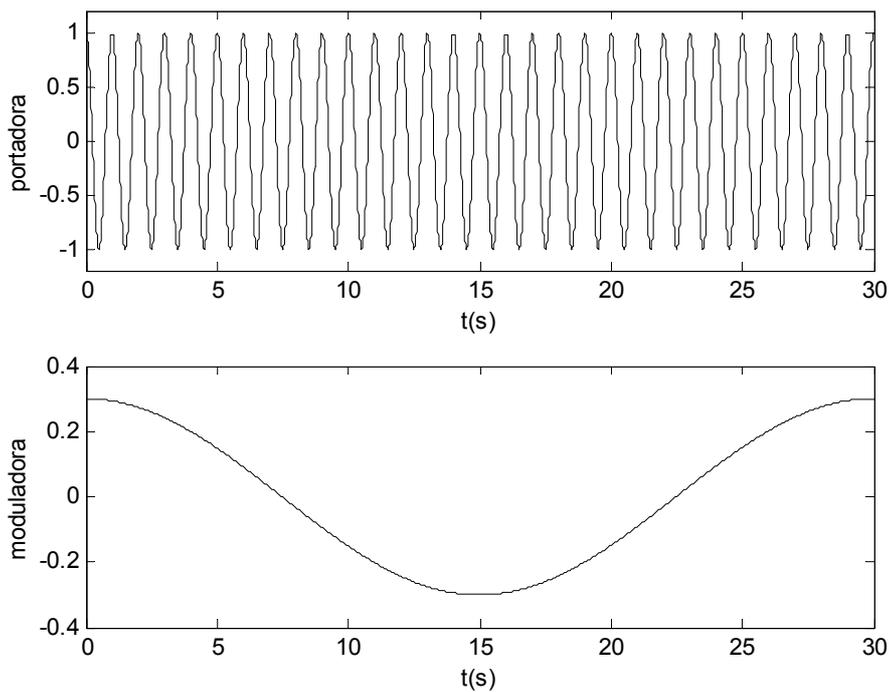


Fig. 2.1.3 Portadora y moduladora en el caso del movimiento de una de las dos barras. El producto de estas dos funciones da el movimiento final (figura 2.1.4).

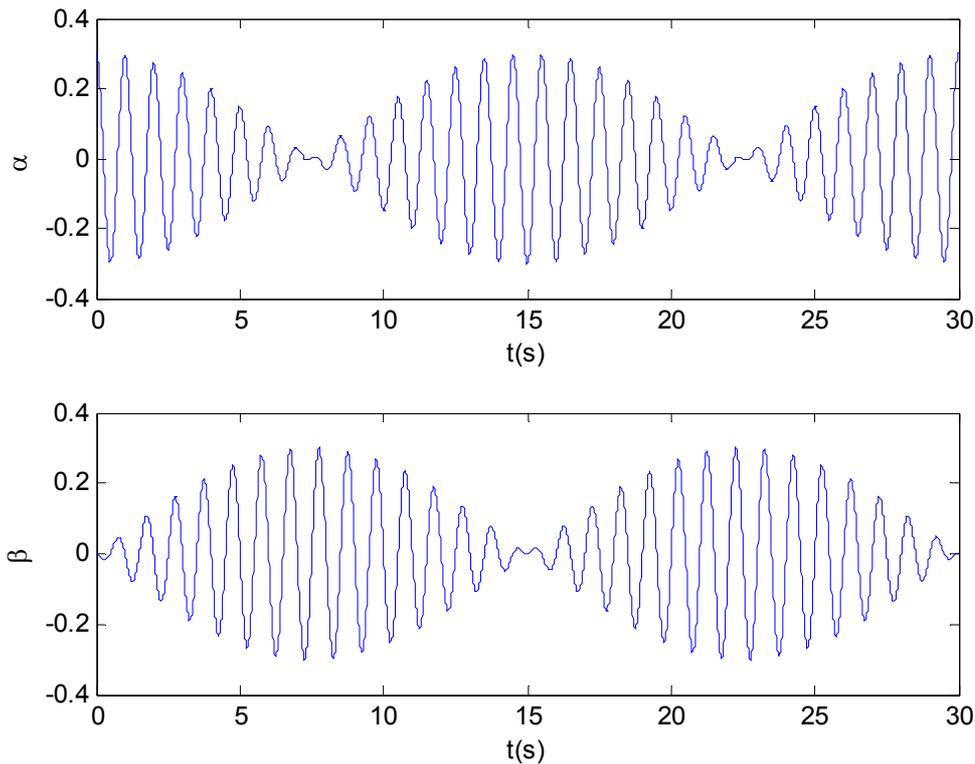


Fig. 2.1.4 Movimiento de cada barra al soltarse el sistema con una sola de ellas apartada del equilibrio. Batido de dos modos

Puede observarse que el movimiento de cada grado de libertad consta de una oscilación rápida a la frecuencia media con una amplitud que oscila a la frecuencia semidiferencia. Cuando la amplitud oscila se dice que está modulada, a la frecuencia rápida se la llama portadora y cuando hay dos frecuencias en juego, tal que se ve a la coordenada “apagarse y encenderse” intermitentemente a la frecuencia semidiferencia se habla de batido. La energía inicialmente en la primera barra, es transmitida a la segunda, que llega a tomar toda la energía cuando la primera queda detenida, y luego es devuelta a la barra original. ¿Podría a partir de los gráficos dar el valor de todos los parámetros de las ecuaciones 2.1.23 y 2.1.24?

Si analizamos el caso en que partimos de  $\alpha_0 = \beta_0$  (o sea ambos péndulos apartados juntos en la misma dirección), las condiciones 2.1.17 quedan ahora

$$\alpha(0) = \alpha_0$$

$$\dot{\alpha}(0) = 0$$

$$\beta(0) = \beta_0$$

$$\dot{\beta}(0) = 0$$

2.1.25

que de 2.1.8 y 2.1.9 queda:

$$\psi_1(0) = \alpha_0 / 2$$

$$\dot{\psi}_1(0) = 0$$

$$\psi_2(0) = 0$$

$$\dot{\psi}_2(0) = 0$$

2.1.26

por lo que la solución es:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_0 / 2 \\ A_2 &= 0 \\ \phi_1 &= \phi_2 = 0 \end{aligned} \quad 2.1.27$$

con lo que queda oscilando en el modo correspondiente a frecuencia  $\omega_1$  (pendulante) con igual amplitud en ambas coordenadas. Si partimos de  $\alpha_0 = -\beta_0$ , queda oscilando en el modo 2, con mayor frecuencia (repetir las cuentas para verificar esto). Esto coincide con nuestro análisis cualitativo previo.

## 2.2 Oscilador armónico con dos grados de libertad

Hemos visto en el ejemplo del caso anterior que jugando adecuadamente con las ecuaciones, y haciendo un cambio conveniente de variables, las hemos podido reducir a dos osciladores armónicos independientes. Hecho esto aplicamos todo lo ya conocido de un oscilador unidimensional y encontramos la solución general al problema. En realidad lo que hemos hecho es buscar una transformación lineal de las coordenadas que conviertan el sistema de ecuaciones diferenciales en ecuaciones desacopladas en las nuevas variables. El caso antes mencionado tenía una alta simetría, la pregunta es si esta descomposición será siempre posible en cualquier sistema bidimensional acoplado linealmente. Tal sería el caso por ejemplo de dos barras distintas torsionando, donde quedaría una ecuación del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= -a\alpha - b\beta \\ \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= -c\alpha - d\beta \end{aligned} \quad 2.2.1$$

donde en el caso simétrico anterior era  $a=d$  y  $b=c$ . Queremos ver si es posible encontrar soluciones similares al caso anterior, es decir en que **todas las coordenadas oscilan a la misma frecuencia y en fase** (a lo sumo con un signo distinto). Postulo que tal solución existe (y escribo la solución compleja, ya que luego sabremos encontrar a partir de ella la solución real):

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e^{i(\omega t + \phi)} \\ \beta &= \beta_0 e^{i(\omega t + \phi)} \end{aligned} \quad 2.2.2$$

y la introduzco en la ecuación, quedando una ecuación algebraica:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \alpha_0 &= -a\alpha_0 - b\beta_0 \\ -\omega^2 \beta_0 &= -c\alpha_0 - d\beta_0 \end{aligned} \quad 2.2.3$$

donde hemos eliminado en ambos términos el c.c. (demuestre formalmente que es correcto).

La ecuación 2.2.3 se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_o \\ \beta_o \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_o \\ \beta_o \end{pmatrix} \quad 2.2.4$$

Y buscamos los valores de  $\omega^2$  tal que la ecuación matricial 2.2.4 tenga una solución no trivial (la solución trivial es el vector nulo). Esta ecuación así escrita es la ecuación de autovalores de la matriz abcd,  $\omega^2$  serán los autovalores (que deben ser 2) y los vectores  $(\alpha_o, \beta_o)$  soluciones para cada autovalor serán los autovectores de la matriz. Recordemos como se resuelve este problema:

Pasamos restando el término de la derecha y nos queda una ecuación algebraica homogénea:

$$\begin{pmatrix} a - \omega^2 & b \\ c & d - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_o \\ \beta_o \end{pmatrix} = 0 \quad 2.2.5$$

Es fácil demostrar que para que esta ecuación tenga solución no trivial el determinante de la matriz debe ser nulo. Equivale a pedir que una fila sea proporcional a la otra (en más dimensiones a que alguna fila se pueda escribir como combinación de las otras). La ecuación resultante es hallar la raíz de un polinomio (polinomio característico):

$$(a - \omega^2)(d - \omega^2) - bc = 0 \quad 2.2.6$$

Las dos raíces dan los dos valores de  $\omega$  que corresponden a los dos modos posibles de oscilación del sistema con todas sus coordenadas (en este caso 2) oscilando a la misma frecuencia y en fase.

Casos particulares:

-si b o c son nulos la matriz ya está triangulada y las soluciones son triviales

$$\omega_1^2 = a \quad 2.2.7$$

$$\omega_2^2 = d$$

-si alguna raíz es imaginaria significa que la fuerza no es restitutiva en ese modo, sino que se aleja exponencialmente en el tiempo.

-si alguna raíz es nula, significa que al orden desarrollado no hay fuerza restitutiva para un modo, y se puede trasladar libremente. En efecto la partícula libre tiene la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia cero. Pero hay que tener cuidado con esta interpretación, pues normalmente nuestra ecuación proviene de un desarrollo en serie, y puede haber términos de orden superior que impidan el movimiento libre.

### 2.3 Los modos normales

A partir de la ecuación de autovalores ya encontramos las frecuencias características del sistema. Debemos ahora encontrar la relación entre las amplitudes de las dos coordenadas que hacen que el sistema se mueva en una única frecuencia. Para ello volvemos a la ecuación 2.2.5 y resolvemos los valores del vector  $(\alpha_o, \beta_o)$  para cada valor de  $\omega$ . Estos vectores solución dan una relación entre las dos coordenadas del tipo de las halladas anteriormente (por ejemplo que ambas amplitudes son iguales para el modo pendulante). Estas soluciones en que todas las coordenadas oscilan a la misma frecuencia y en fase se las denomina **modos normales**.

Quedan dos ecuaciones que no son independientes por la manera en que elegimos las frecuencias, por lo que cualquiera de las dos (la que resulte mas cómoda) nos dará la solución buscada:

$$\begin{aligned} \alpha_{oi}(a - \omega_i^2) + b\beta_{oi} &= 0 \\ c\alpha_{oi} + \beta_{oi}(d - \omega_i^2) &= 0 \end{aligned} \quad \text{con } i=1 \text{ o } i=2 \quad 2.3.1$$

de la primera ecuación se obtiene

$$\frac{\alpha_{oi}(\omega_i^2 - a)}{b} = \beta_{oi} \quad 2.3.2$$

o si  $b=0$ , se utiliza la segunda. El resultado es que el autovector es:

$$(\alpha_{oi}, \beta_{oi}) = \alpha_{oi} \left( 1, \frac{(\omega_i^2 - a)}{b} \right) \quad 2.3.3$$

Y la solución general queda:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\omega_1^2 - a)}{b} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\omega_2^2 - a)}{b} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad 2.3.4$$

Con las cuatro constantes de integración  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

## **2.4 Sistemas con más grados de libertad.**

Obviamente el formalismo antes mencionado se puede extender a sistemas con muchos grados de libertad. La estrategia es siempre proponer que existen tantos modos normales como la dimensión del sistema (número de grados de libertad) y en cada modo todas las coordenadas evolucionan armónicamente a la misma frecuencia y en fase. Se escribe el sistema de ecuaciones diferenciales que describe la dinámica del sistema (esta es la física del problema), se plantea la solución antes descrita, se obtiene una ecuación algebraica de autovalores y autovectores. Los autovalores son las frecuencias al cuadrado de los modos normales y los autovectores proveen las amplitudes relativas de las distintas coordenadas en cada modo. Lo importante una vez encontradas las soluciones es intentar comprender la física que nos está revelando, muchas veces relacionada con la simetría del problema. Suele ocurrir que a priori uno vea que hay grados de libertad desacoplados, con lo que ya se tiene separado algún modo y se simplifica el problema (algebraicamente esto se manifiesta en que la matriz resulta diagonal en bloques). Asimismo uno puede notar que por la simetría del problema convenga usar coordenadas generalizadas que de antemano sabemos que desacoplan el problema. Por ejemplo en el caso de las barras que oscilaban del caso antes estudiado, uno podía ver a priori que ambas moviéndose juntas eran un modo normal, ya que se movían como un rígido. Ya se tenía uno de los modos.

Al plantear un sistema de mayor dimensión, la matriz que aparece en 2.2.5 será de mayor dimensión, y por lo tanto el polinomio característico será de orden mayor. Nos limitaremos a analizar sistemas en que hallar esas raíces sea razonablemente sencillo.

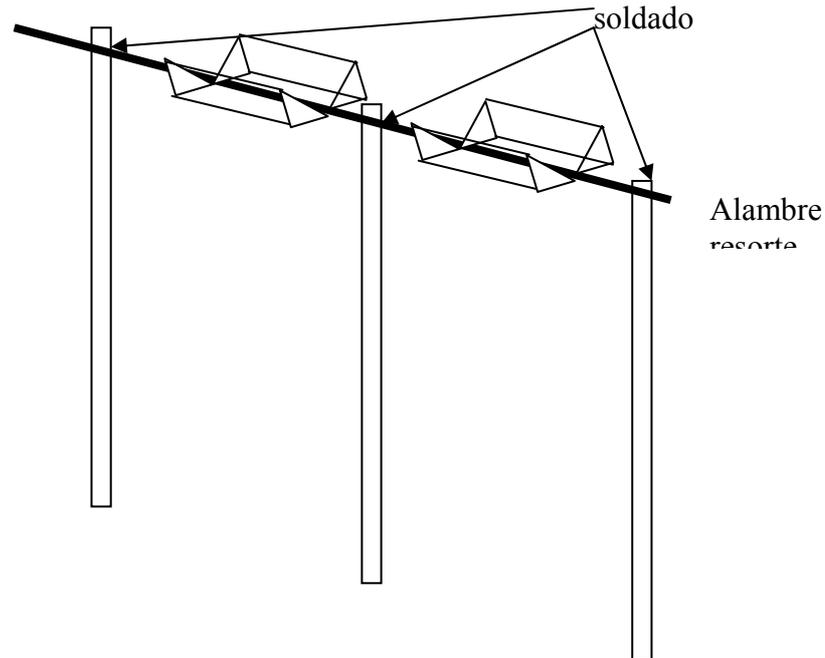


Fig. 2.4.1 tres barras acopladas.

Veamos un ejemplo un poco más complejo. Supongamos ahora que son tres las barras enlazadas entre sí (figura 2.4.1). Denominamos a los ángulos en que se aparta cada barra del equilibrio  $\alpha_1$   $\alpha_2$   $\alpha_3$ . Queda como ejercicio encontrar los modos. Podemos analizarlo cualitativamente de la siguiente manera:

Un modo será cuando oscila como péndulo rígido. Para este caso las tres coordenadas son iguales y el vector posición será

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha(1, 1, 1)$$

Este es el modo en que oscila el centro de gravedad del conjunto.

Otro modo es cuando un extremo oscila para un lado, el centro queda quieto y el otro extremo se mueve en sentido contrario:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha(1, 0, -1)$$

En este caso el centro de gravedad no se mueve.

Por la simetría del problema (tres barras iguales) el tercer caso resulta de pensar cual es el movimiento de los tres cuerpos que queda que deja quieto en centro de gravedad, y es el del centro hacia un lado y los extremos hacia el otro la mitad de amplitud cada uno:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha(1, -2, 1)$$

Estos tres vectores renormalizados son mi nueva base (modos normales). El primero es el de menor frecuencia por no tener componente de torsión, el segundo tiene menor torsión que el tercero, que será el de mayor frecuencia. Si somos capaces de escribir las ecuaciones dinámicas en esta nueva base, nos quedarán directamente desacopladas. Se deja como ejercicio (problema 5). El método general, como dijimos, no es obtenerlos a pura intuición sino escribiendo las ecuaciones y resolviendo.

## 2.5 Sistemas con disipación

Hasta ahora hemos estudiado el problema de osciladores acoplados sin pérdidas. Incluyamos como ejemplo pérdidas proporcionales a la velocidad en el caso de estudio

2.1.1. Podemos pensar en pérdidas debido al movimiento pendular  $\Gamma_p$  y otras debido a la torsión  $\Gamma_T$ .

### ¿Qué esperamos?

El modo de menor frecuencia no introduce torsión, por lo que  $\Gamma_T$  no debe afectar ese movimiento. En cambio el modo de mayor frecuencia incluye torsión y movimiento pendular, por lo que ambos mecanismos de pérdida deben aparecer, teniendo una resonancia más ancha (un tiempo de decaimiento menor).

Escribamos las ecuaciones incluyendo las pérdidas:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgl_o}{I}\alpha - \frac{Q}{I}(\alpha - \beta) - \Gamma_p \frac{d\alpha}{dt} - \Gamma_T \frac{d(\alpha - \beta)}{dt} \quad 2.5.1$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{mgl_o}{I}\beta + \frac{Q}{I}(\alpha - \beta) - \Gamma_p \frac{d\beta}{dt} - \Gamma_T \frac{d(\beta - \alpha)}{dt} \quad 2.5.2$$

Nuevamente podemos pasar a las mismas coordenadas normales que antes quedando:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega_1^2\psi_1 - \Gamma_p \frac{d\psi_1}{dt} \quad 2.5.3$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega_2^2\psi_2 - (\Gamma_p + 2\Gamma_T) \frac{d\psi_2}{dt} \quad 2.5.4$$

Vemos que nuevamente quedaron los mismos modos cada uno con una disipación distinta, como esperábamos. La solución a este problema ya la conocemos, y no hay mucho que agregar. Sin embargo cabe mencionar que matemáticamente podemos incluir términos proporcionales a la velocidad arbitrarios que no hubieran dado que al pasar a los modos normales anteriores se mantenían desacopladas las ecuaciones. Si se desacoplaron es porque los mecanismos de pérdida tenían la misma simetría que las fuerzas restitutivas. Nada impide poner algún rozamiento adicional a uno de los péndulos, de modo que no pierde la simetría en la parte restitutiva pero sí en la disipativa. En este caso la matemática del problema queda mas engorrosa, y como no es lo que ocurre en sistemas físicos de interés, evitaremos este tipo de situaciones en este curso. Nos limitamos entonces a: *sistemas en que la disipación mantiene la estructura de las ecuaciones*, es decir en que si planteamos los modos normales despreciando las pérdidas, luego cada modo tendrá su coeficiente de pérdida propio, manteniéndose desacopladas las ecuaciones.

Observación: el modo de frecuencia más alta tiene una disipación mayor ya que incluye la debida a la torsión. Por lo tanto si inicio el sistema en una situación en que los dos modos son excitados, después de un tiempo solamente quedará con una amplitud apreciable el modo de menor frecuencia. Es por ello que al intentar excitar el sistema del caso de estudio 2.1.1 en el modo de mayor frecuencia al final se lo ve oscilando en el de menor. Tendríamos que poner el sistema en condiciones iniciales demasiado bien controladas para que el modo más bajo no aparezca.

## 2.6 Sistemas forzados

La particularidad de un sistema forzado de dimensión múltiple, es que uno no fuerza necesariamente un modo normal, sino todos o muchos al mismo tiempo. Por ejemplo en el caso de estudio 2.1.1. si forzamos una de las barras, estamos forzando ambas coordenadas normales, ya que la coordenada de cada barra entra en ambos modos. Supongamos que aplicamos sobre la primera barra una cupla:

$$T = T_o \cos(\omega t) \quad 2.6.1$$

a la ecuación 2.5.1 debemos ahora sumarle este término, mientras que 2.5.2 no cambia (no hay fuerzas adicionales sobre la segunda barra). Pasando nuevamente a coordenadas normales y usando:

$$\frac{T}{2I} = a_o \quad 2.6.2$$

queda:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega_1^2\psi_1 - \Gamma_p \frac{d\psi_1}{dt} + a_o \cos(\omega t) \quad 2.6.3$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega_2^2\psi_2 - (\Gamma_p + 2\Gamma_T) \frac{d\psi_2}{dt} + a_o \cos(\omega t) \quad 2.6.4$$

donde se ve que la fuerza aplicada sobre la primera barra quedó distribuida mitad en cada modo, ya que precisamente  $\frac{1}{2}$  es el peso que tiene la coordenada  $\alpha$  en cada coordenada normal (ver 2.1.8 y 2.1.9). Cada modo oscilará en el estado estacionario (esperando suficiente tiempo para que disipe el transitorio) con las amplitudes en fase (elástica) y en cuadratura (absorbente) con la fuerza. La solución estacionaria es:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \cos(\omega t) + B_1 \text{sen}(\omega t) \\ \psi_2 &= A_2 \cos(\omega t) + B_2 \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad 2.6.5$$

con las amplitudes A y B dadas por 1.6.10 y 1.6.11 para cada modo con sus respectivos parámetros (frecuencia de resonancia y pérdidas).

A partir de la expresión de las coordenadas  $\alpha$  y  $\beta$  en términos de las coordenadas normales (2.1.15 y 2.1.16), se obtiene las soluciones:

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi_1 + \psi_2 = (A_1 + A_2) \cos(\omega t) + (B_1 + B_2) \text{sen}(\omega t) \\ \beta &= \psi_1 - \psi_2 = (A_1 - A_2) \cos(\omega t) + (B_1 - B_2) \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad 2.6.6$$

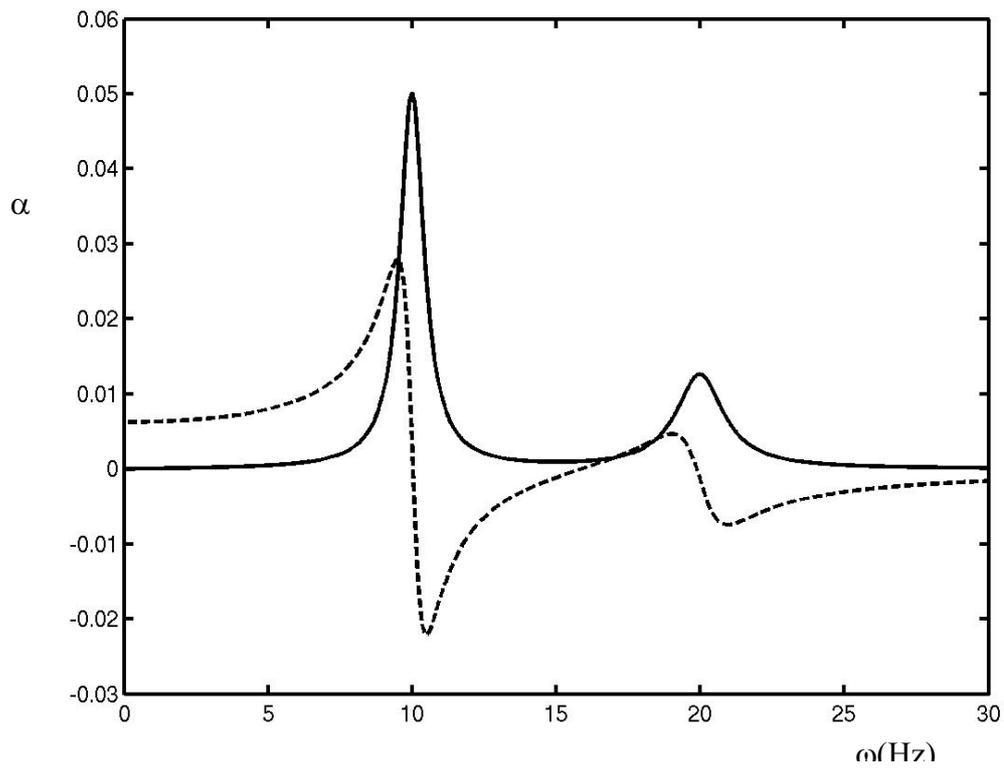
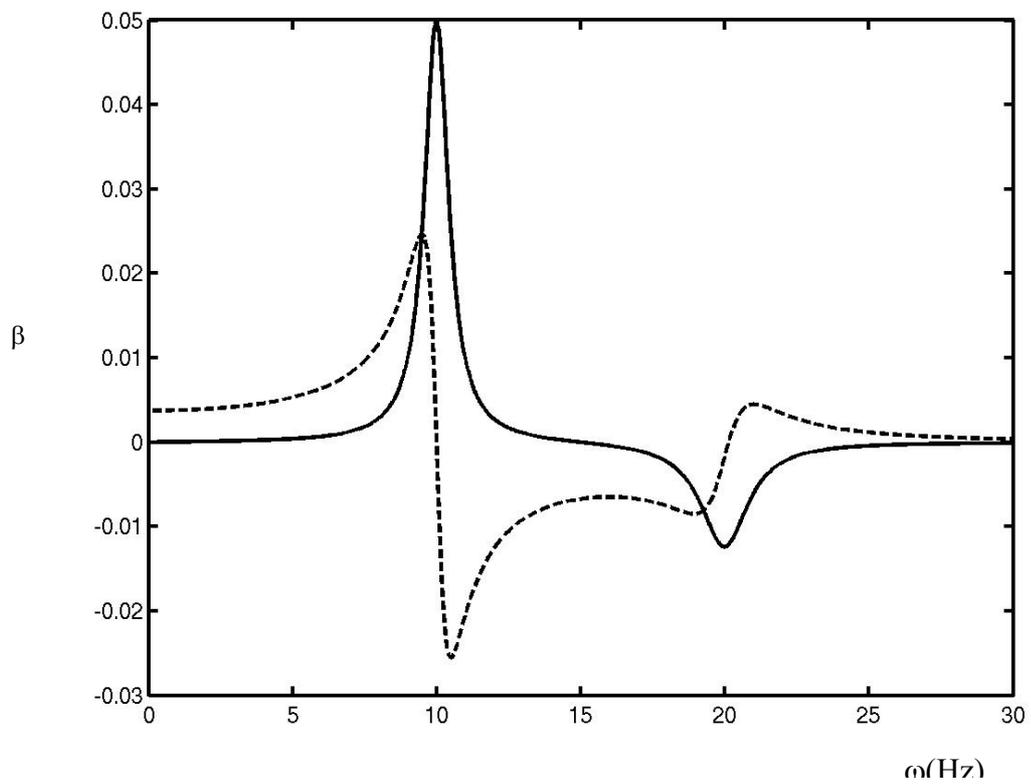


figura 2.6.1 Sistema de dos grados de libertad forzado. Arriba: movimiento de coordenada forzada. Abajo: movimiento de la coordenada no forzada. Línea llena: término absorbente (en cuadratura con el forzante). Línea partida: término elástico (en fase).



En la figura 2.6.1 se muestra la dependencia típica de la amplitud elástica y absorbente de la coordenada  $\alpha$  en función de la frecuencia de oscilación. Se graficó el caso en que el ancho de los picos de resonancia es menor que la separación, de modo que ambos quedan bien resueltos. Se puede observar que al pasar por cada resonancia domina el modo absorbente correspondiente a esa resonancia, y fuera de ellas domina esencialmente el modo elástico más cercano. Así a baja frecuencia oscila en fase con la fuerza en el modo pendulante sin torsión y a muy alta frecuencia oscila en fase (a menos de un signo) con el modo alternado en que además torsiona. En el medio entre los dos hay un punto en que la componente elástica se anula ( $A_1 + A_2 = 0$ ) y queda solo una muy pequeña componente absorbente. Ambos modos interfieren en esta coordenada. A esa frecuencia la segunda barra oscila con mayor amplitud que la primera, a pesar de estar aplicando la fuerza en la primera.

Para calcular la potencia entregada por la fuerza externa solo hay que repetir el procedimiento anterior y multiplicar el momento de la fuerza por la velocidad angular de la primer barra. En el promedio temporal solamente contribuye la componente en cuadratura (absorbente), o sea el coeficiente B, que queda multiplicado por la frecuencia por haber derivado la coordenada que oscila armónicamente. Se ve que al barrer la frecuencia aparece absorción significativa solamente alrededor de cada resonancia, y con este método, excitando el sistema con frecuencia variable y midiendo la potencia absorbida se pueden determinar las frecuencias propias de oscilación y las pérdidas asociadas a cada modo (anchos de las curvas de resonancia). Obsérvese que esta medición no me dice como es exactamente el modo (que combinación de coordenadas participan).

Veamos ahora el sistema de la figura 2.4.1 consistente en tres barras unidas por una de torsión. Si excitamos el sistema poniendo una fuerza en una barra del extremo, vamos a excitar todos los modos normales pues todos ellos tienen componente  $\alpha_1$  o  $\alpha_3$ , pero si excitamos por la barra del centro, como ésta no se mueve en el segundo modo, no aparecerá esa resonancia al barrer frecuencia. Es un modo “mudo” para esa excitación. Como conclusión no alcanza con barrer la frecuencia para detectar **todos** los modos, depende de como acoplamos al sistema cuales modos son mas sensibles. Esto es un resultado fundamental de las espectroscopías, hay “reglas de selección” que hacen que ciertos modos no aparezcan para ciertos experimentos debido a la manera en que excitamos el sistema. La espectroscopía no provee la información completa sobre la estructura de los modos, solamente en el mejor de los casos nos dice cual es la frecuencia de resonancia y el ancho del pico (vida media del modo). Es a través de modelos que hacemos del sistema físico en cuestión que vamos entendiendo la estructura de los modos. La espectroscopía sí sirve por ejemplo para determinar a partir de las frecuencias y las vidas, los coeficientes específicos del modelo como la constante de torsión del alambre, el momento de inercia de la barra, o el que contenga el modelo.

## 2.7 ¿Cuándo es débil el acoplamiento?

Si se tienen dos osciladores no acoplados, cada uno oscila a su frecuencia propia sin enterarse de la existencia del otro. Cuando resolvemos el caso 2.1.1 por más débil que sea el acoplamiento aparecen dos modos en que las dos barras oscilan coherentemente (en fase). No parece muy creíble que dos osciladores se acoplen independientemente de lo débil que sea la interacción. Analicemos el problema desde una perspectiva más general, supongamos que tenemos dos osciladores no necesariamente iguales acoplados linealmente. Las ecuaciones que describen esta situación son:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \chi_1}{dt^2} &= -\omega_1^2 \chi_1 - \omega_{ac}^2 (\chi_1 - \chi_2) \\ \frac{d^2 \chi_2}{dt^2} &= -\omega_2^2 \chi_2 - \omega_{ac}^2 (\chi_2 - \chi_1)\end{aligned}\quad 2.7.1$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las frecuencias de los dos osciladores aislados y  $\omega_{ac}$  es una constante de acoplamiento que tiene unidades de frecuencia. Cuanto menor sea este parámetro, menor será el acoplamiento. ¿Pero menor que qué?

¿Qué esperamos?

Buscamos que la resolución del problema nos indique que cuando el acoplamiento tiende a cero, los modos normales tienden a los de los osciladores aislados. O sea las frecuencias tiendan a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y los modos se parezcan a un oscilador con amplitud mucho mayor que el otro. Pero ya resolvimos que si los dos son iguales, no importa cuan pequeña sea la interacción, los osciladores se mezclan. Por lo tanto es de esperar que cuan fácil se desacoplan dependa de cuan distintas sean las frecuencias.

Resolvemos el problema de la manera estándar, quedando el polinomio siguiente para la frecuencia (ecuación de autovalores):

$$(\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_{ac}^2)(\omega^2 - \omega_2^2 - \omega_{ac}^2) - \omega_{ac}^4 = 0 \quad 2.7.2$$

que escribimos reagrupando como:

$$(\omega^2)^2 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_{ac}^2) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_{ac}^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0 \quad 2.7.3$$

Cuya solución es:

$$\omega^2 = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_{ac}^2)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_{ac}^2)}{2}\right]^2 - \omega_{ac}^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (\omega_1^2\omega_2^2)} \quad 2.7.4$$

que luego de reagrupar y simplificar queda como:

$$\omega^2 = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} + \omega_{ac}^2 \pm \sqrt{\left[\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2}\right]^2 + \omega_{ac}^4} \quad 2.7.5$$

Vemos que aún cuando el término de acoplamiento sea muy débil, puede ser mayor que el término de la diferencia de cuadrados de las dos frecuencias que aparece en la raíz. Por lo tanto hay dos situaciones límite:

$$\text{a) } \left|(\omega_1^2 - \omega_2^2)\right| \gg \omega_{ac}^2 \quad \text{acoplamiento débil} \quad 2.7.6$$

$$\text{b) } \left|(\omega_1^2 - \omega_2^2)\right| \ll \omega_{ac}^2 \quad \text{acoplamiento fuerte} \quad 2.7.7$$

Para el primer caso se desarrolla la raíz cuadrada al orden más bajo en el término de acoplamiento y queda (haga la demostración rigurosa):

$$\omega^2 = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} + \omega_{ac}^2 \pm \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} \left[1 + \frac{2\omega_{ac}^4}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}\right] \quad 2.7.8$$

$$\omega^2 = \begin{cases} \omega_1^2 + \omega_{ac}^2 \left[ 1 + \frac{\omega_{ac}^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right] \\ \omega_2^2 + \omega_{ac}^2 \left[ 1 - \frac{\omega_{ac}^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right] \end{cases} \quad 2.7.9$$

que corresponde a los modos casi puros, y tiende a los modos puros cuando el acoplamiento tiende a cero.

Si se buscan del modo habitual las relaciones entre las amplitudes de las dos coordenadas en cada modo (autovectores o modos normales) se encontrará (problema 8)

$$\text{Modo 1: } \omega_{ac}^2 \chi_1 = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \chi_2 \Rightarrow \chi_2 \ll \chi_1 \quad 2.7.10$$

$$\text{Modo 2: } \omega_{ac}^2 \chi_2 = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \chi_1 \Rightarrow \chi_1 \ll \chi_2 \quad 2.7.11$$

O sea que estamos frente a modos casi puros de los osciladores aislados.

Para el caso b) (2.7.7) en 2.7.5 se desprecia la diferencia de cuadrados en la raíz, quedando:

$$\omega^2 = \begin{cases} \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} \\ \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} + 2\omega_{ac}^2 \end{cases} \quad 2.7.12$$

que para el caso en que los dos osciladores son idénticos coinciden con las halladas anteriormente. Del mismo modo se puede demostrar que la relación entre las coordenadas para los modos son:

$$\text{Modo 1: } \chi_2 = \left[ 1 - \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{2\omega_{ac}^2} \right] \chi_1 \quad 2.7.13$$

$$\text{Modo 2: } \chi_2 = - \left[ 1 + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{2\omega_{ac}^2} \right] \chi_1 \quad 2.7.14$$

Que da los modos simétricos y antisimétricos cuando los dos osciladores son iguales.

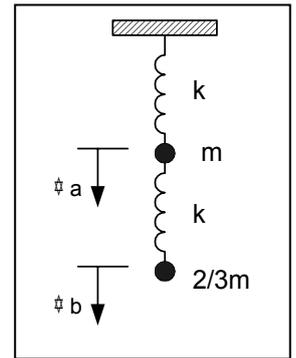
Hemos comparado dos situaciones límite: cuando el acoplamiento es mayor que la diferencia de frecuencias, y el caso opuesto en que es menor. Hay otra constante de tiempo característica del sistema, que es la constante de disipación. Cabe pues también comparar esta constante con las anteriores y encontrar nuevos casos límite.

## **2.8 Caso de estudio:**

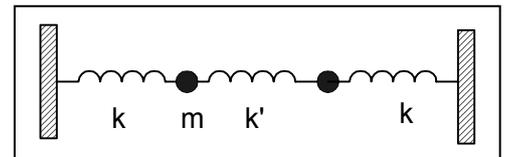
Al resolver el problema de una masa que cuelga de un resorte tiene tres modos: dos corresponden al péndulo bidimensional y uno al resorte vertical puro. Este sería el caso de la pelota de tenis del caso 1.1.1 si el hilo no es deformado en exceso y vale aproximarlo por un resorte. Se puede repetir con hilos más elásticos (menos plásticos) y se observará una buena aproximación a la solución hallada. Sin embargo si intentamos hacer oscilar como un péndulo un “slinky” (resorte muy estirable) con una masa en su extremo, se observa que es imposible evitar que el resorte se contraiga y expanda al mismo tiempo. Se pide una explicación a este fenómeno.

**Guía 2**

- 1.- a) Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad y obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
- b) Sabiendo que en  $t=0$  el sistema satisface las siguientes condiciones  $\Psi_a(0)=1$  y  $\Psi_b(0)=0$  y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.
- c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.



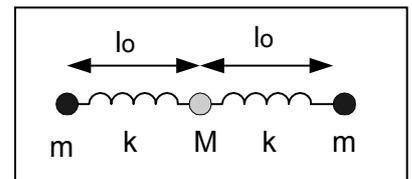
- 2.- Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante  $k$  y unidas por otro resorte de constante  $k'$ . Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.



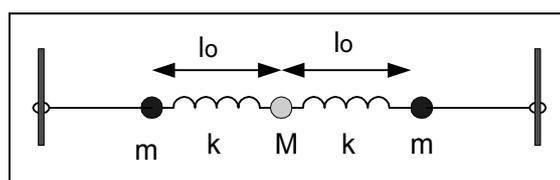
¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son batidos?

- 3.- Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa  $m$  están situados a ambos lados del átomo de masa  $M=2m$  y vinculados por resortes de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ . Como sólo estamos interesados en analizar los modos longitudinales

- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.
- b) Halle las frecuencias de los modos normales.
- c) Dibuje las configuraciones de cada modo.
- d) Si el centro de masa de la molécula se mueve con  $v_0=cte$ , halle la solución para  $\Psi_a(t)$ ,  $\Psi_b(t)$  y  $\Psi_c(t)$ .
- e) Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).
- f) Si se aplica a una de las masas una fuerza armónica, ¿a cuál conviene aplicarla para excitar más eficientemente el modo de mayor frecuencia?



- 4.- Se analizan las oscilaciones transversales del sistema de la figura.
- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas.
- b) Halle las frecuencias de los modos normales.
- c) Dibuje la configuración correspondiente a cada modo normal.
- d) Si el centro de masa se encuentra en reposo, determine los desplazamientos de cada masa como función del tiempo.
- e) ¿Qué condiciones iniciales que permiten excitar sólo el segundo modo?
- f) Si se fuerza la masa del centro y se va variando la frecuencia, ¿qué modos se observan?
- g) ¿Cómo se modifican los resultados anteriores si el extremo de la derecha se fija a la pared?

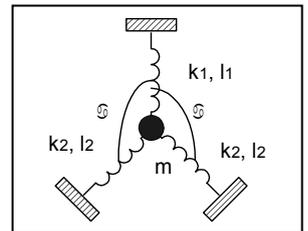


5) Escriba las ecuaciones de movimiento de las tres barras acopladas discutidas en la sección 2.3 en la base allí propuesta y demuestre que esas coordenadas quedan desacopladas.

6)- Considere un sistema similar al del caso de estudio 2.1, pero ahora con los extremos fijos a 20cm de cada barra.

- Discuta cualitativamente a priori como espera que sean los modos normales, y como serán sus frecuencias comparadas con las del sistema con extremos libres.
- Resuelva el problema analíticamente, suponiendo que hay pérdidas proporcionales a la velocidad de torsión que dominan los mecanismos de pérdidas. Discuta como se comparan las resonancias con el caso libre.
- Si se fuerza uno de los péndulos de modo que oscile con una amplitud fija a una frecuencia fija, ¿cómo será el movimiento del otro péndulo?

- 7)- Dado el sistema de la figura, supuesto en el equilibrio en las condiciones del dibujo, calcule sus frecuencias y modos normales,
- cuando todos los resortes son slinkies
  - cuando las longitudes naturales de los resortes son menores que las graficadas.



8) Encuentre los modos normales de los osciladores acoplados en los dos casos discutidos de acoplamiento "débil" y "fuerte" y muestre solamente para el caso  $|(\omega_1^2 - \omega_2^2)| \gg \omega_{ac}^2$  los modos se parecen a los de los osciladores desacoplados.

9) En el caso de las barras acopladas con el resorte de torsión de; caso 2.1 se desea asimetrizar el sistema agregándole una pesa a una de las barras. ¿Cuán grande debe ser esa pesa para que el sistema se lo pueda considerar esencialmente desacoplado.

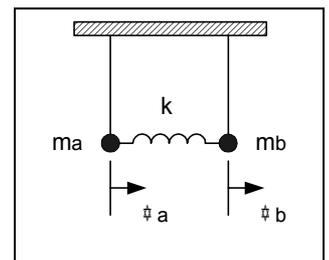
10).- Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes  $m_a$  y  $m_b$ , acoplados mediante un resorte de constante k

- Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa
- Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.
- Suponiendo que el acoplamiento es débil y que las condiciones iniciales son

$\Psi_a(0)=0$  y  $\Psi_b(0)=1$  y las velocidades iniciales son cero.

Obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.

d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de las siguientes magnitudes  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $V_a$  y  $V_b$ , donde T indica energía cinética y V energía potencial gravitatoria. Demuestre que bajo la hipótesis de acoplamiento débil



$\langle T_a \rangle \sim \langle V_a \rangle$  ( $\langle \rangle$ =valor medio) y  $\langle T_b \rangle \sim \langle V_b \rangle$ . Grafique  $\langle E_a \rangle$  y  $\langle E_b \rangle$ , y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ( $m_a=m_b$  y  $m_a$  muy diferente de  $m_b$ ). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

¿Es mejor la teoría que más diversidad abarca o la que mayor precisión predictiva tiene para un problema dado?

## Capítulo 3: ONDAS EN UNA DIMENSIÓN

### 3.1 Caso de estudio: la cuerda

Se tiene una cuerda de nylon® tendida horizontalmente atada en un extremo y sujeta en el otro a un oscilador que la mueve a una frecuencia controlada con un generador electrónico (figura 3.1.1). Se observa que al variar la frecuencia la figura que describe la cuerda va cambiando cualitativamente. Va describiendo movimientos ondulares con amplitud dependiente de la frecuencia y con oscilaciones espaciales más rápidas cuanto mayor es la frecuencia. Hay frecuencias características en que la amplitud aumenta significativamente. En la figura 3.1.2 se muestran algunas figuras típicas. En la figura 3.1.3 se grafica cualitativamente como cambia la amplitud con la frecuencia.

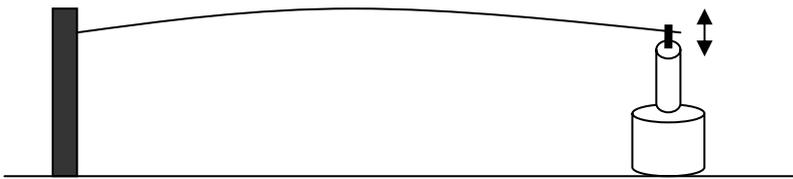


Figura 3.1.1 Cuerda de nylon excitada en un extremo

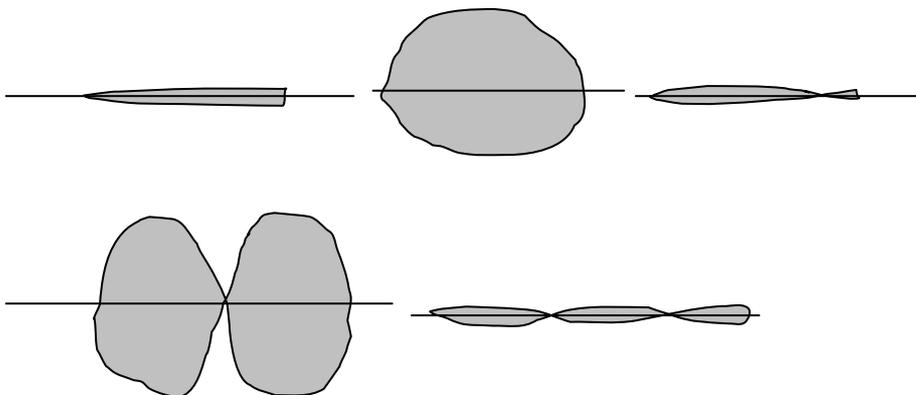


Figura 3.1.2 Aspecto cualitativo de la sogá

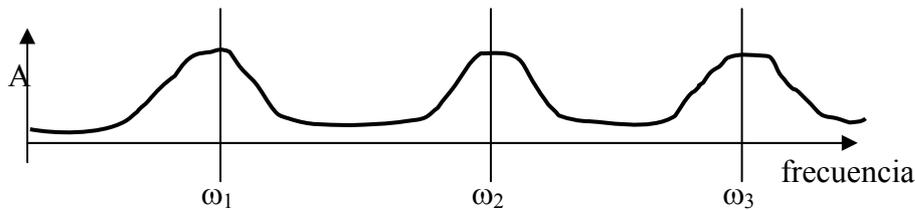


Figura 3.1.3 Amplitud de la vibración

#### Análisis preliminar:

Para mejorar nuestra percepción del movimiento podemos colocar una cámara y filmar la evolución. Hay que tener en cuenta el número de cuadros que toma la cámara por segundo para evitar errores de interpretación. Si la cámara toma 15 cuadros por segundo, las frecuencias que observamos deben ser bastante menores, ya que sino corremos el riesgo de ver el movimiento en forma estroboscópica. Por ejemplo si la soga justo oscila a 15Hz, la vamos a ver siempre en el mismo lugar. Si oscila un poco más rápido, la vamos a ver en cada cuadro ligeramente movida y nos parecerá que se mueve muy lentamente. Si el tiempo de registro de la cámara para cada cuadro es largo, vamos a ver borroneada la cuerda pues se movió durante la toma.

Se pueden rescatar las siguientes observaciones iniciales:

- 1-todos los puntos del sistema oscilan a la misma frecuencia, que es la de excitación.
- 2-hay frecuencias en que la oscilación es muy amplia, a modo de resonancia. Dichas frecuencias son aproximadamente múltiplos de la primera que encontramos. Podría ocurrir que esta observación no aparezca si no comenzamos el experimento a frecuencias suficientemente bajas. Entonces la observación será:
  - 2b- todas las frecuencias son aproximadamente múltiplos de la diferencia entre dos consecutivas.

#### Primeras conclusiones:

Estamos ante un sistema de infinitos grados de libertad, si hacemos la

**hipótesis fuerte 1: el hilo es continuo. Ignoramos su estructura microscópica (atómica o molecular)**

Al excitar en un extremo con el oscilador, aparecen “resonancias” a frecuencias fijas. Parece haber un conjunto numerable de frecuencias propias. En todos estos casos el extremo excitado no parece moverse significativamente comparado con el de máxima amplitud. La excitación que hacemos es de amplitud de movimiento fija, no es una fuerza de amplitud fija. Busquemos un sistema que dejemos oscilar libremente y se parezca al planteado.

Se deja quieto el oscilador, pasando ese extremo a ser fijo. Apartamos la cuerda desde el centro de modo que queda en forma de V y la dejamos libre (figura 3.1.4). Vemos que esencialmente oscila de manera muy parecida a cuando se la excitaba en la primera resonancia. La frecuencia de oscilación es similar (si la podemos medir con la cámara, se puede hacer una comparación cuantitativa) y el tiempo en que tiende a detenerse es similar a la inversa del ancho de la resonancia descrita en la figura 3.1.3. Hemos encontrado algo que se comporta como un oscilador armónico, hemos encontrado el primer modo normal del sistema. Viendo cualitativamente la figura 3.1.2. es razonable suponer que el segundo modo se lo puede excitar eficientemente si las condiciones iniciales se parecen en la forma. Se intenta la forma indicada en la figura 3.1.4 con un cruce por cero en el centro. La dificultad es soltar ambos puntos al mismo

tiempo. El error que cometamos en esto hará que se excite también el modo fundamental (de más baja frecuencia). La dificultad es similar a cuando se intentaba excitar solamente el modo de mayor frecuencia en el caso 2.1 de las dos barras acopladas.

Acá llegamos a dificultades experimentales para seguir avanzando, es el momento de realizar un modelo para profundizar la descripción y poder hacer predicciones.

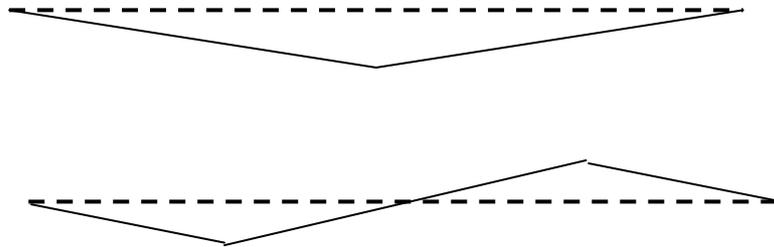


Figura 3.1.4. Condiciones iniciales para la cuerda

#### Posición de equilibrio

Para describir mecánicamente el sistema haremos algunas hipótesis simplificadoras, aunque es difícil a priori saber la relevancia de la simplificación.

**hipótesis fuerte 2: el hilo es uniforme.** Estamos suponiendo que la estructura del hilo es un continuo en que sus propiedades no cambian en ningún punto. Por ejemplo la densidad es igual en todo punto.

**hipótesis fuerte 3: el hilo no realiza esfuerzos de corte.** La fuerza entre dos segmentos contiguos es por contacto y en la dirección del hilo. Para verificar la validez de esta hipótesis tomemos el hilo de un punto y veamos si se lo puede sostener horizontalmente, vemos que el extremo cae y el hilo se dobla indicando que no hay fuerzas transversales (de corte) que lo sostengan. Si lo sostenemos muy cerca del extremo (aproximadamente 1cm dependiendo del grosor del hilo) sí se sostiene, indicando que hay algún esfuerzo de corte. Su importancia es difícil de determinar a priori pero es obviamente más importante en una soga gruesa.

**hipótesis fuerte 4: el movimiento de cualquier tramo del hilo es solamente una traslación en la dirección transversal.** No hay desplazamientos longitudinales.

**hipótesis fuerte 5: el hilo se lo supone unidimensional.** No hay deformaciones transversales relevantes al problema.

Es obvio que si se curva, la longitud del lado interior es menor que la exterior, por lo que hay algún tipo de deformación que estamos ignorando. Esta deformación indica que además de trasladarse, un segmento pequeño del hilo está rotando (ver figura 3.1.5). Cuanto más delgado sea el hilo, menos significativo es este movimiento.

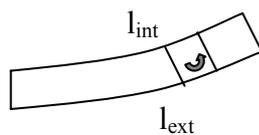


Fig. 3.1.5. Rotación de un tramo

**Al estar sujeto de los extremos, el hilo colgará describiendo una curva, que será más pronunciada cuanto mayor sea su densidad y menor la tensión en los**

extremos. En la figura 3.1.6 se muestra esto en forma exagerada para poder indicar las variables. Por otro lado la experiencia nos indica que los ángulos son muy pequeños, siendo la curva prácticamente una recta.

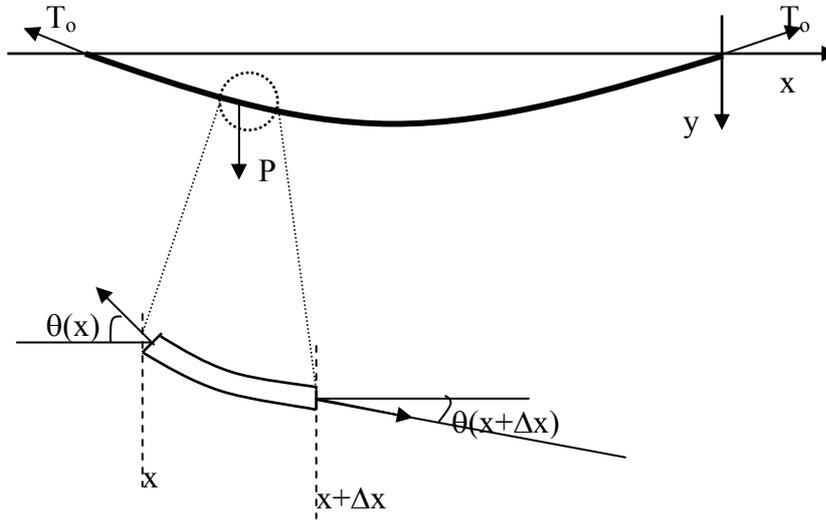


Fig. 3.1.6 equilibrio de la cuerda

Usamos como coordenada para describir cada grado de libertad (cada punto del hilo) la coordenada  $x$  del mismo. Es decir, la variable  $x$  es el rótulo que le ponemos a cada punto de la cuerda y su valor es la coordenada en equilibrio de dicho punto. Escribimos las ecuaciones que expresan el equilibrio para cada tramo  $\Delta x$  (aceleración nula) en ambas direcciones:

$$F_x = T(x + \Delta x) \cos(\theta(x + \Delta x)) - T(x) \cos(\theta(x)) = 0 \quad 3.1.1$$

$$F_y = T(x + \Delta x) \sin(\theta(x + \Delta x)) - T(x) \sin(\theta(x)) + \rho g \Delta x = 0 \quad 3.1.2$$

donde  $\rho$  es la densidad lineal del hilo. De la primera ecuación, si desarrollamos a primer orden en el ángulo queda:

$$T(x + \Delta x) - T(x) = 0 \Rightarrow T = \text{const.} = T_0 \quad 3.1.3$$

Hemos agregado una restricción al modelo y es la **hipótesis fuerte 6: los ángulos son pequeños**.

Utilizando este resultado en la ecuación 3.1.2, y desarrollando:

$$\sin(\theta(x + \Delta x)) \cong \sin(\theta(x)) + \cos(\theta(x)) \frac{d\theta(x)}{dx} \Delta x \quad 3.1.4$$

se obtiene para ángulos pequeños:

$$\cos(\theta(x)) \frac{d\theta(x)}{dx} \cong \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{\rho g}{T_0} \quad 3.1.5$$

que integrada da:

$$\theta(x) = -\frac{\rho g}{T_o} x \quad 3.1.6$$

donde se tomó  $x=0$  en el centro de la soga para determinar la constante de integración. Para determinar la función  $y(x)$  debemos escribir la relación entre las variable  $y$  y la variable  $\theta$ :

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \cong \theta \quad 3.1.7$$

por lo que integrando esta última ecuación a partir de 3.1.6 se obtiene para la posición de equilibrio ( $y_{eq}$ ):

$$y_{eq} = -\frac{\rho g}{2T_o} \left[ x^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] \quad 3.1.8$$

donde la constante de integración se eligió para que la coordenada  $y$  fuera cero en los puntos fijos (nada relevante, queda más simple si es cero en el centro).

Esta solución es válida siempre y cuando no viole la suposición de ángulo pequeño (hipótesis 6). Podemos ver que condición debe cumplirse para esto a partir del máximo ángulo que se obtiene de 3.1.6:

$$\theta(L/2) = -\frac{\rho g L}{2T_o} \ll 1 \quad 3.1.9$$

que nos dice que cuanto más largo es el hilo o mayor su densidad lineal, mayor debe ser la tensión aplicada para mantenerlo esencialmente rectilíneo. Además, si no hay gravedad, siempre se mantiene recto con la mínima tensión ¿será cierto?

### Apartamiento del equilibrio

Buscamos ahora una coordenada que nos indique el apartamiento de la posición de equilibrio del hilo. Como hemos supuesto que el movimiento es sólo transversal y agregamos en la dirección vertical, alcanza con una magnitud escalar:

$$\psi(x) = y - y_{eq} \quad 3.1.10$$

Tenemos pues infinitos grados de libertad dados por la coordenada de cada punto del hilo. Debemos hallar la ecuación dinámica del sistema. Solamente interesa la ecuación en la dirección transversal, según la cual se produce el movimiento, y ahora la suma de las fuerzas no será igual a cero (equilibrio) sino igual a la masa por la aceleración. Sigue valiendo 3.1.1 y por lo tanto 3.1.3 ya que asumimos que no hay desplazamiento longitudinal. Cambiamos entonces 3.1.2 por:

$$F_y = T_o \text{sen}(\theta(x + \Delta x, t)) - T_o \text{sen}(\theta(x, t)) + \rho g \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad 3.1.11$$

donde hemos tomado derivadas parciales pues ahora en la situación dinámica la coordenada  $y$  es función de  $x$  y del tiempo. Desarrollando nuevamente para ángulos pequeños y poniendo:

$$\theta = \theta_{eq} + \Delta \theta \quad 3.1.12$$

queda:

$$\Delta x T_o \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x} + \Delta x T_o \frac{d\theta_{eq}}{dx} + \rho g \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad 3.1.13$$

Nótese que las coordenadas de equilibrio no dependen del tiempo, por lo que las derivadas son totales. De 3.1.5 los dos últimos sumandos del primer término se cancelan y como  $y_{eq}$  no depende del tiempo, de 3.1.10 el segundo término corresponde a la derivada segunda de la coordenada  $\psi$ . Usando que :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy_{eq}}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \tan(\theta) \cong \theta = \theta_{eq} + \Delta\theta \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta\theta \quad 3.1.14$$

queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}} \quad 3.1.15$$

con

$$c^2 = \frac{T_o}{\rho} > 0 \quad 3.1.16$$

hemos llegado finalmente a una ecuación diferencial que describe el movimiento. Damos por terminado el planteo del caso y pasamos a estudiar las soluciones.

### 3.2 Ecuación de ondas clásica

La ecuación antes obtenida, que repetimos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}} \quad 3.2.1$$

se denomina **ecuación de ondas clásica**. Y a la variable que mide el apartamiento del equilibrio, que es función de la coordenada espacial y del tiempo ( $\psi$ ) se la denomina **función de onda**. La función de onda indica el apartamiento del equilibrio de la magnitud física en estudio. Hasta ahora hemos visto apartamiento de coordenadas, pero veremos casos en que la variable es una densidad, presión o campo eléctrico por ejemplo. Aún en el caso de la cuerda, la función de onda podría haber sido la velocidad o la fuerza, que son proporcionales a derivadas de  $\psi$  y por lo tanto también satisfacen la ecuación de onda (ver problema 3). Buscamos ahora los modos normales, o sea las soluciones del sistema tal que todos los puntos oscilan a la misma frecuencia y en fase:

$$\psi(x,t) = f(x)e^{i\omega t} \quad 3.2.2$$

que ya es una gran simplificación a la ecuación diferencial en derivadas parciales, pues buscamos soluciones con variables separadas (producto de una función de  $x$  por una de  $t$ ). Reemplazando 3.2.2 en 3.2.1.:

$$-\omega^2 f(x) = c^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad 3.2.3$$

que es la misma ecuación que teníamos para el oscilador armónico, pero ahora con la variable  $x$  en vez de  $t$ . La solución ya la conocemos y es:

$$f(x) = e^{ikx} \quad 3.2.4$$

o en su otra forma:

$$f(x) = \cos(kx + \phi) \quad 3.2.5$$

Cualquiera sea la forma que adoptemos, al reemplazar en 3.2.3 se obtiene la condición:

$$\boxed{c^2 k^2 = \omega^2} \quad 3.2.6$$

Que se la conoce como relación de dispersión (la relación entre  $\omega$  y  $k$ ), y es consecuencia directa de la ecuación de ondas. Más adelante veremos otras ecuaciones de onda, y se verá como al cambiar los términos de la ecuación diferencial, cambia la relación de dispersión.

Observemos que la función espacial es ahora periódica, la “frecuencia angular” ahora es  $k$  y tiene unidades de inversa de distancia. El período espacial se denomina longitud de onda y se la designa normalmente por  $\lambda$ .

Expresando el coseno de la suma en término del seno y el coseno, y tomando la parte real de la solución temporal, de 3.2.2 y 3.2.5 queda como solución:

$$\psi(x, t) = C \cos(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) = [A \cos(kx) + B \operatorname{sen}(kx)] \cos(\omega t + \phi_t) \quad 3.2.7$$

con

$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad 3.2.8$$

Tenemos la forma funcional de los modos normales. A estas soluciones además de modos normales se las denomina ondas estacionarias por motivos que veremos cuando estudiemos ondas de propagación. El valor de  $\omega$  está dado por el valor de  $k$ , hay infinitas soluciones (está bien por los infinitos grados de libertad). ¿Quién determina el valor de  $k$  y las otras constantes?

### 3.3 Condiciones de borde

El análisis experimental indicaba que los modos normales de la cuerda fija en los extremos eran a valores determinados de la frecuencia, mientras que 3.2.8 admite en principio cualquier valor de la frecuencia con tal que tomemos el correspondiente valor de  $k$ . Veamos entonces que condición adicional impone que esté fijo en ambos extremos.

#### Extremos fijos

La condición se expresa matemáticamente como:

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad 3.3.1$$

que en 3.2.7 da

$$\begin{aligned} \psi(0, t) = A \cos(\omega t + \phi_t) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ \psi(L, t) = [A \cos(kL) + B \operatorname{sen}(kL)] \cos(\omega t + \phi_t) = B \operatorname{sen}(kL) \cos(\omega t + \phi_t) = 0 & \quad 3.3.2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(kL) = 0 \quad 3.3.3$$

que se satisface siempre que el producto  $kL$  sea un múltiplo entero de  $\pi$ . Los valores de  $k$  que satisfacen esta condición son:

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \quad \text{con } m \text{ entero} \quad 3.3.4$$

y de la relación de dispersión:

$$\omega_m = ck_m = \frac{m\pi c}{L} = m\omega_1 \quad 3.3.5$$

que nos da lo esperado, un conjunto discreto de modos normales cuyas frecuencias son múltiplos de una frecuencia llamada fundamental (que es la del modo más bajo).

La solución general toma la forma:

$$\psi(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(k_m x) \cos(\omega_m t + \phi_m) \quad 3.3.6$$

Cada modo aporta dos constantes  $A_m$  y  $\phi_m$  que dependen de las condiciones iniciales. Nótese que para  $\omega=0$  se obtiene  $\psi=0$ , o sea que la traslación pura no es un modo posible, lo que es esperable por estar fijo en los extremos.

Cabe observar que la sumatoria se extiende hasta infinito, ya que a priori matemáticamente todas son soluciones posibles. Si la frecuencia es muy alta ¿cuáles de las hipótesis se empezarán a caer?

### Extremos libres

Hay una condición más difícil de imaginar con una cuerda, pero más fácilmente realizable con otros ejemplos de ondas que veremos en las secciones subsiguientes. La idealizamos pensando que los extremos son sujetados con argollas que se pueden mover libremente en la dirección  $y$ . Esto requiere estar en una condición libre de gravedad, pero esto es un impedimento menor ya que es un “experimento pensado”. Los “experimentos pensados” son útiles para explorar los modelos más allá de nuestras posibilidades experimentales y explotar su riqueza. Tienen la ventaja adicional del bajo costo de implementación. Lo idealizamos en el dibujo de la figura 3.3.1.

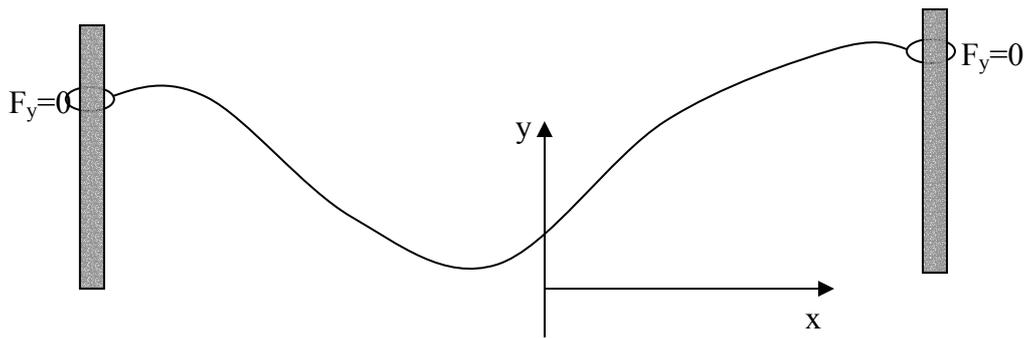


Fig. 3.3.1. Extremos libres. La cuerda es horizontal o bien  $g=0$ . Es un caso de equilibrio indiferente.

La fuerza que realiza la cuerda sobre la argolla es la tensión, y tiene la dirección de la tangente a la cuerda. Por lo tanto la componente vertical es (en la aproximación de ángulo pequeño):

$$F_y = \pm T_o \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0,L} \quad 3.3.7$$

donde el signo más es para  $x=0$  y el menos es para  $x=L$ . Hemos aproximado el seno del ángulo por la tangente, que es la derivada parcial de la función de onda  $\psi$  respecto de la coordenada  $x$ . La condición de borde libre equivale a pedir la derivada espacial nula que en 3.3.7 da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} &= kB \cos(\omega t + \phi_i) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} &= [kB \cos(kL) - kA \text{sen}(kL)] \cos(\omega t + \phi_i) = -kA \text{sen}(kL) = 0 \end{aligned} \quad 3.3.8$$

$$\Rightarrow \text{sen}(kL) = 0 \quad 3.3.9$$

O sea la misma condición que con extremos fijos, pero distinta solución. Ahora sobrevive el término en cosenos (de modo que la derivada espacial sea siempre nula en los extremos). La solución general ahora es:

$$\psi(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(k_m x) \cos(\omega_m t + \phi_m) \quad 3.3.10$$

La única diferencia es que ahora  $\omega=0$  también es una solución posible no trivial, ya que queda una constante no nula, y corresponde al modo que se propaga libremente (que no existe si algún extremo está fijo).

Condiciones mixtas:

¿Qué pasará si un extremo está fijo y otro libre? Por comodidad fijemos el del origen (lo que fuerza a soluciones espaciales sinusoidales como veremos):

$$\psi(0,t) = A \cos(\omega t + \phi_i) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad 3.3.11$$

$$\frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} = [kB \cos(kL) - kA \sin(kL)] \cos(\omega t + \phi_i) = kB \cos(kL) = 0 \quad 3.3.12$$

Ahora para que el coseno se anule es necesario que el argumento sea  $\pi/2$  más un múltiplo de  $\pi$ .

$$k_m = \frac{m\pi + \pi/2}{L} \quad 3.3.13$$

y la solución general es nuevamente 3.3.6 pero para estos nuevos valores de  $k$  y los  $\omega$  correspondientes (a partir de la relación de dispersión).

**3.4 Condiciones iniciales**

Hemos encontrado ya la expresión general para la función de onda dadas las condiciones de borde particulares. Falta aún encontrar los coeficientes de la expansión en modos normales (ecuaciones 3.3.6 o 3.3.10) que dependerán de las condiciones iniciales en que liberemos al sistema. Por ser la ecuación de onda una ecuación diferencial de segundo orden debemos dar no solo el valor de la función, sino también de su derivada temporal en el instante inicial. Esto equivale a dar la posición y la velocidad inicial de cada punto. Vemos que las matemáticas y la física son consistentes. Nótese que desde el punto de vista matemático al plantear la condición de borde estamos dando por ejemplo la posición en dos puntos para todo tiempo, que es equivalente en el tiempo a dar en dos tiempos la posición de todos los puntos (en lugar de posición y velocidad iniciales, posición en dos instantes). La simetría matemática es completa y si observamos la ecuación no hay diferencia matemática entre la posición y el tiempo. La física nos dice que es conveniente plantear de manera distinta las condiciones de borde en el tiempo y en el espacio. Las condiciones iniciales quedan:

$$\begin{aligned} \psi(x, t=0) &= f(x) \\ \frac{\partial \psi(x, t=0)}{\partial t} &= g(x) \end{aligned} \quad 3.4.2$$

Volviendo a la simetría matemática entre  $t$  y  $x$ , una condición similar en el tiempo sería dar en un punto el valor de la función y su derivada espacial para todo tiempo con funciones arbitrarias y no simplemente puntos fijos. Veremos algún ejemplo similar más adelante.

Según sea el caso en estudio tomamos la ecuación 3.3.6 o 3.3.10, calculamos su derivada temporal y evaluamos la función y su derivada en  $t=0$  para reemplazar en 3.4.2. Queda para 3.3.6:

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(k_m x) \cos(\phi_m) = f(x) \quad 3.4.2$$

$$\frac{\partial \psi(x, t = 0)}{\partial t} = -\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m A_m \text{sen}(k_m x) \text{sen}(\phi_m) = g(x) \quad 3.4.3$$

y para 3.3.10:

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(k_m x) \cos(\phi_m) = f(x) \quad 3.4.4$$

$$\frac{\partial \psi(x, t = 0)}{\partial t} = -\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m B_m \cos(k_m x) \text{sen}(\phi_m) = g(x) \quad 3.4.5$$

Nota al margen: Desde el punto de vista matemático, el problema planteado no es diferente del que encontramos al querer resolver un sistema discreto finito (N osciladores acoplados). Encontrábamos la base de los modos normales, que eran nuevos vectores que se escribían en función de las viejas coordenadas, y una vez que tenemos esta nueva base podemos hallar las componentes de cualquier vector inicial en esta base simplemente haciendo el producto escalar del vector inicial por cada elemento de la base (si está normalizada). No lo hicimos de una manera tan formal, y ahora tampoco. Es que ahora los vectores son funciones y el producto escalar es una integral del producto de las funciones. Haremos una deducción ad hoc sin pretender generalizar el formalismo.

Un truco de la manga: Tomemos como ejemplo el primer caso (ecuación 3.4.2) y multipliquemos ambos miembros por uno de los modos normales, por ejemplo el  $n$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(k_m x) \cos(\phi_m) \text{sen}(k_n x) = f(x) \text{sen}(k_n x) \quad 3.4.6$$

y ahora integremos sobre todo el largo de la cuerda

$$\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(k_m x) \cos(\phi_m) \text{sen}(k_n x) dx = \int_0^L f(x) \text{sen}(k_n x) dx \quad 3.4.7$$

nos queda a la izquierda una suma de términos del tipo:

$$I_{nm} = \int_0^L \text{sen}(k_m x) \text{sen}(k_n x) dx \quad 3.4.8$$

que para el caso de extremos fijos los valores de  $k_m$  están dados por 3.3.4 y en el caso de extremos mixtos, por 3.3.13. Esta integral se la puede encontrar en tablas o se puede integrar fácilmente si pasamos a notación compleja, hagamos el ejercicio una vez:

$$I_{nm} = \int_0^L \frac{(e^{ik_m x} - e^{-ik_m x})}{2i} \frac{(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x})}{2i} dx = -\frac{1}{4} \int_0^L (e^{ik_{n+m} x} + e^{-ik_{n+m} x}) - (e^{ik_{n-m} x} + e^{-ik_{n-m} x}) dx \quad 3.4.9$$

donde es fácil reconocer que aparece la resta de dos cosenos:

$$I_{nm} = \frac{1}{2} \int_0^L \cos(k_{m-n}x) dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos(k_{m+n}x) dx \quad 3.4.10$$

que es muy fácil de resolver:

$$I_p = \frac{1}{2} \int_0^L \cos(k_p x) dx = \frac{1}{2k_p} \text{sen}(k_p L) \quad \text{si } p \neq 0 \quad 3.4.11$$

y es

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^L dx = \frac{L}{2} \quad \text{si } p=0 \quad 3.4.12$$

Veamos ahora que 3.4.11 es nula para los modos normales hallados. Si utilizamos 3.3.4 (extremos fijos) es

$$k_{n \pm m} = \frac{\pi}{L} (n \pm m) \quad 3.4.13$$

y para 3.3.13

$$k_{n \pm m} = \frac{\pi}{2L} [2n + 1 \pm (2m + 1)] = \frac{\pi}{L} [n + 1 \pm (m + 1)] \quad 3.4.14$$

Para ambos casos 3.4.11 se anula. Reemplazando en 3.4.9 nos da:

$$I_{nm} = \frac{L}{2} \delta_{nm} \quad 3.4.15$$

donde  $\delta_{nm}$  es la delta de Kronecker, que vale cero a menos que  $n=m$ , en cuyo caso vale uno.

La expresión 3.4.15 nos indica que hemos encontrado para este caso como definir el producto escalar entre dos modos normales de modo que sea nulo para modos distintos, y es a partir de la integral del producto de las funciones. Esto es lo que nos permite encontrar los coeficientes del desarrollo a partir de las condiciones de borde.

Reemplazando en 3.4.7 de la sumatoria solamente sobrevive un término, que es cuando  $m=n$  y queda (pasando  $L/2$  a la derecha por comodidad):

$$A_n \cos(\phi_n) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}(k_n x) dx \quad 3.4.16$$

El término de la derecha se obtiene para cada valor de  $n$  realizando la integral indicada ya que  $f(x)$  se supone conocida. Obsérvese la similitud con el caso del oscilador armónico, encontramos a partir de la posición inicial el valor del coeficiente multiplicado por el coseno de la fase inicial. De la condición de la velocidad debería salir el producto del mismo coeficiente por el seno de la fase. En efecto repitiendo el procedimiento se obtiene:

$$-\omega_n A_n \text{sen}(\phi_n) = -\frac{2}{L} \int_0^L g(x) \text{sen}(k_n x) dx \quad 3.4.17$$

Queda como ejercicio repetir los mismos cálculos para el caso de extremos libres. Hay una diferencia importante y es el término de frecuencia cero. Este término no oscila y se obtiene de integrar directamente 3.4.4 sin multiplicar por ninguna función (ya que a frecuencia cero el modo es una constante). Como ese término no oscila, no tiene sentido arrastrar su fase. Se obtendrá:

$$B_n \cos(\phi_n) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(k_n x) dx \quad \text{para } n \neq 0 \quad 3.4.18$$

$$-\omega_n B_n \sin(\phi_n) = -\frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos(k_n x) dx \quad 3.4.19$$

$$B_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad 3.4.20$$

O sea que  $B_0$  es el valor medio de la función, y no cambia con el movimiento.

Para quienes hayan visto series de Fourier en cursos de matemáticas notarán una fuerte similitud con esta descomposición. Cabe notar que acá las funciones sinusoidales en que desarrollamos son periódicas con período  $2L$ , o  $4L$  (extremos mixtos) pero están definidas solamente entre  $0$  y  $L$ . Lo que hemos hecho es un desarrollo en modos normales o soluciones estacionarias que circunstancialmente por ser el sistema homogéneo dan funciones sinusoidales. Más adelante discutiremos brevemente el caso no homogéneo.

### **3.5 Ondas con pérdidas**

Las soluciones halladas tienen la particularidad de que una vez puesta en movimiento, la cuerda no se detiene nunca. Hemos ignorado la disipación. Al igual que en el caso del péndulo, es necesario un modelo adecuado de los mecanismos de disipación para saber como introducirlo en la ecuación. Sin embargo vimos que se obtiene una descripción exitosa proponiendo una fuerza proporcional a la velocidad, por lo que extendemos esa descripción a la ecuación de onda. Hecho esto la ecuación queda:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad 3.5.1$$

Con el nuevo término de disipación ya no esperamos una oscilación permanente, sino que se atenúe en el tiempo. Esto es un valor complejo para la frecuencia, o sea una oscilación con amplitud que decae exponencialmente en el tiempo.

Hagamos una analogía con los sistemas discretos. En éstos dada una condición inicial, se la descomponía en modos normales, y cada modo normal oscilaba decayendo exponencialmente en el tiempo con una constante de decaimiento que dependía del modo. La relación entre las coordenadas en un modo no cambiaba por la presencia de la disipación. En el caso continuo esto último equivale a decir que la forma espacial del modo no cambia, o sea que por ejemplo para extremos fijos sigue siendo una función

sinusoidal con los valores de  $k$  dados por la ecuación 3.3.4. veamos como encontrar estas soluciones.

Proponemos nuevamente separación de variables, función de onda es el producto de una función espacial y una temporal:

$$\psi(x,t) = f(x)g(t) \quad 3.5.2$$

y para la función espacial proponemos la forma:

$$f(x) = C \cos(kx + \phi) \quad 3.5.3$$

y para la temporal

$$g(t) = e^{at} \quad 3.5.4$$

Si reemplazamos 3.5.3 y 3.5.4 en 3.5.2 y 3.5.1 se obtiene

$$a^2 = -k^2 c^2 - \gamma a \quad 3.5.5$$

que es nuestro polinomio característico tal como se obtenía para el oscilador armónico, pero ahora  $k$  no es una constante dada a priori sino aún por determinar por las condiciones de borde.

Como uno espera un sistema que oscile, podríamos haber propuesto una expresión alternativa para 3.5.4 como:

$$g(t) = e^{i\omega t} \quad 3.5.6$$

que hubiera dado en vez de 3.5.5:

$$\omega^2 - i\gamma\omega = c^2 k^2 \quad 3.5.7$$

Como dijimos antes a esta relación entre  $\omega$  y  $k$  se la denomina relación de dispersión, y contiene toda la información sobre la ecuación de onda **si ésta es lineal**. Más aun, a partir de ella es posible reconstruir la ecuación de onda. En efecto vemos un término proporcional a la frecuencia al cuadrado, que proviene de la derivada segunda temporal, un término proporcional a la frecuencia con coeficiente imaginario, que proviene necesariamente de un término proporcional a la derivada temporal con coeficiente real y un término cuadrático con  $k$  que debe provenir de una derivada segunda espacial.

La solución de 3.5.7 establece:

$$\omega = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{c^2 k^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = i\frac{\gamma}{2} \pm \omega' \quad 3.5.8$$

y el sistema oscilará si las pérdidas son pequeñas, que equivale a pedir que

$$\frac{\gamma}{2} < ck \quad 3.5.9$$

y la solución queda finalmente

$$\psi(x,t) = C \cos(kx + \phi) e^{-\gamma t/2} e^{i\omega' t} + c.c. \quad 3.5.10$$

Notemos que al igual que en el oscilador armónico con pérdidas, la frecuencia quedó ligeramente corrida respecto del caso sin disipación pero fundamentalmente aparece un término de decaimiento exponencial en el tiempo.

### 3.6 ¿Donde está la energía?

Al igual que en el oscilador armónico unidimensional esperamos que cada modo, dado por el valor de  $k$ , presente al oscilar una alternancia entre dos formas de energía.

Para la energía cinética de un tramo de longitud  $\Delta x$  con velocidad  $v$  tenemos:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \Delta x \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad 3.6.1$$

La longitud del tramo  $\Delta x$  debe ser mucho menor que la longitud de onda para poder considerarlo recto.

La energía elástica surge del hecho que cada tramo de cuerda es estirada para adaptarse a la nueva forma curva más larga que la forma de reposo. Para determinar la energía potencial elástica calcularemos el trabajo realizado sobre cada tramo de longitud en reposo  $\Delta x$  por la tensión  $T$  a la que es sometido durante el estiramiento.



Fig. 3.6.1 estiramiento de un tramo de cuerda. El trabajo es  $T(\Delta l - \Delta x)$

Esto se ilustra en la figura 3.6.1 de donde el trabajo realizado respecto del reposo es:

$$W = T(\Delta l - \Delta x) \quad 3.6.2$$

Utilizaremos la aproximación de ángulo pequeño para expresar  $\Delta l$  en término de  $\Delta x$  y la función de onda  $\psi$ :

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta \psi^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta \psi}{\Delta x} \right)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2} \cong \Delta x \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right) \quad 3.6.3$$

Con lo que 3.6.2 queda:

$$W = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \Delta x \quad 3.6.4$$

tanto la energía cinética de un tramo de sogas como el trabajo realizado para estirla (su energía potencial elástica) son proporcionales al largo del segmento elegido y dependen del punto de la sogas elegido ya que la función de onda  $\psi$  y sus derivadas son funciones del punto. Definimos pues la densidad lineal de energía  $U$  como:

$$U = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\partial E}{\partial x} \quad 3.6.5$$

quedando para las densidades de energía cinética y potencial las expresiones:

$$U_c = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad 3.6.6$$

$$U_p = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad 3.6.7$$

Veamos como es la distribución espacial y temporal de energía en la soga vibrando en un modo normal (onda estacionaria). La función de onda es:

$$\psi(x,t) = \psi_M \cos(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) \quad 3.6.8$$

y sus derivadas:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -\omega \psi_M \cos(kx + \phi_x) \sin(\omega t + \phi_t) \quad 3.6.9$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = -k \psi_M \sin(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) \quad 3.6.10$$

Quedando las densidades de energía (3.6.6 y 3.6.7):

$$U_c(x,t) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \psi_M^2 \cos^2(kx + \phi_x) \sin^2(\omega t + \phi_t) \quad 3.6.11$$

$$U_p(x,t) = \frac{1}{2} T k^2 \psi_M^2 \sin^2(kx + \phi_x) \cos^2(\omega t + \phi_t) \quad 3.6.12$$

y a partir de la relación de dispersión:

$$\omega^2 = c^2 k^2 = \frac{T}{\rho} k^2 \quad 3.6.13$$

resulta:

$$U_c)_{max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \psi_M^2 = \frac{1}{2} T k^2 \psi_M^2 = U_p)_{max} \quad 3.6.14$$

vemos pues que para este caso sin disipación la energía potencial y la cinética toman el mismo valor máximo, pero de 3.6.11 y 12 llegan a esos máximos en distintos instantes y lugares. La energía cinética toma su valor máximo en los vientres de la onda estacionaria en el momento en que la onda pasa por la posición de reposo (que es cuando es máxima la velocidad). La energía potencial toma los máximos en los nodos, en el momento en que la onda está en su máximo apartamiento del equilibrio. Es cuando en los nodos se produce la máxima elongación. Estas situaciones son ilustradas en la figura 3.6.2, en la que se grafica la función de onda y las densidades de energía para distintos instantes de la oscilación.

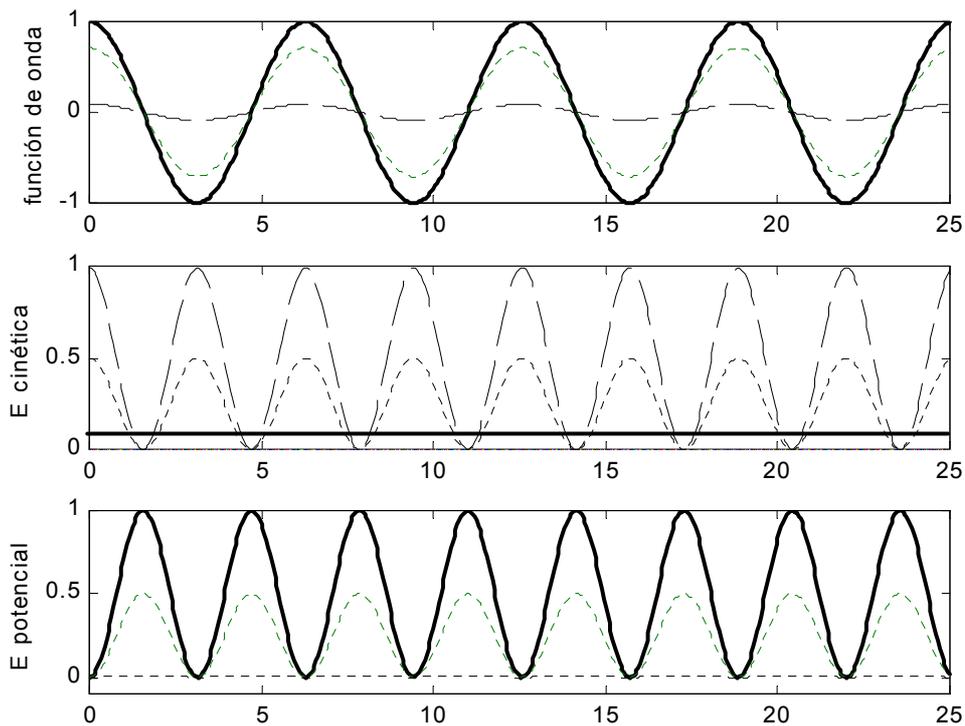


Fig. 3.6.2 función de onda y distribución espacial de la energía en tres instantes de la oscilación.

### 3.7 Caso de estudio: volviendo al péndulo

Cuando analizamos las aproximaciones que nos condujeron a la ecuación del péndulo en el caso 1 del primer capítulo, entre las consideraciones efectuadas despreciamos la masa del hilo. Ahora estamos en condiciones de analizar el movimiento resultante sin necesidad de utilizar dicha aproximación. Consideremos pues el caso de una masa  $M$  pendiendo de un hilo de densidad lineal  $\rho$ . Mantendremos por ahora la aproximación de que la masa  $M$  es mucho mayor que la del hilo. Por lo tanto tenemos que en equilibrio la tensión del hilo es  $Mg$ . Si incluimos la masa del hilo la tensión dependerá del punto del hilo en cuestión, ya que el extremo superior soporta a la masa  $M$  y todo el hilo, mientras que el extremo inferior solamente soporta a la masa  $M$ .

Al apartarse del equilibrio se le imprime un movimiento transversal al hilo, que evolucionará siguiendo la ecuación de ondas clásica descrita para la cuerda en las secciones anteriores. Para el caso de la cuerda sin disipación la función de onda será:

$$\psi(z, t) = A \sin(kz) \cos(\omega t + \phi) \quad 3.7.1$$

donde tomamos  $z=0$  en el punto fijo (gancho), y la coordenada  $\psi$  representa el apartamiento del equilibrio en la dirección  $x$ . Lo que cambia para esta cuerda es la condición de borde en el extremo inferior, que ya no es fijo ni libre, sino que está sujeto a que la masa  $M$  es forzada a moverse solidaria a la cuerda. Esta condición se escribe como (ver figura 3.7.1):

$$M \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_{z=L} = F_x = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad 3.7.2$$

A partir de estas dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$MgkA \cos(kL) = \omega^2 M A \sin(kL) \quad 3.7.3$$

que usando la relación de dispersión se satisface cuando:

$$\tan(kL) = \frac{g}{c^2 k} = \frac{\rho L}{MkL} \quad 3.7.4$$

donde se utilizó la tensión en equilibrio  $T=Mg$ .

En la figura 3.7.2 se grafican el término de la izquierda y el de la derecha, siendo las soluciones los valores de  $k$  para los que ambas curvas se cruzan. Vemos que nuevamente encontramos infinitas soluciones para  $k$ , pero distintas a las del hilo con extremos fijos.

El último término es proporcional a la relación entre la masa del hilo y  $M$ , de modo que cuando este cociente es muy pequeño podemos hallar aproximadamente las soluciones pues:

$$kL \tan(kL) = \frac{\rho L}{M} \ll 1 \quad 3.7.5$$

y el menor valor de  $k$  satisface que la tangente se puede aproximar por su argumento:

$$k_1 L \tan(k_1 L) \cong (k_1 L)^2 = \frac{\rho L}{M} \ll 1 \quad 3.7.6$$

como  $k_1 L \ll 1$ , vale entonces que  $k_1 z \ll 1$  para todo el hilo, o sea que en la solución 3.7.1 puede aproximarse el seno por su argumento, quedando:

$$\psi(z, t) \cong A k_1 z \cos(\omega t + \phi) \quad 3.7.7$$

que indica que el hilo se mantiene aproximadamente recto como asumimos para el péndulo con hilo sin masa.

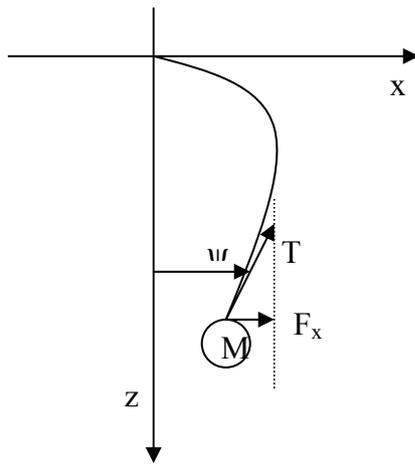


Figura 3.7.1 esquema para ilustrar como se relaciona la fuerza sobre la masa  $M$  que pende de un hilo con la forma que asume el hilo en ese instante.

Las otras soluciones en esta misma aproximación se obtienen cuando la tangente de  $kL$  es muy pequeña. En efecto nótese en 3.7.5 que a medida que  $k$  aumenta la tangente se hace menor. Los valores de  $k$  son aproximadamente aquellos que anulan la tangente (ver figura 3.7.2):

$$k_m L \cong (m-1)\pi \quad 3.7.8$$

que es la solución para extremo fijo. O sea que la inercia de la masa es tan grande que la soga vibrará sin moverla, salvo la primera solución, que oscila como un péndulo.

A medida que la masa del hilo aumenta, la solución se aparta de la hallada, como se ilustra en la figura 3.7.2, y si la masa del hilo se hace mucho mayor que  $M$  tiende a la solución con un extremo libre. Aquí hay que hacer la salvedad que en este caso no vale la ecuación de ondas que escribimos ya que la tensión del hilo varía con la posición. Lo que se obtiene rigurosamente es una ecuación de ondas en que los parámetros ahora dependen de la posición, por lo que 3.7.1 ya no es una solución.

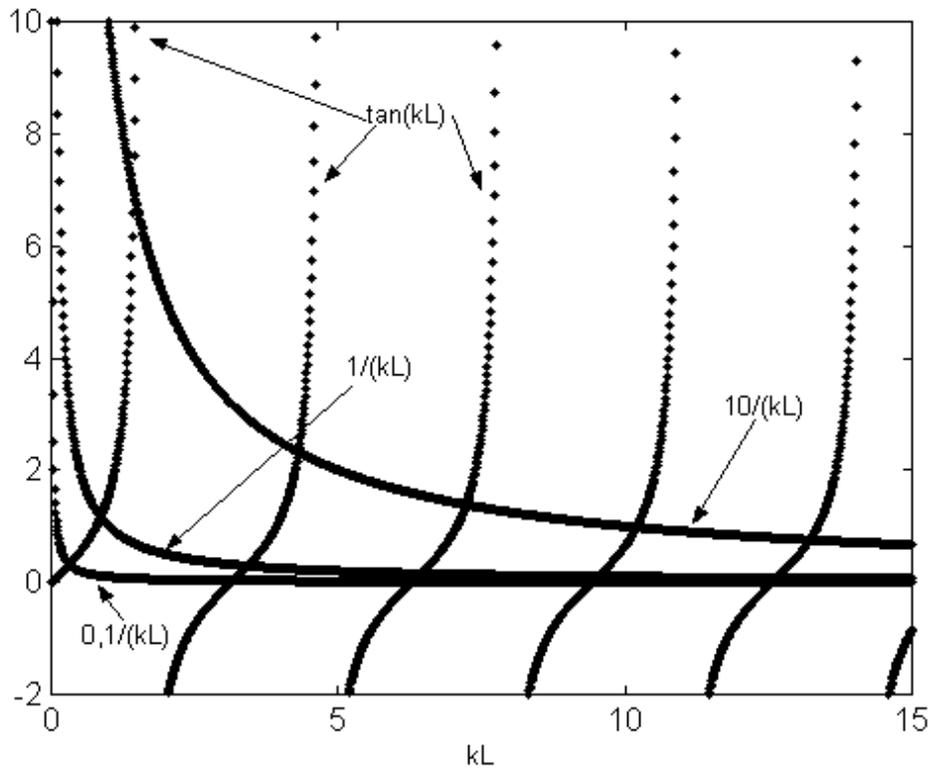


Figura 3.7.2 Gráfico para determinar los valores de  $k$  para los modos del péndulo cuando se considera la masa del hilo. La intersección entre las curvas dan las soluciones de la ecuación 3.7.4. Nótese que para numeradores pequeños (masa del hilo pequeña) los modos superiores son prácticamente cuando la tangente se anula.

**Guía 3**

1) Una cuerda de longitud  $L$  fija en sus extremos es lanzada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia. Parte del reposo.

a- Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo. b- ¿Con qué período se repite el movimiento?

c- Grafíquelo para cuatro instantes equiespaciados dentro de un período.

2) Una cuerda de longitud  $L$  fija en un extremo y libre en el otro es lanzada a oscilar en sus modos 5 y 7 con igual amplitud, pero partiendo del reposo el modo 5 y de su máxima velocidad el modo 7. Repita los puntos del problema 1.

3) Mostrar que si  $\psi$  es solución de la ecuación de onda clásica, las funciones  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  definidas abajo también lo son.

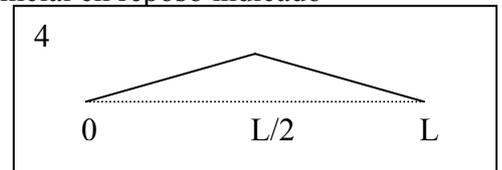
$$\phi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \phi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \phi_3 = \int \psi dt$$

4) Se suelta una cuerda fija en sus extremos desde el estado inicial en reposo indicado en la figura.

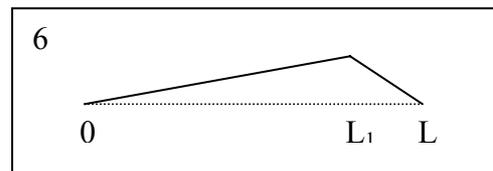
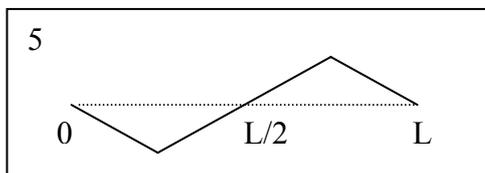
a- calcule la evolución en el tiempo.

b- ¿cuál es el modo excitado de mayor amplitud?

c- ¿qué modos no son excitados?



5) ¿Cómo cambia el problema anterior si el estado inicial es antisimétrico, como indica la figura?



6) ¿Para qué valor de  $L_1$  se maximiza la excitación del segundo modo?

¿Qué cambia musicalmente al cambiar  $L_1$ ?

7) Se aplica una fuerza impulsiva sobre un 10% del largo de una cuerda fija en sus extremos. El impulso es suficientemente rápido como para asumir que la cuerda no se movió apreciablemente durante su aplicación.

a- ¿donde debe aplicarse el golpe para tener máxima amplitud en el quinto modo?

b- ¿y para tener máxima relación entre el quinto y el tercero?

8) Escriba la ecuación de onda para el caso del péndulo cuando la masa del hilo no es mucho menor que la del cuerpo suspendido. Para ello tenga en cuenta que la tensión varía a lo largo del hilo debido al peso del propio hilo. Muestre que las soluciones sinusoidales obtenidas para la cuerda ya no son solución. Discuta soluciones aproximadas.



**Si uno puede construir infinitas teorías equivalentes con simples cambios de variables y diferentes asignaciones a las variables intuitivas ¿Con qué criterio se prefiere una de ellas?**

## Capítulo 4 OTRAS ECUACIONES DE ONDAS.

Analizaremos en este capítulo varios sistemas que se caracterizan por que sus evoluciones al ser apartados del equilibrio son descritas por ecuaciones similares a la ecuación de ondas clásica dada en el capítulo anterior. Es importante analizar las similitudes y diferencias entre estos sistemas a fin de entender que aspectos de la evolución son comunes y cuales son propios de cada ecuación de ondas particular.

### 4.1. Ondas longitudinales en un resorte:

Analicemos el caso de un resorte homogéneo al que se le introduce una perturbación a su equilibrio caracterizado por un desplazamiento longitudinal de algunas de sus espiras. Esta situación es ilustrada en la figura 4.1.1 en la que se muestra un resorte en equilibrio y el mismo resorte luego de ser perturbado longitudinalmente.

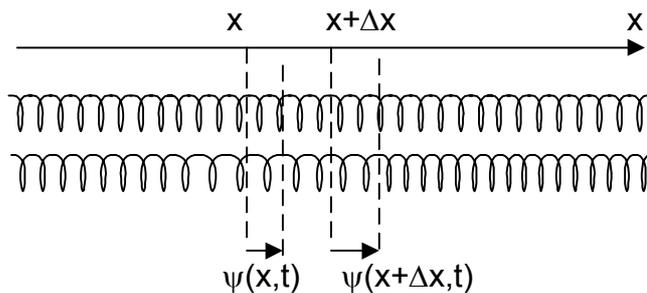


Fig. 4.1.1: La figura superior muestra el resorte en equilibrio y la inferior la deformación debida a una perturbación longitudinal.

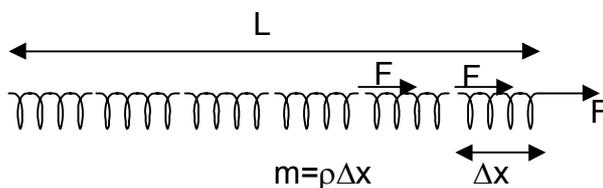


Fig. 4.1.2 El resorte puede ser descrito como una sucesión de  $N$  resortes en serie de longitud  $\Delta x$  y largo total  $L=N\Delta x$ .

La coordenada a lo largo del resorte la designamos como  $x$ , y el apartamiento del equilibrio es caracterizado por la función de onda  $\psi(x)$  que indica cuanto se apartó hacia la derecha el punto que en equilibrio está en la coordenada  $x$ . En este caso es más claro que en el caso de la cuerda que  $x$  es un rótulo que indica de qué punto hablamos y no la coordenada del mismo (la coordenada y el rótulo coinciden en el equilibrio). En primer lugar necesitamos indicar cuales son los parámetros propios del resorte que lo caracterizan. En forma similar a la cuerda uno de ellos será su densidad lineal  $\rho$  y el otro

debe caracterizar su elasticidad. Para esto último podemos pensar al resorte como una sucesión de  $N$  resortes en serie de longitud  $L/N$ . Si estiramos el resorte de longitud  $L$  y constante  $K_L$  en una magnitud  $\Delta L$  cada resorte de longitud  $L/N$  se estirará en  $\Delta L/N$ . La fuerza sobre cada resorte es la misma que la del resorte completo (ver figura 4.1.2), por lo que cada resorte corto se estira  $N$  veces menos ante la misma fuerza, o sea la constante de los resortes cortos es  $N$  veces mayor. La constante de cada tramo de resorte es entonces inversamente proporcional a su longitud. Definimos un parámetro característico intrínseco del resorte  $K_i$  tal que la constante  $K_L$  de un resorte de largo  $L$  es:

$$K_L L = K_i \quad 4.1.1$$

Deseamos ahora escribir la ecuación de movimiento de cada tramo del resorte de longitud  $\Delta x$  que es sometido a la acción de la fuerza de los tramos vecinos. Así el tramo entre  $x$  y  $x + \Delta x$  es tensionado con una fuerza  $F_D$  por el tramo vecino a la derecha que ejerce una fuerza proporcional a su estiramiento:

$$F_D \cong K_{\Delta x} [\psi(x + \Delta x) - \psi(x)] = \frac{K_i}{\Delta x} [\psi(x + \Delta x) - \psi(x)] \quad 4.1.2$$

Esta expresión es aproximada ya que el estiramiento del tramo no es necesariamente uniforme, y la expresión será más precisa cuanto más corto sea el tramo de resorte estudiado. Por ello si tomamos el límite cuando el largo del tramo tiende a cero ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) la expresión queda:

$$F_D = K_i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad 4.1.3$$

Esta expresión es pues la fuerza que realiza el resorte que está a la derecha de  $x$  sobre el de la izquierda, y depende del valor de  $x$  y del momento en que se evalúa. Por ser un par de interacción la fuerza que realiza el resorte que está a la izquierda sobre la derecha es de igual módulo y sentido contrario. Si analizamos ahora el movimiento del tramo entre  $x$  y  $x + \Delta x$ , estará sometido a una fuerza desde la izquierda en  $x$  y desde la derecha en  $x + \Delta x$  por lo que su aceleración será:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F_D(x + \Delta x) - F_D(x) = K_i \left[ \frac{\partial \psi(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right] \quad 4.1.4$$

donde dividiendo por  $\Delta x$  y tomando el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  se obtiene la ecuación de ondas clásica:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{K_i}{\rho} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}} \quad 4.1.5$$

El paso siguiente es estudiar cómo se distribuye la energía en el resorte al estar oscilando alrededor de su equilibrio. La energía cinética de un tramo de longitud  $\Delta x$  es:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \Delta x \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad 4.1.6$$

y la energía potencial será proporcional al estiramiento del tramo al cuadrado:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{K_i}{\Delta x} [\psi(x + \Delta x) - \psi(x)]^2 = \frac{1}{2} \Delta x K_i \left[ \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \right]^2 \quad 4.1.7$$

vemos que el segundo término tiende a la derivada espacial al cuadrado. Ambas energía son proporcionales a la longitud del tramo. Siguiendo la definición de densidad de energía utilizada para la cuerda (capítulo 3) queda:

$$U_c = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad 4.1.8$$

$$U_p = \frac{1}{2} K_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad 4.1.9$$

que es completamente análogo al caso de la cuerda.

**Resorte de torsión:**

Un caso análogo es el de un alambre que al ser torsionado tiende a restituir su equilibrio, como el utilizado para sujetar las barras en el caso 2.1.1. Un tramo es ilustrado en la figura 4.1.3 donde se indica la definición de la función de onda  $\psi(x)$ .

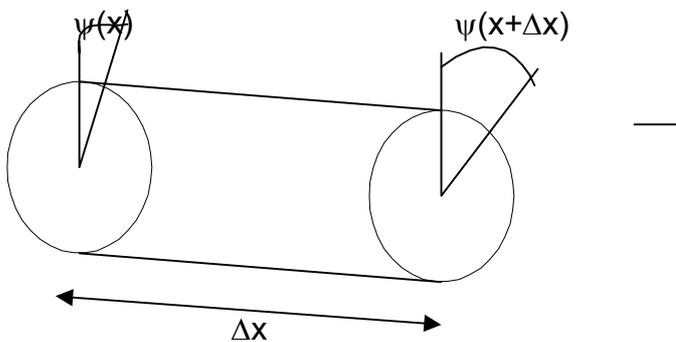


Fig. 4.1.3: barra de torsión. Al ser apartada del equilibrio el tramo tiende a enderezarse estableciendo una cupla restitutiva.

De manera similar al resorte, la constante restitutiva será inversamente proporcional a la longitud del tramo y las propiedades del alambre se indican por su densidad de momento de inercia  $J$  y su constante restitutiva intrínseca  $Q_i$  quedando el momento de la fuerza que ejerce el tramo de la derecha sobre la izquierda como:

$$\tau_D = Q_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 4.1.10$$

y la ecuación de ondas resultante de evaluar los momentos de las fuerzas sobre un tramo de longitud  $\Delta x$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{Q_i}{J} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}} \quad 4.1.11$$

**4.2. Ondas de presión en un fluido. Sonido**

El caso de estudio ahora es un fluido compresible que está confinado en un tubo de área transversal  $A$  como indica la figura 4.2.1. La coordenada a lo largo del tubo es

nuevamente  $x$ , y la función de onda  $\psi(x)$  indica como se aparta la superficie que en reposo está en  $x$  hacia la derecha. La caracterización mecánica del fluido la hacemos ahora a través de su densidad volumétrica  $\rho$  y la presión  $P$ . Al producirse una variación de presión en alguna superficie, se desplazará el fluido variando al mismo tiempo su densidad.

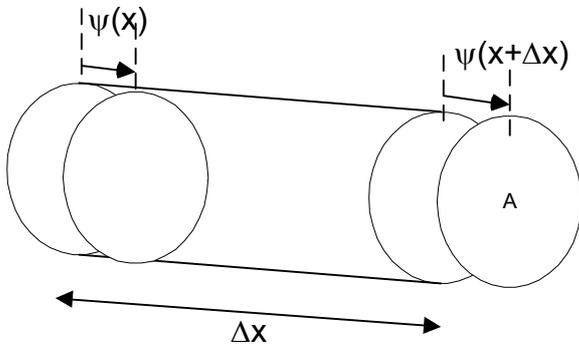


Fig. 4.2.1. Un tubo conteniendo un fluido compresible (por ejemplo aire) es comprimido produciendo el desplazamiento del equilibrio indicado para un tramo de longitud  $\Delta x$ .

Esto es ilustrado en la figura 4.2.1, donde puede observarse que hay una variación del volumen, siendo luego de la perturbación:

$$V = A\Delta x + A[\psi(x + \Delta x) - \psi(x)] \tag{4.2.1}$$

donde el segundo sumando es la variación de volumen, que por conservación de la masa implicará la variación de la densidad. Definimos como  $P_o$  y  $\rho_o$  a la presión y densidad de equilibrio respectivamente. Buscaremos los apartamientos de dicho equilibrio en estas magnitudes como consecuencia de los desplazamientos descritos por la ecuación 4.2.1. definimos las nuevas magnitudes perturbadas (con subíndice  $s$  por sonido) como:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_o + \rho_s \\ P &= P_o + P_s \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Podemos relacionar la perturbación en la densidad con el cambio de volumen, a partir de igualar la masa encerrada en el volumen original con la encerrada en el nuevo volumen dado por 4.2.1:

$$\rho_o A \Delta x = \rho A \Delta x + \rho A \Delta \psi = \rho_o A \Delta x + \rho_s A \Delta x + \rho_o A \Delta \psi + \rho_s A \Delta \psi \tag{4.2.3}$$

El último sumando es de segundo orden en la perturbación (proporcional a la perturbación en la densidad por la perturbación en la posición), al dividirlo por  $\Delta x$  y tomar el límite tenderá a cero, por lo que se desprecia. Queda pues luego de despejar  $\rho_s$ :

$$\rho_s = -\rho_o \frac{\Delta \psi}{\Delta x} \rightarrow -\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.2.4}$$

donde el signo (-) indica que si la derivada es positiva (el tramo se alarga) la densidad disminuye (lo esperado).

Con esto queda relacionada la perturbación en la densidad con la perturbación en la posición. Para hallar la ecuación de evolución utilizamos la ley de Newton, para lo cual expresamos la fuerza en término de la presión:

$$F = A[P(x) - P(x + \Delta x)] \rightarrow -A\Delta x \frac{\partial P_s}{\partial x} \quad 4.2.5$$

donde hemos supuesto que no hay inhomogeneidades en la presión de equilibrio (la derivada espacial de  $P_o$  es cero). Nuevamente un signo (-) que en este caso indica que si la presión crece hacia la derecha (derivada positiva) la fuerza neta resulta hacia la izquierda.

Igualando esta fuerza a la masa del elemento de volumen por su aceleración:

$$\rho_o A \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A \Delta x \frac{\partial P_s}{\partial x} \quad 4.2.6$$

Falta ahora expresar la perturbación en la presión en término de la perturbación en la densidad, que a su vez es función de la perturbación en la posición. De este modo quedará una ecuación en la función de onda  $\psi$ . La presión será función de la densidad, por lo que puede desarrollarse en serie como:

$$P(\rho) = P_o + P_s = P_o + \frac{dP}{d\rho} \rho_s + \dots = P_o + \kappa \rho_s \quad 4.2.7$$

donde el parámetro  $\kappa$  está relacionado con la compresibilidad del fluido. Indica cuanto varía la presión ante un cambio de densidad (su inversa dará cuanto cambia la densidad ante un cambio de presión). De las ecuaciones 4.2.7 y 4.2.4 queda:

$$\frac{\partial P_s}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = -\rho_o \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad 4.2.8$$

que insertada en 4.2.6 da:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}} \quad 4.2.9$$

que es nuevamente la ecuación de ondas clásica. La misma ecuación es satisfecha por las variables  $P_s$  y  $\rho_s$ . Al producto del parámetro  $\kappa$  por la densidad se lo denomina módulo de compresibilidad o módulo volumétrico de elasticidad  $K$ :

$$K = \kappa \rho_o \quad 4.2.10$$

y la inversa de  $K$  se denomina compresibilidad del fluido.

#### Caso del gas ideal:

El módulo de compresibilidad puede ser obtenido empíricamente para los distintos materiales o a partir de ecuaciones que relacionen la presión con la densidad. Un caso importante en que dicha ecuación es conocida es el del gas ideal. Esta ecuación aproxima mejor cuanto menos importante sea la interacción entre las moléculas o sea cuanto menor sea la densidad de partículas en el gas. Para el aire en condiciones normales de presión y temperatura (presión atmosférica normal a 300K) es una buena aproximación. La ecuación de estado para un gas ideal es:

$$P = \frac{n}{V} RT = \rho RT \quad 4.2.11$$

Donde  $n$  es el número de moles,  $R$  una constante conocida como constante de los gases y vale  $R=8,314 \cdot 10^7 \text{ erg}/(\text{mol K})$ , y la densidad quedó expresada en moles por unidad de volumen. Cabe notar que al marco teórico de la dinámica de Newton le estamos agregando ahora el marco de la teoría termodinámica. Si la perturbación de un volumen

pequeño del gas es producido lentamente, de modo de darle tiempo de equilibrar su temperatura con el medio circundante, podemos suponer que la temperatura es constante por lo que:

$$\kappa = \frac{\partial P}{\partial \rho} = RT = \frac{P}{\rho} \quad 4.2.12$$

Quedando el módulo de compresibilidad

$$K = P \quad 4.2.13$$

La otra situación experimental límite que se puede presentar es que la perturbación es tan rápida que el pequeño volumen de gas no llega a intercambiar calor con el medio circundante y la evolución se produce en forma adiabática (sin intercambio de calor). En este caso la ecuación que describe la evolución del gas es:

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad 4.2.14$$

donde el coeficiente  $\gamma$  depende del gas. La compresibilidad se obtiene ahora como:

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{dV} \frac{dV}{d\rho} = \left(-\gamma \frac{P}{V}\right) \left(-\frac{V}{\rho}\right) = \gamma \frac{P}{\rho} \quad 4.2.15$$

y el módulo de compresibilidad queda:

$$K = \gamma P \quad 4.2.16$$

Un caso particular de estas ondas es el sonido audible, cuyo rango de frecuencia está entre 100Hz y 20000Hz. Para estas frecuencias experimentalmente se encuentra que el modelo que mejor ajusta los resultados experimentales es el de suponer una evolución adiabática. Para el aire en condiciones normales es  $\gamma \cong 1,40$ .

### Energía

De manera similar a lo realizado anteriormente podemos calcular la densidad de energía en el fluido debido a la perturbación introducida. Para la energía cinética se obtiene:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho A \Delta x \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad 4.2.17$$

y la densidad volumétrica de energía cinética:

$$U_c = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad 4.2.18$$

Para la energía potencial hacemos la analogía con el resorte, para el resorte la fuerza entre segmentos contiguos es:

$$F = K_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 4.2.19$$

y para el sonido es a partir de 4.2.4, 4.2.7 y 4.2.10

$$F_s = P_s A = KA \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 4.2.20$$

por lo que por analogía con 4.1.9 queda:

$$U_p = \frac{1}{2} K \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad 4.2.21$$

Hasta ahora hemos descrito sistemas continuos a los que se les infringe una perturbación a su equilibrio. Todos ellos tenían la particularidad de ser homogéneos, es decir que la simetría ante traslaciones solo se rompía por las condiciones de borde. Notemos que la ecuación de ondas clásica es invariante a cambios en el origen de coordenadas. Si cambiamos  $x$  por  $x' = x - x_0$  (traslación) las derivadas parciales respecto de  $x$  y de  $x'$  son idénticas, por lo que se obtiene la misma ecuación. Si hay una inhomogeneidad, como una cuerda con densidad variable o tensión variable (péndulo), el parámetro  $c^2$  en la ecuación de ondas deja de ser constante, y pasa a ser función de la coordenada  $x$ . En este caso la función sinusoidal espacial hallada anteriormente deja de ser solución de la nueva ecuación de ondas inhomogénea.

### 4.3. Sistemas discretos periódicos

Analizaremos ahora un caso particular de sistemas discretos en que las partes componentes se ordenan en un arreglo periódico. Este es el caso por ejemplo de los sólidos cristalinos, en que los átomos o moléculas se ordenan en una red que se repite periódicamente en el espacio. La simetría presente en estos sistemas no es tan fuerte como la de sistemas homogéneos, las propiedades no se repiten ante traslaciones continuas. Pero hay cierta reminiscencia en que las propiedades se repiten ante traslaciones finitas múltiplos del período del arreglo. Esta similitud nos permitirá encontrar soluciones a las nuevas ecuaciones de ondas. Veremos algunos ejemplos que nos permitirán inferir el método general.

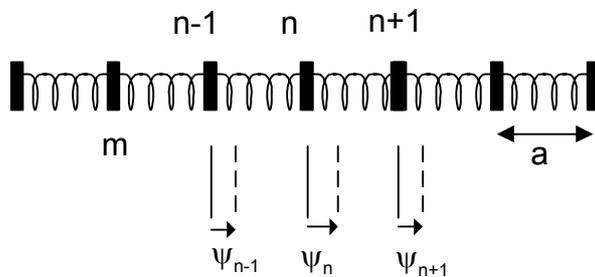


Fig. 4.3.1: Arreglo periódico de masas acopladas por resortes entre primeros vecinos.

En la figura 4.3.1 se muestra un sistema compuesto por masas de magnitud  $m$  arregladas periódicamente y separadas en el equilibrio de sus vecinas próximas por una distancia  $a$ . Se encuentran vinculadas a sus primeros vecinos por resortes de constante restitutiva  $K$ . Estudiaremos las oscilaciones longitudinales del sistema. Tenemos pues  $N$  grados de libertad, donde  $N$  es el número de masas. Definimos las coordenadas  $\psi_n$  como el apartamiento del equilibrio hacia la derecha de la masa número  $n$ . La fuerza sobre la masa  $n$  será la suma de la del resorte de la derecha más la del de la izquierda, y serán proporcionales a los respectivos estiramientos respecto del equilibrio más las fuerzas de equilibrio que se cancelan entre si. Queda entonces para la aceleración de la masa número  $n$ :

$$m \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) = K(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) \quad 4.3.1$$

hemos hecho una SNE que podemos reemplazar por una **hipótesis fuerte 1**: cada tramo de resorte entre masas se estira uniformemente (aproximación cuasi-estática). Ya sabemos que esta aproximación es válida si la frecuencia de oscilación es mucho menor que la del modo más bajo del mismo modo que despreciamos las oscilaciones de la cuerda en el péndulo (ver caso 3.7).

Como siempre buscamos los modos normales de este sistema, es decir las soluciones en que todas las coordenadas oscilan a la misma frecuencia y en fase:

$$\psi_n = A_n e^{i\omega t} \quad 4.3.2$$

que reemplazada en 4.3.1 da:

$$m\omega^2 A_n = -K(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n) \quad 4.3.3$$

La coordenada en reposo de la masa  $n$  es

$$x_n = na \quad 4.3.4$$

Falta ahora buscar la solución para los coeficientes  $A_n$ . Por analogía con el caso continuo podemos buscar funciones espaciales  $f(x)$  tal que:

$$f(x_n) = A_n \quad 4.3.5$$

Obviamente existen infinitas funciones que satisfacen esta condición y toman entre masas cualquier valor. Esto no es importante, solo utilizo este truco para hallar una de dichas funciones que me permita encontrar fácilmente y por analogía la solución general. Buscamos funciones similares a las halladas para el caso continuo, dadas las similitudes en las simetrías de traslación:

$$f(x_n) = Ae^{ikx_n} = Ae^{ikan} \quad 4.3.6$$

Al insertar estas soluciones propuestas en 4.3.3 queda:

$$m\omega^2 Ae^{ikan} = -KA[e^{ika(n+1)} + e^{ika(n-1)} - 2e^{ikan}] = -KAe^{ikan}(e^{ika} + e^{-ika} - 2) \quad 4.3.7$$

Y luego de simplificar:

$$m\omega^2 = 2K[1 - \cos(ka)] \quad 4.3.8$$

o aun mas simple:

$$m\omega^2 = 4K \operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad 4.3.9$$

que es la nueva relación de dispersión para esta ecuación de ondas. La solución general para cada modo la podemos escribir como:

$$\Psi_n(t) = A \cos(kan + \phi) \cos(\omega t + \phi_t) \quad 4.3.10$$

En la figura 4.3.2 ha sido graficada la relación de dispersión 4.3.9. Cabe notar que la solución 4.3.10 se repite cada vez que se incrementa el valor de  $k$  en un múltiplo de  $2\pi/a$ . Por lo tanto estaríamos repitiendo la solución si tomamos valores de  $k$  fuera del intervalo graficado en la figura. Esto se debe a que valores mayores de  $|k|$  hace oscilar a

la función entre una masa y la siguiente, oscilación que es irrelevante en el caso discreto, ya que en dichos puntos el valor de la función no tiene ningún significado físico (recordar que  $x_n$  no es una coordenada sino un rótulo).

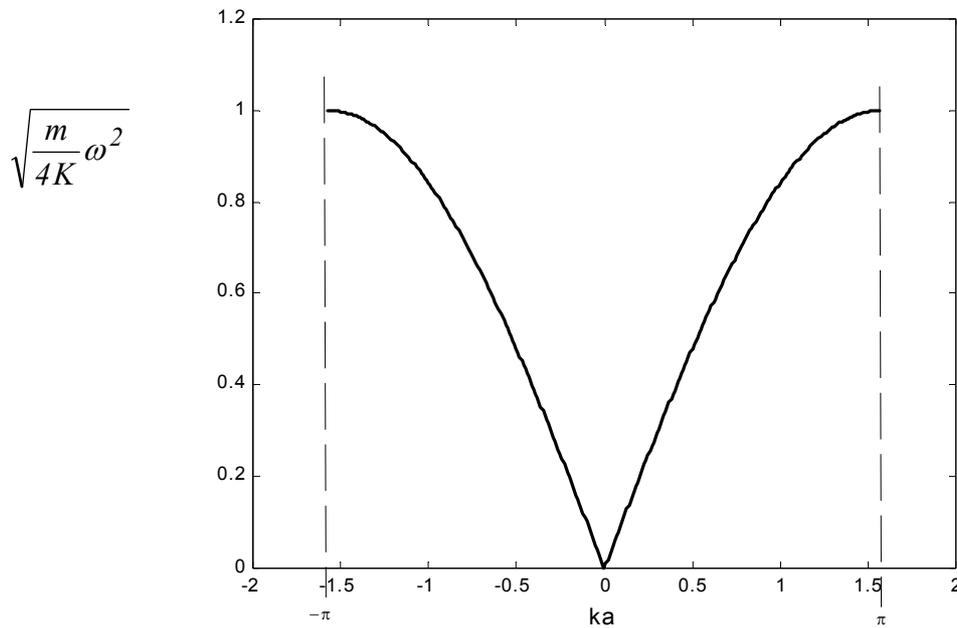


Fig. 4.3.2: relación de dispersión para masas acopladas por resortes (oscilaciones longitudinales).

Nuevamente si se imponen al sistema condiciones de borde y se limita la dimensión del sistema (número de masas), los valores permitidos de  $k$  pasan a ser un conjunto numerable, del mismo modo que ocurrió con la cuerda continua (de hecho son los mismos valores de  $k$  pero restringidos hasta  $k=\pi/a$ ). El modo de frecuencia más baja es el de frecuencia nula (traslación pura) y se obtiene para  $k=0$ . Este modo no es posible si se fijan los bordes, y resulta así al plantear las condiciones de borde pues no aparecerá  $k=0$  como una de las soluciones posibles (o equivalentemente solo es posible para amplitud nula). El modo de frecuencia más alta es para  $k=\pi/a$ , y corresponde a cuando las masas sucesivas oscilan en contrafase, produciendo la máxima deformación de los resortes.

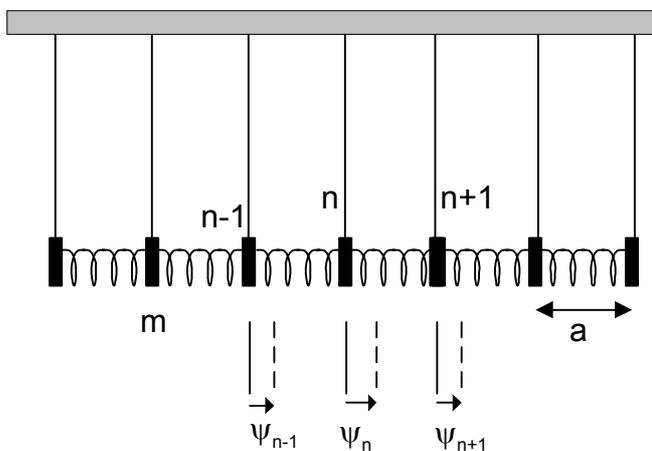


Fig. 4.3.3 Arreglo periódico de péndulos acoplados por resortes entre primeros vecinos.

Otro ejemplo similar es el ilustrado en la figura 4.3.3. Corresponde a un conjunto de péndulos acoplados por resortes y se estudian las oscilaciones longitudinales. Hagamos el ejercicio de predicción a partir de los resultados obtenidos para las masas acopladas y lo que hemos visto para dos péndulos acoplados. Es esperable encontrar una ecuación similar a la 4.3.1 con soluciones similares a la 4.3.10. En el caso de péndulos acoplados vimos que el modo de menor frecuencia es cuando ambos oscilan en la misma dirección. Acá nuevamente es posible que todos oscilen juntos. La longitud de onda para este caso es infinita ( $k=0$ ) y la frecuencia es la del péndulo. Nuevamente la frecuencia más alta debe ser cuando los péndulos sucesivos oscilan en contrafase ya que al oscilar en contrafase la torsión y por ende la aceleración restitutiva es mayor (esto es lo visto en los dos péndulos y en las masas del ejemplo anterior), .

Escribamos la ecuación, que es igual a la 4.3.1 pero agregando la fuerza restitutiva gravitatoria debido a la oscilación del péndulo:

$$m \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = -\frac{mg}{L} \psi_n + K(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) \quad 4.3.11$$

Nuevamente buscamos los modos normales (repetimos 4.3.2):

$$\psi_n = A_n e^{i\omega t} \quad 4.3.12$$

que reemplazada en 4.3.11 da:

$$m\omega^2 A_n = \frac{mg}{L} A_n - K(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n) \quad 4.3.13$$

y dada la periodicidad espacial del sistema proponemos nuevamente:

$$A_n = A e^{ikan} \quad 4.3.14$$

que insertada en 4.3.13 y luego de un poco de trabajo queda la relación de dispersión:

$$m\omega^2 = \frac{mg}{L} + 4K \text{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad 4.3.15$$

Esta relación de dispersión es graficada en la figura 4.3.4. Puede confirmarse la predicción cualitativa previa, el modo de menor frecuencia  $\omega_{\min}$  es aquel en que los péndulos oscilan juntos a la frecuencia de cada péndulo aislado. A medida que aumenta el número de ondas  $k$  los péndulos sucesivos se apartan mutuamente en mayor grado y debido a la fuerza restitutiva de los resortes la frecuencia aumenta hasta un valor  $\omega_{\max}$  cuando los péndulos sucesivos se mueven en oposición.

Que no existan soluciones para  $\omega < \omega_{\min}$  o  $\omega > \omega_{\max}$  en 4.3.15, no significa que el sistema no pueda oscilar a esas frecuencia, solamente que la solución propuesta 4.3.14 no es la correcta. En efecto si proponemos una solución exponencial no oscilante:

$$A_n = A e^{\pm kan} \quad 4.3.16$$

se puede encontrar nuevas soluciones (ver problema 9). Dichas soluciones corresponden a péndulos que oscilan a la misma frecuencia pero con amplitudes que decaen exponencialmente a lo largo del sistema y por este decaimiento exponencial (no atribuible a la absorción o pérdida) se las denomina **ondas evanescentes**.

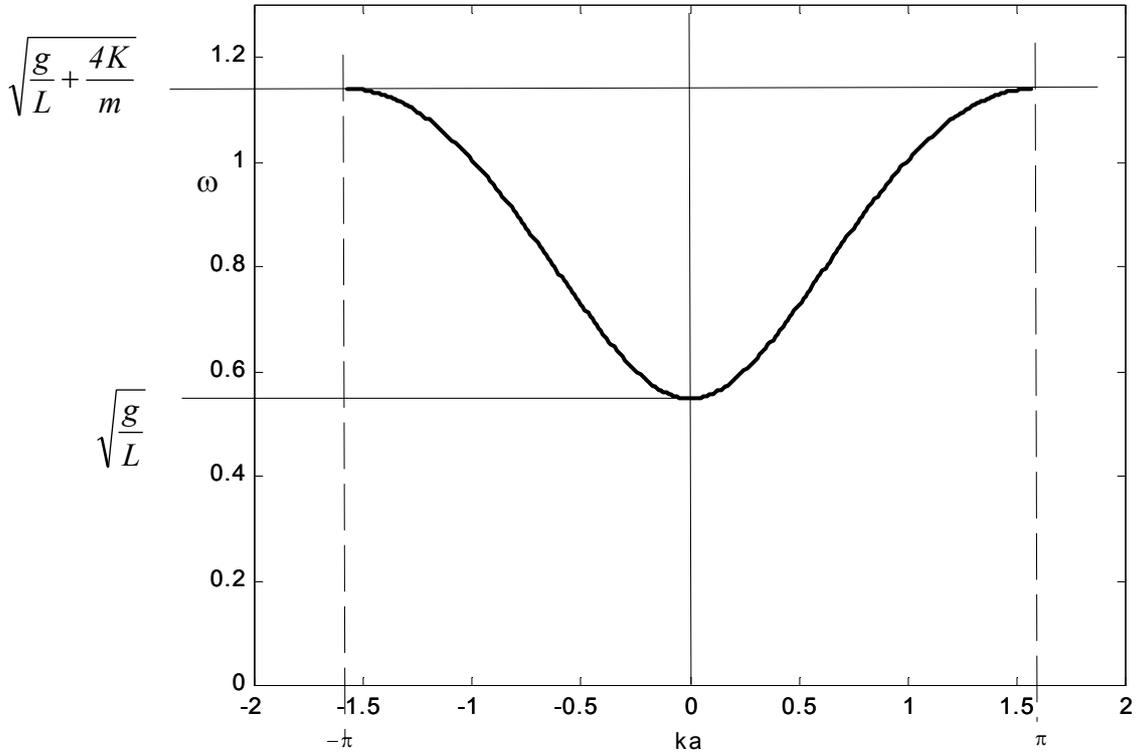


Fig. 4.3.4: relación de dispersión para los péndulos acoplados.

**Límite al continuo:**

Para ambos casos discretos si estudiamos las soluciones en que la longitud de onda es mucho mayor que el período espacial del sistema  $a$ , es decir:

$$ka \ll 1 \tag{4.3.17}$$

las relaciones de dispersión quedan respectivamente para las masa acopladas y los péndulos acoplados :

$$\omega^2 = \frac{4K}{m} \text{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \cong \frac{4K}{m} \left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{Ka}{m/a} k^2 \tag{4.3.18}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} + \frac{4K}{m} \text{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \cong \frac{g}{L} + \frac{4K}{m} \left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{g}{L} + \frac{Ka}{m/a} k^2 \tag{4.3.19}$$

la ecuación 4.3.18 es idéntica a la obtenida para el resorte de densidad  $m/a$  y constante intrínseca  $Ka$ . Hacer el límite en la relación de dispersión es equivalente a tomar el mismo límite en la ecuación de ondas. Si en la ecuación de ondas 4.3.1 se dividía ambos miembros por el espaciado  $a$ , y el segundo se multiplica y divide por  $a$  (de modo de quedar  $Ka$  como parámetro distribuido) y se toma el límite cuando  $a$  tiende a cero, se

obtiene la ecuación de ondas clásica cuya relación de dispersión es 4.3.18. Inversamente si se asume que la relación de dispersión 4.3.18 corresponde a un sistema continuo lineal, se puede construir a partir de ella la ecuación de ondas simplemente reemplazando los términos en  $k$  al cuadrado por derivadas espaciales segundas negativas y los términos en la frecuencia al cuadrado por derivadas temporales segundas negativas. Queda claro ahora que al tomar el límite al continuo en un sistema discreto estamos cometiendo un error en las soluciones con longitud de onda comparable al período del sistema. En la figura 4.3.2 estamos tomando como solución la recta tangente en el origen.

Análogamente la relación de dispersión 4.3.19 corresponde a la aproximación a segundo orden de la frecuencia al cuadrado. No es el desarrollo al orden mas bajo de la frecuencia en función del número de onda. Si recorremos el camino inverso y escribimos la ecuación de ondas de un sistema continuo que da origen a dicha relación de dispersión, se obtiene:

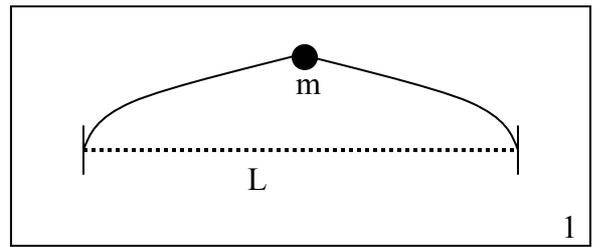
$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(x,t) + c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}} \quad 4.3.20$$

que es una ecuación de ondas distinta de la ecuación de ondas clásica. En particular esta ecuación coincide con la que satisface una partícula relativista sin spin e la mecánica cuántica y se la conoce como ecuación de Klein-Gordon.

Como mencionamos al principio de esta sección, un caso particular de sistemas discretos muy relevante es el de sólidos cristalinos, en que los átomos o moléculas se ordenan en una red periódica. Pensemos cualitativamente qué pasará con un cristal molecular, en que se repiten periódicamente moléculas de la misma estructura. Si las oscilaciones son tales que las moléculas no se deforman, son como masas acopladas. Habrá oscilaciones longitudinales como las halladas y transversales como las del problema 7. Las relaciones de dispersión serán similares a las de la figura 4.3.2. Dos curvas para las dos direcciones transversales (que no tienen porque ser idénticas) una para las longitudinales. En el límite para longitudes de onda grande se tiene una relación lineal y corresponde a las ondas sonoras en ese cristal. Si las oscilaciones de las moléculas son tales que se deforman, o sea que se activan sus modos de vibración internos, tenemos ahora no masas acopladas sino osciladores acoplados. El sistema es similar al de péndulos acoplados, y para  $k=0$  no se tiene frecuencia cero. Estas son ramas adicionales que corresponden a oscilaciones de mayor frecuencia en que hay deformaciones de cada celda unitaria que conforma el cristal. Lo mismo vale si el arreglo cristalino no corresponde a moléculas agrupadas sino simplemente átomos. La diferencia cualitativa entre cristales moleculares y otros cristales es que las moléculas están más débilmente acopladas con los vecinos que en los otros tipos en que las ligaduras son más fuertes. Dichos sistemas pueden ser metales, cristales covalentes o cristales iónicos, que se diferencian en la química de las ligaduras.

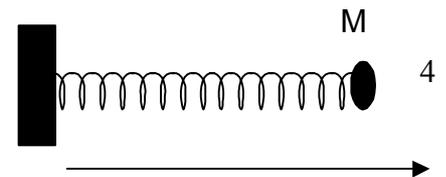
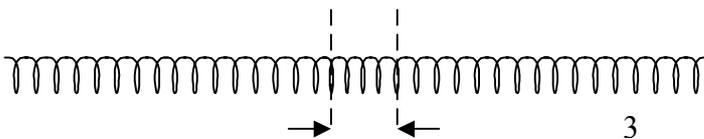
**Guía 4**

1) Encuentre los modos normales de la cuerda ilustrada en la figura, que está sujeta fija en sus extremos y tiene una masa sujeta en el centro.

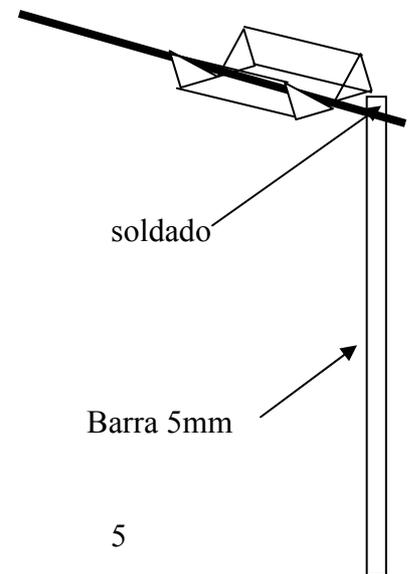


2) Se establece una onda sonora estacionaria en el interior de un tubo de 1m de longitud y 5cm de diámetro. Si se la excita en el modo más bajo con una presión pico de  $10^{-2}$  dinas/cm<sup>2</sup>, calcule el desplazamiento pico y el cambio de densidad pico, así como la energía total contenida en la onda confinada en el tubo. Haga el cálculo para el tubo cerrado en ambos extremos y para el tubo abierto en un extremo. Compare ese desplazamiento con la distancia media entre moléculas en el aire. Nota: el ejemplo dado corresponde a un sonido apenas audible.

3) Un resorte con extremos libres es comprimido inicialmente un 5% en su 10% central y se lo suelta. Escriba las condiciones iniciales, halle su descomposición en modos normales y escriba la solución para todo tiempo. Demuestre que la solución es periódica (¿con qué periodo?) y dibuje (con ayuda de una computadora) la solución para 10 tiempos distintos dentro de un periodo. Discuta el resultado.



4) Un resorte apoyado horizontalmente sin rozamiento y fijo en un extremo, tiene una masa M sujeta en el otro extremo. Calcule los modos normales de oscilación longitudinal del resorte.



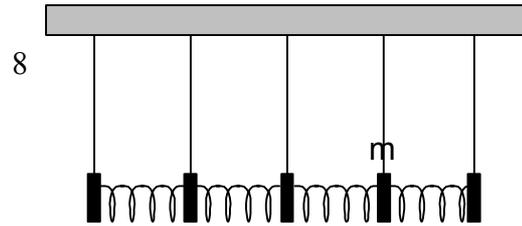
5) Una barra cuelga soldada a un alambre de torsión (similar al caso 2.1) con el otro extremo libre para girar. Encuentre los modos de torsión del alambre. Repita el cálculo para el extremo del alambre fijo.

6) Utilizando el resultado anterior y consideraciones de simetría resuelva el caso 2.1 teniendo en cuenta las ondas de torsión que se propagan por el alambre. Compare los modos mas bajos con la solución hallada para el caso 2.1 en que se consideró como de dos grados de libertad.

7) Se tiene un sistema de masas acopladas por resortes. Halle la ecuación de ondas correspondiente a las oscilaciones longitudinales y transversales despreciando la masa de los resortes. Encuentre la relación de dispersión para este sistema y grafíquela.



8) Se tiene un sistema de péndulos acoplados longitudinalmente por resortes. Halle la ecuación de ondas correspondiente a las oscilaciones longitudinales y transversales despreciando la masa de los resortes. Encuentre la relación de dispersión para este sistema y grafíquela.



9) Para el problema anterior resuelva para el caso en que las  $\omega < \omega_{\min}$  o  $\omega > \omega_{\max}$ . Para ello proponga una solución del tipo:

$$A_n = Ae^{\pm kan}$$

y encuentre la nueva relación entre  $\omega$  y  $k$ . ( $k$  complejo).

**Si nuestro cerebro se desarrolló para adaptarnos a la naturaleza ¿La matemática que usamos para describir la realidad es la que mejor se adapta a esa realidad o a nuestros procesadores innatos?**

## Capítulo 5 ONDAS PROPAGANTES.

Hasta ahora hemos analizado sistemas confinados en los que se introduce una perturbación a su equilibrio y se establece un movimiento de las “coordenadas” respecto de ese equilibrio. El esquema ha sido:

- establecer las ecuaciones que describen la evolución del sistema. Para ello se recurre a la teoría adecuada al sistema en estudio (mecánica, termodinámica, electromagnética o la que corresponda), y se realizan las aproximaciones que sean necesarias para llegar a una expresión suficientemente sencilla sin demasiada pérdida de completitud.

- encontrar los modos normales. Esto lleva dos pasos, uno encontrar las frecuencias en las que todas las coordenadas oscilan en fase y luego encontrar las relaciones entre las coordenadas para cada una de esas frecuencias. En el caso de sistemas continuos homogéneos las soluciones espaciales también resultan sinusoidales. A la relación entre el número de ondas y la frecuencia se la denomina relación de dispersión y es característica de cada ecuación de ondas.

- restringir los valores permitidos del número de ondas a partir de las condiciones de borde.

- la solución general se obtiene como superposición de modos normales con coeficientes que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

A esos movimientos los hemos denominado ondas pero no se ajustan a la descripción intuitiva aceptada comúnmente, que se refiere a algo que se propaga. Más aun, en el caso de sistemas continuos a esos modos normales se los denomina ondas estacionarias, enfatizando el hecho de que no hay propagación. Veremos en este capítulo que es posible escribir una combinación de esas soluciones estacionarias de modo de obtener una nueva familia de soluciones (y una nueva base) en que es explícita la propagación.

### 5.1. Caso de estudio: la solución que dejamos

Haremos en este caso un planteo distinto a los casos anteriores. En lugar de partir de un experimento y buscar modelarlo a partir de las leyes ya establecidas y simplificaciones adecuadas, partiremos de las ecuaciones ya halladas y las exploraremos analíticamente para predecir nuevos comportamientos.

Cuando buscamos los modos normales para las ecuaciones de ondas de sistemas homogéneos, planteamos una solución del tipo:

$$\psi(x,t) = f(x)e^{i\omega t} \quad 5.1.1$$

y luego al reemplazar en la ecuación de ondas obteníamos para  $f(x)$ :

$$f(x) = e^{ikx} \quad 5.1.2$$

Elegíamos luego una solución real que podíamos expresar como:

$$\psi(x,t) = A \cos(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t) \quad 5.1.3$$

pero podríamos haber retenido por un tiempo más la solución espacial compleja, escribiendo 5.1.1 usando 5.1.2 como:

$$\psi(x,t) = e^{ikx} e^{i\omega t} = e^{i(\omega t + kx)} \quad 5.1.4$$

y tomando la parte real quedaría como una solución posible:

$$\psi(x,t) = A \cos(\omega t + kx) \quad 5.1.5$$

Esta nueva solución no es un modo normal, ya que la fase varía con la posición:

$$\phi = kx \quad 5.1.6$$

pero sí es una solución a las ecuaciones de ondas antes presentadas (correspondientes a sistemas homogéneos). Hemos encontrado pues un nuevo tipo de solución que tiene la siguiente particularidad: a medida que avanza el tiempo se repite la misma función espacial pero desplazada. Esto se ilustra en la figura 5.1.1, donde se grafica la función en tres instantes de tiempos distintos.

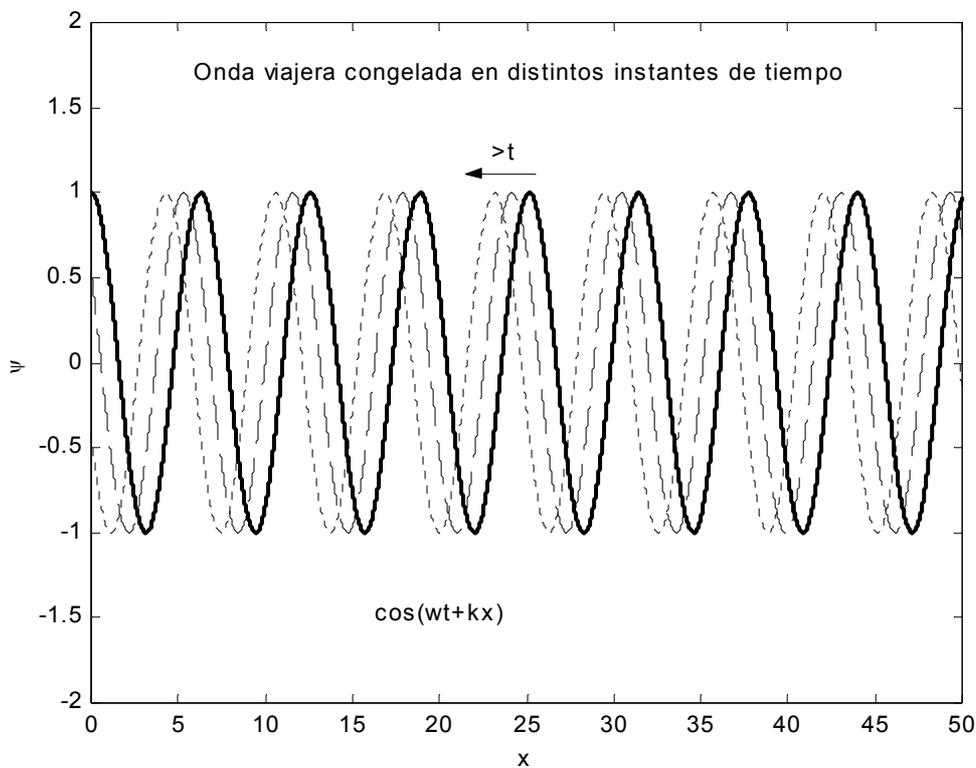


Fig. 5.1.1: Onda viajera en tres instantes sucesivos.

Se observa que a medida que avanza el tiempo la función se corre hacia la izquierda. Podemos formalizar esto de la siguiente manera, escribimos la función espacial como:

$$\psi(x,t) = A \cos[k(x - x_0)] \quad 5.1.7$$

donde  $x_0$  es una función del tiempo:

$$x_0 = -\frac{\omega}{k}t$$

O sea que la función de ondas que se obtiene en un instante dado se propaga hacia la izquierda (velocidad negativa) con una velocidad:

$$c = \frac{\omega}{k} \quad 5.1.8$$

hemos encontrado una solución a la ecuación de ondas en la que la perturbación se propaga (en este caso hacia la izquierda) con una velocidad determinada por la relación de dispersión (constante para la ecuación de ondas clásica). Cabe notar que esta solución vale para todas las ecuaciones de ondas que hemos explorado (no solamente la clásica) pues en todas ellas el sistema en estudio era homogéneo (invariante ante traslaciones) y las soluciones espaciales eran senoidales.

## **5.2 Ondas propagantes, velocidad de fase**

Vamos a analizar ahora más formalmente esta nueva familia de soluciones y como se obtienen todas las soluciones a partir de ellas. Cuando escribimos como solución 5.1.2 en realidad se podría haber tomado cualquier signo para el número de ondas, es decir, tenemos dos soluciones posibles para un mismo  $k$ :

$$f(x) = e^{\pm ikx} \quad 5.2.1$$

con lo que se obtiene las siguientes dos soluciones para la función de ondas:

$$\psi^{\pm}(x,t) = A \cos(\omega t \pm kx) \quad 5.2.2$$

que corresponde a una onda viajando hacia la izquierda ( $x$  decrecientes) y otra hacia la derecha ( $x$  crecientes). Para ver la relación entre esta solución y la estacionaria podemos desarrollar el coseno de la suma, quedando:

$$\psi^{\pm}(x,t) = A \cos(\omega t \pm kx) = A[\cos(\omega t) \cos(kx) \mp \sin(\omega t) \sin(kx)] \quad 5.2.3$$

Es decir, las nuevas soluciones se escriben como superposición de dos soluciones estacionarias. Esto no es de sorprenderse ya que toda solución es superposición de soluciones estacionarias, y como esta nueva solución tiene frecuencia fija, debe ser superposición de dos soluciones estacionarias de esa misma frecuencia. Sin embargo no deja de ser sorprendente que la superposición de dos ondas estacionarias de lugar a una onda viajera o propagante.

La forma funcional de las soluciones encontradas son sinusoidales que se propagan a una cierta velocidad. El argumento de la función sinusoidal se denomina fase, y si calculamos la posición en el espacio del punto que tiene una determinada fase ( $\phi_0$ ), se obtiene como:

$$\omega t \pm kx = \phi_0 \quad 5.2.4$$

cuya solución es:

$$x = \frac{\phi_0}{k} \mp \frac{\omega}{k} t \quad 5.2.5$$

que se propaga a la velocidad

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad 5.2.6$$

que por ello se denomina velocidad de fase.

Hemos visto que las soluciones propagantes pueden escribirse como superposición de ondas estacionarias. Veremos que también vale la inversa, es decir que

las ondas estacionarias pueden escribirse como superposición de ondas propagantes. Para ello simplemente sumamos o restamos las soluciones 5.2.3 quedando:

$$\psi^+(x,t) + \psi^-(x,t) = 2A \cos(\omega t) \cos(kx) \quad 5.2.7$$

$$-\psi^+(x,t) + \psi^-(x,t) = 2A \sin(\omega t) \sin(kx) \quad 5.2.8$$

Con lo que tenemos que las soluciones espaciales en senos y cosenos se escriben como combinaciones de ondas propagantes que viajan en sentidos opuestos. Es este viaje en sentidos opuestas que da lugar a una onda estacionaria sin propagación neta.

### 5.3. Energía y potencia transportadas

Para todos los casos de ondas mecánicas hemos visto que la energía se distribuye en dos formas, una cinética de densidad

$$U_c = \frac{1}{2} c_c \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad 5.3.1$$

y otra potencial de densidad

$$U_p = \frac{1}{2} c_p \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad 5.3.2$$

donde  $c_c$  y  $c_p$  son dos constantes relacionadas que dependen de la magnitud que se haya elegido como función de onda. Tomemos la solución 5.2.3 que se propaga hacia la derecha y calculemos esos dos términos:

$$U_c = \frac{1}{2} c_c \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad 5.3.3$$

$$U_p = \frac{1}{2} c_p k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad 5.3.4$$

Nótese que esta vez al derivar respecto del tiempo o de la posición se obtiene la misma forma funcional, por lo que ambas formas de energía viajan juntas. No alternan en el tiempo ni en la posición sino que alcanzan el máximo al mismo tiempo en cada lugar. La energía no alterna entre una y otra forma sino que viaja precisamente a la velocidad de la onda. La relación entre las constantes que multiplican a la energía cinética y la potencial es tal que ambas densidades de energía son iguales. Si pensamos en el caso particular de la cuerda, la máxima energía cinética se obtiene donde y cuando la cuerda tiene su máxima velocidad, que es cuando cruza por cero. En ese lugar y momento tiene el máximo estiramiento y por lo tanto la máxima energía potencial.

Como la densidad de energía viaja a la velocidad de fase de la onda, a través de una superficie  $x = \text{constante}$  atraviesa una potencia

$$P = v_f U \quad 5.3.5$$

ya que toda la energía que esté a una distancia  $dx = v_f dt$  atravesará la superficie en el tiempo  $dt$ . Si  $U$  es una densidad lineal,  $P$  es la potencia. En cambio si  $U$  es una densidad volumétrica  $P$  será la potencia que atraviesa un área unitaria también llamada intensidad de la onda.

Muchas veces interesa no el valor instantáneo de la potencia sino su valor medio, promediado sobre tiempos mayores a un período de oscilación. Este interés

proviene del hecho que los detectores utilizados promedian sobre un cierto tiempo (no tienen respuesta instantánea). Esto es particularmente importante en el caso de la luz, en que  $f \approx 10^{15}$  Hz y el ojo promedia durante 0,1s. La definición del valor medio de una función en un tiempo T es:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt' \quad 5.3.6$$

Es fácil determinar que el valor medio del seno al cuadrado es  $\frac{1}{2}$ , con lo que se pueden obtener los valores medios de las densidades de energía y de la potencia transmitida.

Cuando la propagación es en el espacio libre, como el caso de sonido, y la onda se expande en las tres dimensiones, la magnitud de interés pasa a ser la intensidad, que es la potencia transmitida en un área  $\Delta A$  dividida el valor del área (en el límite en que el área tiende a cero):

$$I = \frac{dP}{dA} \quad 5.3.7$$

El oído es un instrumento particularmente sensible para detectar sonido, y tiene un rango de doce órdenes de magnitud entre el sonido más débil audible y el que produce daño o dolor. Este rango tan grande hace que se utilice el logaritmo de la intensidad como magnitud práctica, la unidad es conocida como decibel, se la abrevia db, y se define:

$$I[db] = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad 5.3.8$$

con  $I_0 = 1 \mu W / cm^2 = 10 \text{ erg} / cm^2 s$ . Esta intensidad de referencia corresponde a una persona hablando normal al oído. A una frecuencia de 440 Hz un oído normal detecta desde  $-100$  db hasta  $20$  db. El rango es menor a otras frecuencias, siendo el rango de frecuencias audibles variable entre las personas, abarcando típicamente desde  $100$  Hz a  $15$  o  $20$  kHz.

Para comprender más cabalmente lo extraordinario del rango de este instrumento, busquen alrededor instrumentos hechos por el humano y comparen el rango dinámico (cociente entre el mayor y el menor valor medible). Piensen que para digitalizar cubriendo ese rango es necesario al menos  $40$  bits para cada punto.

#### **5.4. Algunas condiciones de borde. Reflexión de ondas**

Las soluciones propagantes tiene la particularidad de que todos los puntos del medio van oscilando de la misma manera a distintos tiempos. Esto no ocurría con las ondas estacionarias, en que todos los puntos oscilan en fase pero con distinta amplitud, por lo que las soluciones se podían adaptar fácilmente a condiciones tales como puntos fijos (nodos) o puntos libre (vientres). Veremos ahora que ocurre cuando en un medio en que se propaga una onda viajera se le impone una condición de borde particular. Comenzaremos por el caso más obvio, imponer un punto fijo. Si imponemos la condición:

$$\psi(x=0, t) = 0 \quad 5.4.1$$

vemos que la onda viajera

$$\psi^-(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + cc \quad 5.4.2$$

no puede satisfacer nunca ese requisito. La manera de adaptar esa condición es observar en 5.2.8 que si agregamos una segunda onda viajando a izquierda con la misma amplitud y signo opuesto, la superposición de esas dos ondas deja fijo el punto  $x=0$ . Otra manera de entender esta solución es pensar que si la onda es lanzada desde  $x=-\infty$ , al toparse con ese punto fijo se refleja nuevamente sobre su camino. Podemos encontrar esta solución planteando la existencia de esa onda reflejada de la forma:

$$\psi^+(x, t) = Be^{i(\omega t + kx)} + cc \quad 5.4.3$$

y buscando la amplitud compleja B tal que la suma de las dos ondas satisface la condición de borde impuesta. Esto es de 5.4.1:

$$\psi^+(x=0, t) + \psi^-(x=0, t) = \psi(x=0, t) = 0 \quad 5.4.4$$

y a partir de 5.4.2 y 5.4.3 queda:

$$Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} + cc = 0 \quad 5.4.5$$

por lo que

$$A + B = 0 \quad 5.4.6$$

o expresado en términos relativos:

$$R = \frac{B}{A} = -1 \quad 5.4.7$$

donde R es denominado el coeficiente de reflexión e indica la relación entre la amplitud compleja de la onda incidente y la reflejada. En este caso el coeficiente es real indicando que se refleja en fase y vale  $-1$  indicando que se invierte y tiene la misma amplitud.

Veamos ahora otros ejemplos.

#### Discontinuidad en la densidad de una cuerda:

Analicemos el caso ilustrado en la figura 5.4.1. La cuerda cambia su densidad lineal en  $x=0$ . Una onda incide desde la izquierda con amplitud A. Ahora no tenemos un punto fijo (nodo) en  $x=0$  sino una condición de borde particular que debemos explicitar. Por ser un sistema mecánico la condición de borde será impuesta por las leyes de Newton. La soga a la izquierda realizará una fuerza en la dirección y sobre la soga de la derecha que deberá resultar de igual módulo y dirección y de sentido contrario a la que la soga de la derecha ejerce sobre la de la izquierda. Asimismo la onda debe propagarse de cada lado siguiendo la ecuación de ondas correspondiente (o lo que es lo mismo, con la correspondiente relación de dispersión). La primera condición que impone el punto de unión es que si la onda incidente oscila a una dada frecuencia  $\omega$ , la onda a la derecha debe oscilar a esa misma frecuencia (de no ser así se separarían en algún momento y se cortarían la soga). La segunda condición es que si el punto no permanece fijo, una onda es necesariamente lanzada sobre la derecha.

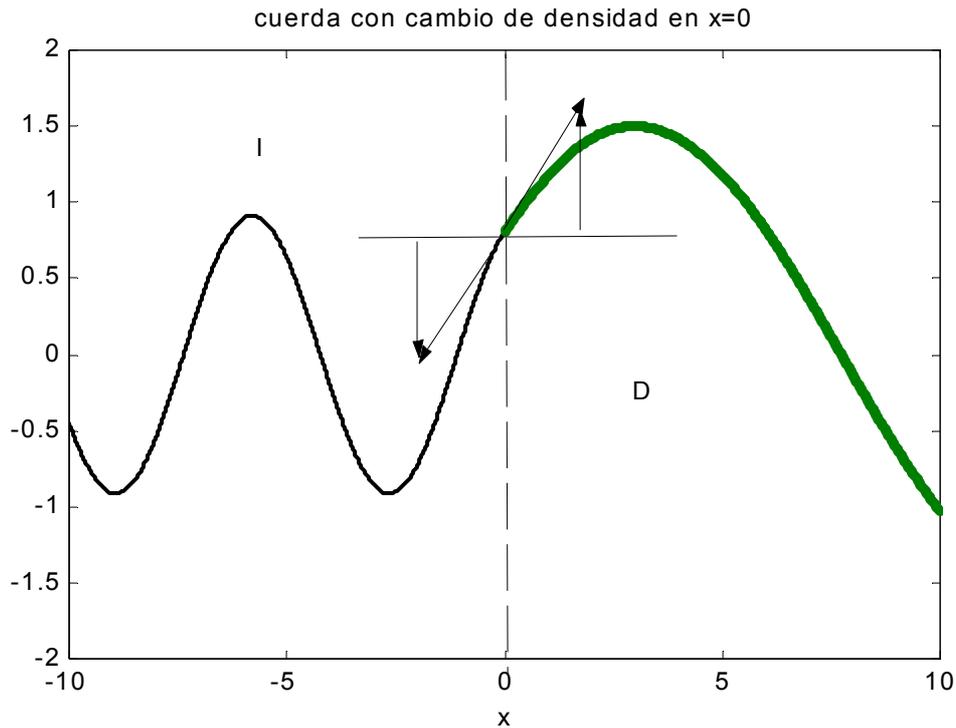


Fig. 5.4.1 cuerda con discontinuidad en su densidad.

Podemos hacer un primer intento como ilustración de suponer que no hay onda reflejada. El escenario es entonces que una onda propagándose hacia la derecha incide desde la izquierda ( $\psi_I^-$ ), y una onda similar se propaga por el tramo derecho ( $\psi_D^-$ ):

$$\psi_I^-(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + cc \tag{5.4.8}$$

$$\psi_D^-(x,t) = Ce^{i(\omega t - kx)} + cc \tag{5.4.9}$$

Si imponemos la condición de continuidad de la cuerda:

$$\psi_I(x=0,t) = \psi_D(x=0,t) \tag{5.4.10}$$

se obtiene

$$A=C \tag{5.4.11}$$

Por otro lado la fuerza que realiza en la dirección y el tramo de la izquierda sobre la derecha es:

$$F_{I/D} = -T_o \frac{\partial \psi_I}{\partial x} \tag{5.4.12}$$

y el de la derecha sobre la izquierda es:

$$F_{D/I} = T_o \frac{\partial \psi_D}{\partial x} \tag{5.4.13}$$

Si imponemos que por ser un par de interacción:

$$F_{D/I} = -F_{I/D} \tag{5.4.14}$$

de 5.4.8 y 5.4.9 en 5.4.12 y 13:

$$ik_I T_o A + cc = ik_D T_o C + cc \tag{5.4.15}$$

y de 5.4.11 resulta

$$k_I = k_D \quad 5.4.16$$

que no es posible por ser las densidades distintas.

Debemos pues incluir una onda reflejada en la solución, que sería:

$$\psi_I^+(x, t) = Be^{i(\omega t + kx)} + cc \quad 5.4.17$$

y la condición de continuidad 5.4.10 da:

$$\psi_I^+(x=0, t) + \psi_I^-(x=0, t) = \psi_D(x=0, t) \Rightarrow A+B=C \quad 5.4.18$$

Y las fuerzas resultan:

$$F_{I/D} = -T_o(-ik_I A + ik_I B)e^{i\omega t} \quad 5.4.19$$

$$F_{D/I} = T_o(-ik_D C)e^{i\omega t} \quad 5.4.20$$

y por ser un par de interacción vale 5.4.14 quedando:

$$k_I(B - A) = -k_D C \quad 5.4.21$$

y de 5.4.21 y 5.4.18 resulta

$$k_I(A - B) = k_D(A + B) \quad 5.4.22$$

y despejando:

$$R = \frac{B}{A} = \frac{(k_I - k_D)}{(k_I + k_D)} \quad 5.4.23$$

y para la onda transmitida, a partir de 5.4.18

$$T = \frac{C}{A} = I + R = I + \frac{(k_I - k_D)}{(k_I + k_D)} = \frac{2k_I}{(k_I + k_D)} \quad 5.4.24$$

siendo T el coeficiente de transmisión (relación entre las amplitudes complejas transmitida e incidente). Utilizando la relación de dispersión (velocidad de fase constante):

$$k_I \pm k_D = \omega \left( \frac{I}{v_{fI}} \pm \frac{I}{v_{fD}} \right) = \omega \frac{v_{fD} \pm v_{fI}}{v_{fD} v_{fI}} \quad 5.4.25$$

quedando

$$R = \frac{v_{fD} - v_{fI}}{v_{fD} + v_{fI}} \quad 5.4.26$$

y para la transmisión

$$T = \frac{2v_f D}{v_f D + v_{fI}} \quad 5.4.27$$

Cabe notar que los coeficientes de reflexión y transmisión hallados son reales y no dependen de la frecuencia.

### 5.5. Más ejemplos de reflexiones

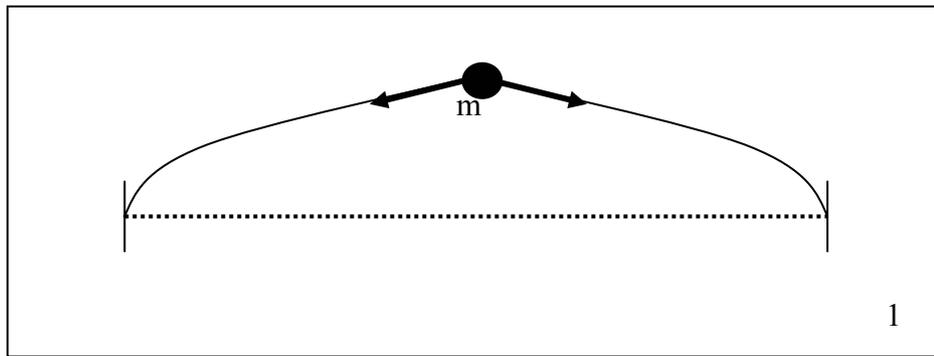


Fig. 5.5.1 Cuerda con una cuenta.

#### la cuerda con una cuenta

Los coeficientes de reflexión y transmisión se obtienen, como hemos visto, simplemente de aplicar las leyes de la física pertinentes en los puntos de discontinuidad de las propiedades intensivas del medio en que se propaga la onda. En la figura 5.5.1 se ilustra un nuevo caso en que una cuerda es interrumpida por la presencia de una cuenta de masa  $m$ . Ahora en vez de igualar el par de interacción utilizamos el hecho de que la masa de la cuenta por su aceleración debe ser igual a la fuerza que ejercen los dos tramos de cuerda (izquierda y derecha). La otra condición es la de continuidad, que sigue valiendo. Las ondas presentes siguen representadas por 5.4.8 (incidente), 5.4.9 (transmitida) y 5.4.17 (reflejada). La fuerza en la dirección y sobre la cuenta es:

$$F_y = -T_o \frac{\partial \psi_I}{\partial x} + T_o \frac{\partial \psi_D}{\partial x} = m \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial t^2} \quad 5.5.1$$

y usando las definiciones de los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$\psi_I^+(x=0,t) = R\psi_I^-(x=0,t) \quad 5.5.2$$

$$\psi_D^-(x=0,t) = T\psi_I^-(x=0,t) \quad 5.5.3$$

con lo que se obtiene de la condición de continuidad:

$$T=I+R \quad 5.5.4$$

Y de 5.5.1:

$$iT_o[k_I(1-R) - k_D T] = -m\omega^2 T \quad 5.5.5$$

que con 5.5.4 da:

$$R = \frac{i(k_I - k_D) + m\omega^2 / T_o}{i(k_I + k_D) - m\omega^2 / T_o} \quad 5.5.6$$

y en términos de la velocidad de fase:

$$R = \frac{i \frac{\omega(v_{fD} - v_{fI})}{v_{fI} v_{fD}} + m\omega^2 / T_o}{i \frac{\omega(v_{fD} + v_{fI})}{v_{fI} v_{fD}} - m\omega^2 / T} \quad 5.5.7$$

Para el caso particular en que a ambos lados se tiene la misma cuerda

$$R = \frac{m\omega^2 / T_o}{\left( i \frac{2\omega}{v_f} - m\omega^2 / T \right)} = \frac{-1}{\left( 1 - i \frac{2T}{v_f m\omega} \right)} \quad 5.5.8$$

vemos que debido a la presencia de la cuenta parte de la onda se refleja, y tanto la amplitud como la fase de la onda reflejada depende de la frecuencia. Para el caso límite en que la masa de la cuenta tiende a cero, como es de esperarse la amplitud reflejada también tiende a cero. Cuando la masa tiende a infinito, se convierte en un punto fijo y  $R \rightarrow -1$ . Cabe notar que cuanto más alta es la frecuencia, más sensible es la onda a la presencia de la cuenta.

Reflexión del sonido.

La cuerda se caracteriza por dos parámetros intensivos, la densidad y la tensión. En el caso de la cuerda que analizamos la discontinuidad era en la densidad. Para producir una discontinuidad en la tensión, que hubiera dado un resultado algo distinto serían necesario trucos pensados como incluir argollas. Un caso análogo en el que se pueden variar dos parámetros es el de la propagación del sonido, en el que los dos parámetros son la compresibilidad volumétrica del medio y la densidad. Dicha situación es ilustrada en la figura 5.5.2.

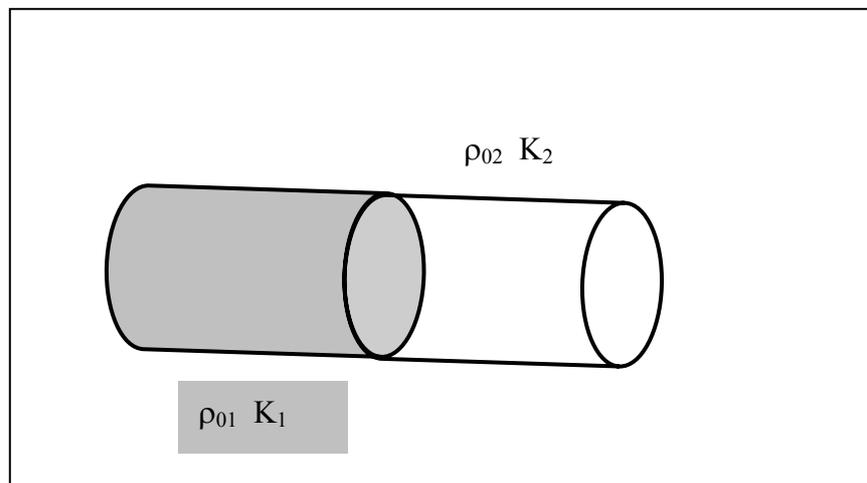


Fig.5.5.2. discontinuidad en la propagación del sonido

**Hipótesis fuerte:** Hay una adherencia perfecta, no se separan los dos medios dejando un hueco.

Las condiciones de borde serán ahora la de continuidad:

$$\psi_1(x = 0, t) = \psi_2(x = 0, t) \quad 5.5.9$$

y la proveniente del par de interacción:

$$P_1 = P_2 \quad 5.5.10$$

Donde  $P_1$  y  $P_2$  son las perturbaciones a la presión de equilibrio debido a la onda y  $\psi$  es la función de onda que describe el desplazamiento. Recordando la relación entre la perturbación en la presión y en la densidad (4.2.7 y 4.2.10):

$$P = \frac{K}{\rho_0} \rho \quad 5.5.11$$

y la relación entre la perturbación en la densidad y el desplazamiento (4.2.4):

$$\rho = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 5.5.12$$

Se obtienen las siguientes condiciones de borde:

$$T = I + R \quad 5.5.13$$

$$K_1 k_1 \psi_1^-(0, t)(1 - R) = K_2 k_2 T \psi_1^-(0, t) \quad 5.5.14$$

donde se han utilizado 5.5.2 y 5.5.4. reemplazando 5.5.13 en la última y poniendo el número de ondas  $k$  en función de la frecuencia y la velocidad del sonido:

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad 5.5.15$$

queda:

$$\sqrt{K_1 \rho_{o1}} (1 - R) = \sqrt{K_2 \rho_{o2}} (1 + R) \quad 5.5.16$$

Al coeficiente que aparece multiplicando en ambos miembros se lo denomina impedancia del medio y se lo designa con la letra  $Z$ :

$$Z = \sqrt{K \rho_0} \quad 5.5.17$$

Nótese que esta es una nueva relación entre los dos parámetros compresibilidad volumétrica y densidad, distinta a la que da origen a la velocidad de fase 5.5.15. Es decir que dos medios distintos pueden tener igual velocidad de fase y distinta impedancia o igual impedancia y distinta velocidad de fase. En términos de las impedancias la reflectividad queda finalmente:

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad 5.5.18$$

y de 5.5.13 la transmisión será:

$$T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad 5.5.19$$

Puede observarse que si dos medios presentan la misma impedancia la onda sonora no experimenta reflexión aunque haya un cambio de densidad.

Si repitiéramos el cálculo anterior para una cuerda en la que hubiera un cambio de densidad y de tensión (experimento difícil de implementar), se obtendría  $Z = \sqrt{T \rho}$ .

### **5.6. Fuentes. Propagación con disipación**

En el capítulo 3 planteamos el problema de una soga en la que forzábamos un punto con un movimiento armónico. La solución a ese problema quedó pendiente y corresponde a un nuevo tipo de condición de borde que no hemos resuelto aún. Al ser un sistema forzado, para evitar eventuales divergencias y a fin de que la solución estacionaria llegue a tiempos razonables (hay que esperar que decaiga el transitorio), incluimos pérdidas en la ecuación de ondas clásica:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad 5.6.1$$

Si proponemos ahora una solución propagante del tipo

$$\psi(x,t) = e^{i(\omega t + kx)} \quad 5.6.2$$

obtendremos la misma relación de dispersión del capítulo 3:

$$\omega^2 - i\gamma\omega = c^2 k^2 \quad 5.6.3$$

La diferencia ahora son las condiciones de borde. Antes buscamos la solución libre, en la que los extremos tenían condiciones fijas que se satisfacían con modos normales espacialmente sinusoidales ( $k$  real) y que por la relación de dispersión daban lugar a frecuencias complejas, o sea decaimiento temporal. Ahora tenemos como condición de borde que un punto oscila a frecuencia real (sin decaimiento) debido al forzante externo. Para satisfacer la relación de dispersión ahora será el número de ondas un número complejo:

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - i \frac{\gamma}{\omega}} \cong \pm \frac{\omega}{c} \left( 1 - i \frac{\gamma}{2\omega} \right) \quad 5.6.4$$

donde la aproximación es para el caso de baja disipación, es decir:

$$\gamma \ll \omega \quad 5.6.5$$

Las dos soluciones corresponden a una onda propagándose a derecha y otra a izquierda:

$$\psi^- = e^{-\frac{\gamma}{2c}x} e^{i\omega(t-x/c)} \quad 5.6.6$$

$$\psi^+ = e^{+\frac{\gamma}{2c}x} e^{i\omega(t+x/c)} \quad 5.6.7$$

Las dos soluciones tienen una amplitud que decae exponencialmente en el espacio en la dirección de propagación. Vemos que la misma ecuación de ondas nos da soluciones estacionarias (en el sentido que no se propaga energía) que decaen en el tiempo y soluciones propagantes en que la energía se consume a medida que la onda avanza. La diferencia está en la condición de borde. Si fuerza un punto a una frecuencia dada estoy inyectando la onda propagante a partir de ese punto. Al sistema que fuerza el punto se lo denomina fuente de la onda.

Si resolvemos el caso 3.1 (cuerda forzada) con estas nuevas soluciones tendremos que el forzante inyecta una onda hacia la izquierda de amplitud a determinar (por la condición de borde) y en el extremo fijo se producirá una reflexión de la onda

como vimos antes (con coeficiente  $R=-1$ ). La onda a izquierda es (tomando  $x=0$  en el extremo fijo):

$$\psi^+ = Ae^{+\frac{\gamma}{2c}x} e^{i\omega(t+x/c)} + cc \quad 5.6.8$$

con  $A$  complejo. La onda a derecha:

$$\psi^- = Be^{-\frac{\gamma}{2c}x} e^{i\omega(t-x/c)} + cc \quad 5.6.9$$

En  $x=0$  busco que la suma de cero (es equivalente a pedir  $R=-1$ , pero repetimos el procedimiento para afirmarlo):

$$Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = 0 \Rightarrow A = -B \quad 5.6.10$$

y en el forzante ( $x=L$ ) pedimos que se mueva a frecuencia fija con amplitud dada  $A_0$ :

$$\psi(L,t) = \psi^- + \psi^+ = \left[ Ae^{\frac{\gamma L}{2c}} e^{i\omega L/c} + Be^{-\frac{\gamma L}{2c}} e^{-i\omega L/c} \right] e^{i\omega t} + cc = \frac{A_0}{2} e^{i\omega t} + cc \quad 5.6.11$$

De las dos últimas ecuaciones resulta:

$$A \left[ e^{\frac{\gamma L}{2c}} e^{i\omega L/c} - e^{-\frac{\gamma L}{2c}} e^{-i\omega L/c} \right] = \frac{A_0}{2} \quad 5.6.12$$

que permite hallar la amplitud  $A$ . Vemos que tiene solución para cualquier valor de la frecuencia, simplemente habrá valores para los cuales la amplitud será mayor. En la figura 5.6.1 se grafica el módulo de la amplitud en función de la frecuencia para dos casos de disipación. Se puede observar que a mayor disipación, menor es la amplitud de la onda, y que presenta máximos para los múltiplos enteros de:

$$\omega_0 = \pi c / L \quad 5.6.13$$

que son las resonancias si el forzante es mantenido fijo.

Veamos como se puede interpretar esto en término de ondas viajeras. Al inyectar la onda desde el forzante, viaja hacia la izquierda hasta chocar con el punto fijo, donde se refleja en contrafase ( $R=-1$ ). La onda reflejada viaja a derecha hasta el forzante en donde nuevamente es reflejada. Llega con una amplitud menor debido a las pérdidas de modo que no da nodos salvo en el extremo fijo en que ambas tiene igual amplitud. Al llegar al forzante es reflejada por encontrar una condición de borde discontinua. El resultado está indicando que se refleja en contrafase como si fuera un extremo fijo, ya que da las mismas resonancias. Al reflejarse en contrafase, si su nueva fase coincide con la de la onda inyectada, suman constructivamente y la amplitud total es mayor. La inyectada provee la energía que pierde en cada tránsito permitiendo llegar a una solución estacionaria en que la amplitud será mayor cuanto menor sea la pérdida por tránsito. Si la reflejada en el forzante no esta en fase con la inyectada, significa que no suman (interfieren) constructivamente y parte de la energía es devuelta al forzante. Es por ello que la máxima transferencia de energía se obtiene en la resonancia.

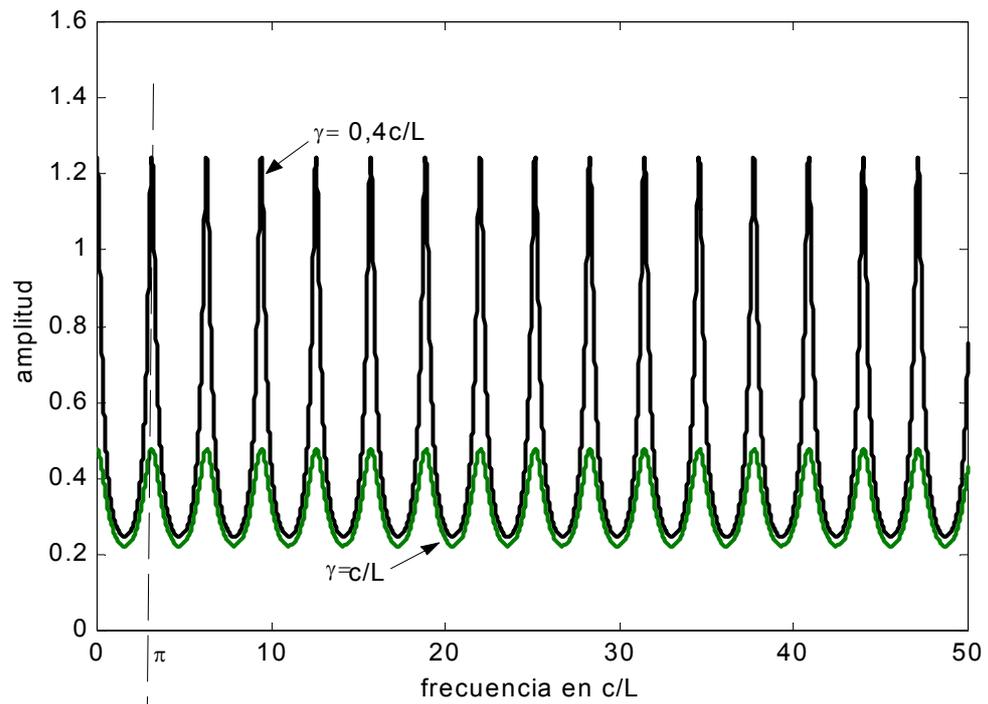


Fig. 5.6.1. Amplitud de la oscilación de la cuerda en función de la frecuencia para situaciones con distinta pérdida por fricción.

**Guía 5**

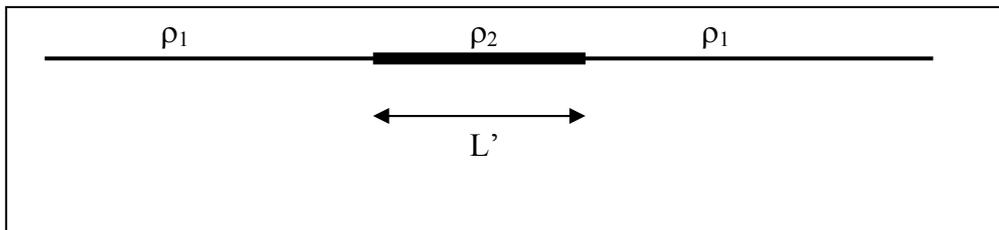
1.- demuestre que la onda sinusoidal propagante es solución de la ecuación de Klein-Gordon. Grafique la relación de dispersión. Indique como se determina en ese gráfico la velocidad de fase. Calcule analíticamente la velocidad de fase y grafíquela.

2.- Se tiene una cuerda semi-infinita que se extiende hacia la izquierda. En  $x=L$  tiene su extremo. Una onda de amplitud  $A$  incide desde la izquierda. Calcule la expresión para la onda reflejada en este sistema de coordenadas. Repita el cálculo haciendo un cambio de variables de modo que el origen esté en el punto fijo, y vuelva a cambiar sobre el resultado al sistema original. Discuta como es la mecánica para este procedimiento.

3.- Repita el problema anterior para una cuerda que cambia su densidad en  $x=L$ . Calcule la onda reflejada y transmitida en ese sistema por los dos métodos.

4.- Repita el problema anterior para el caso de una cuerda en la que se agrega una cuenta de masa  $m$  en  $x=L$ .

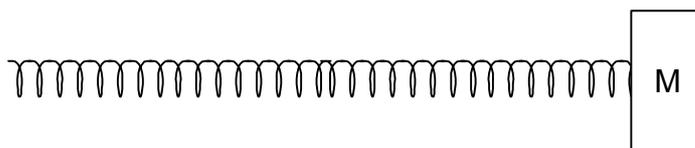
5.- Se tiene una cuerda de densidad lineal de masa  $\rho_1$  sometida a una tensión  $T_0$ . A una distancia  $L$  del extremo la densidad lineal de la cuerda cambia abruptamente al valor  $\rho_2$  y a una distancia  $L+L'$  del mismo extremo el valor de  $\rho$  vuelve a ser  $\rho_1$ . En esta cuerda se propaga una onda de la forma  $A \cos(\omega t - k_1 z)$ .



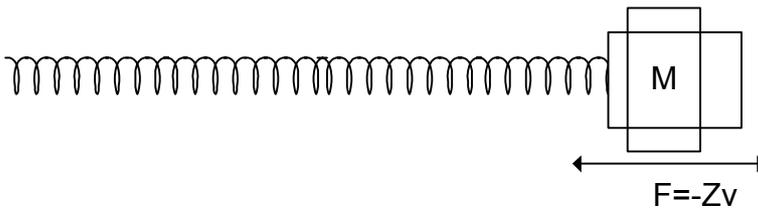
Escribir la forma de la función de onda (sin importar su amplitud) para las ondas transmitidas, y para los siguientes sistemas de referencia:

- a) el origen de coordenadas en el extremo de la primer cuerda de densidad  $\rho_1$ .
- b) el origen de coordenadas en el primer punto de cambio de  $\rho$ .
- c) el origen de coordenadas en el segundo punto de cambio de  $\rho$ .

6.- Un resorte semi-infinito de constante distribuida  $K_l$  y densidad lineal  $\rho$  se extiende desde la izquierda hasta  $x=L$ . Termina en un cuerpo de masa  $M$  como uindica la figura. Encuentre el coeficiente de reflexión en función de la frecuencia y la masa  $M$ . Discuta el resultado.



7.-Repita el problema anterior si la masa de terminación es remplazada por un amortiguador que ejerce una fuerza sobre el resorte oponiéndose al movimiento y proporcional a la velocidad

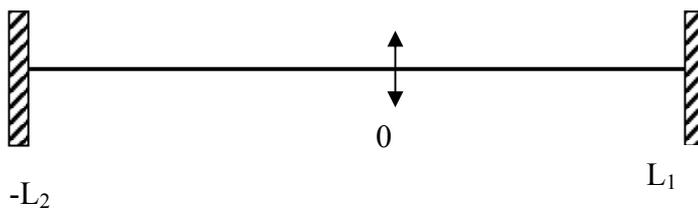


8.- Se tienen dos resortes semi-infinitos de distinta densidad lineal de masa ( $\rho_1$  y  $\rho_2$ ), y constantes  $K_{i1}$  y  $K_{i2}$  unidos en un punto.

- conocida  $\rho_1$  y  $K_{i1}$  calcule  $\rho_2$  y  $K_{i2}$  para que a la onda reflejada le corresponda una amplitud que sea la mitad de la amplitud de la onda incidente. Considere los dos casos de incidencia posibles (desde la izquierda y desde la derecha).
- Grafique los coeficientes de reflexión y de transmisión vs  $\rho_2$ .
- Vea que para cualquier recinto que incluya o no a la unión el flujo de energía que entra es igual al flujo de energía que sale.

9.- Se tiene el siguiente sistema, forzado en  $z=0$ , tal que  $\psi(0,t) = A_0 \cos(\omega t)$ . No tenga en cuenta el rozamiento.

- Calcule  $\Psi(z,t)$ .
- Calcule la fuerza que hay que hacer en  $z=0$  para que la cuerda se mueva de esta manera. Vea que es de la forma  $f(t)=f_0\cos(\omega t)$ . ¿Cuál es la relación entre  $A_0$  y  $f_0$ ? ¿Cómo es  $\delta\Psi/\delta z$  en  $z=0$ ? ¿En qué caso es continua?
- Si en vez de conocer el vínculo en  $z=0$  ( $\Psi(0,t)$ ) se conoce la fuerza que se realiza sobre la cuerda en ese punto, y se sabe que dicha fuerza es de la forma  $f(t)=f_0\cos(\omega t)$ , ¿cómo será el movimiento de la cuerda? (Use lo calculado en b)).
- En  $t=0$  se deja al sistema en libertad. Si la frecuencia de excitación era  $\omega_1=3\pi v/4L$ , calcule qué modos estarán excitados para  $t>0$  y cuáles serán los más importantes. Dibuje  $\Psi(z,0)$  y los modos más importantes. ¿Es cierto que al liberar al sistema éste



sigue oscilando con la frecuencia de excitación para  $t<0$ ?

10.- Plantee el problema anterior en el caso en que se incluyen en la ecuación de ondas pérdidas proporcionales a la velocidad.

11.- Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión del sonido en las siguientes interfases: a) hierro-cobre, b) aluminio-plomo, c) aire-agua.

12.- Un tubo lleno de aire tiene un parlante en un extremo y el otro abierto. ¿Cómo son las condiciones de borde para calcular la amplitud de la onda sonora reflejada? ¿Y si el tubo está cerrado?

**¿La causalidad es válida a toda escala o solo una aproximación adaptativa a la escala en que nos movemos naturalmente?**

## Capítulo 6 PAQUETES DE ONDAS.

Hemos visto hasta ahora como se propagan perturbaciones originadas a frecuencias bien definidas. Nos queda por entender que pasa cuando una perturbación es producida con una forma arbitraria en el tiempo, no sinusoidal. Haremos esto paulatinamente comenzando por analizar el caso mas sencillo de superposición de dos ondas de distinta frecuencia e igual amplitud.

### 6.1. Caso de estudio: batido de dos ondas propagantes

Supongamos que alguna fuente o combinación de ellas introduce en el sistema una perturbación que es la superposición de dos ondas de igual amplitud que se propagan hacia la derecha. Su forma funcional será:

$$\psi(x, t) = \psi_1 + \psi_2 = Ae^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + Ae^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + cc \quad 6.1.1$$

Veamos como es la dependencia en el tiempo en dos posiciones distintas,  $x=0$  y otro valor de  $x$ . En  $x=0$ :

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega_1 t)} + Ae^{i(\omega_2 t)} + cc \quad 6.1.2$$

y como ya vimos en el caso de un batido de dos modos, tomamos los valores medios de las frecuencias y las semidiferencias como:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \Delta\omega &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \end{aligned} \quad 6.1.3$$

con lo que invirtiendo 6.1.3 y reemplazando en 6.1.2:

$$\psi(x=0, t) = Ae^{i\bar{\omega}t} \left( e^{i\Delta\omega t} + e^{-i\Delta\omega t} \right) + cc = 2Ae^{i\bar{\omega}t} \cos(\Delta\omega t) + cc \quad 6.1.4$$

Es decir que la función de onda oscila con una portadora a frecuencia media  $\bar{\omega}$  y con una amplitud modulada a la frecuencia semidiferencia  $\Delta\omega$ .

Veamos ahora que ocurre en otra posición ( $x \neq 0$ ). Para ello en forma análoga defino los número de onda medios y semidiferencia:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{k_1 + k_2}{2} \\ \Delta k &= \frac{k_1 - k_2}{2} \end{aligned} \quad 6.1.5$$

que luego de invertirlos y reemplazar en 6.1.2 queda en forma análoga:

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\bar{\omega}t - \bar{k}x)} \left( e^{i(\Delta\omega t - \Delta kx)} + e^{-i(\Delta\omega t - \Delta kx)} \right) + cc \quad 6.1.6$$

que finalmente da:

$$\psi(x, t) = 2Ae^{i(\bar{\omega}t - \bar{k}x)} \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) + cc \quad 6.1.7$$

En esta nueva posición también se observa un batido, con portadora y moduladora iguales a las de  $x=0$  pero con distintas fases. Estas fases, que varían linealmente en el

tiempo no son otra cosa que el retardo que surge del tiempo de propagación desde el origen hasta  $x$ . La portadora tiene una fase que está viajando a una velocidad:

$$v_f = \frac{\bar{\omega}}{k} \tag{6.1.8}$$

pero la moduladora avanza a una velocidad distinta dada por:

$$v_b = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \tag{6.1.9}$$

donde el subíndice b indica la velocidad del batido.

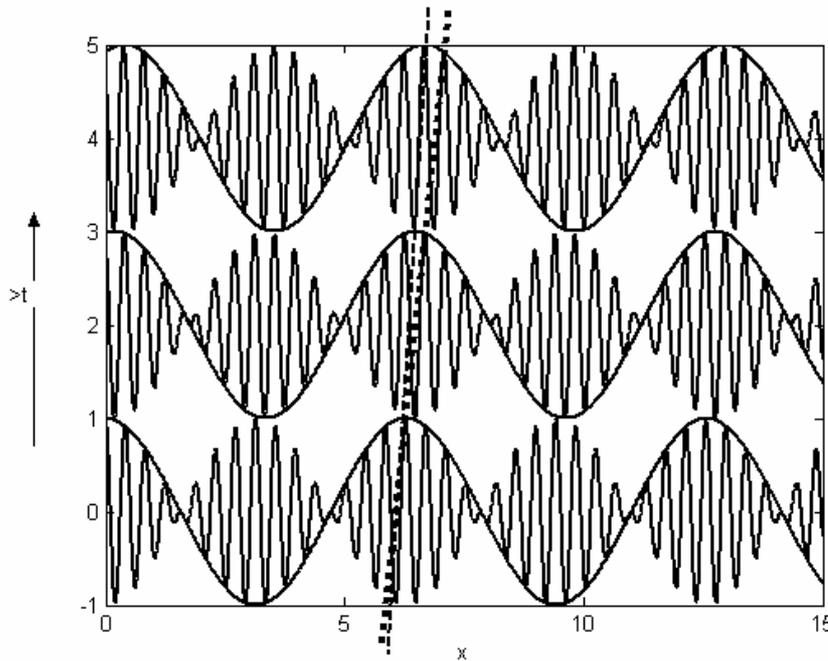


Figura 6.1.1. Batido de dos ondas senoidales que se propagan hacia la derecha con  $\bar{\omega} = 15\Delta\omega$ . Se muestra la onda en tres instantes sucesivos, desplazadas hacia arriba para facilitar la visualización. Como ayuda al ojo se agregan las respectivas envolventes, una línea partida uniendo los máximos de la envolvente y una línea punteada siguiendo un máximo de la portadora (fase).

En el caso particular de la ecuación de ondas clásica, en que hay una relación lineal entre la frecuencia y el número de ondas, ambas velocidades son iguales. En cambio si por ejemplo la ecuación de ondas es la de Klein-Gordon, cuya relación de dispersión es:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2 \tag{6.1.10}$$

de donde para la velocidad de fase se obtiene:

$$v_f^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\omega_0^2}{k^2} + c^2 > c^2 \tag{6.1.11}$$

si realizamos la aproximación de que ambas frecuencias son muy próximas, o sea:

$$\Delta\omega \ll \bar{\omega} \tag{6.1.12}$$

podemos desarrollar como:

$$\Delta\omega \cong \frac{d\omega}{dk} \Delta k \tag{6.1.13}$$

quedando

$$v_b = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \cong \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_f} < c \quad 6.1.14$$

vemos que en este caso el batido se propaga siempre más despacio que la fase de la portadora.

¿A qué velocidad se propaga la energía?

La energía transportada por la onda tiene dos términos, uno proporcional a la derivada temporal al cuadrado (energía cinética) y otro a la derivada espacial al cuadrado. Calculemos pues la derivada temporal a partir de 6.1.7:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2A\bar{\omega} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) - 2A\Delta\omega \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \text{sen}(\Delta\omega t - \Delta kx) \quad 6.1.15$$

y la densidad de energía cinética queda:

$$U(x,t) = c_c \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]^2 = U_1 + U_2 + U_3 \quad 6.1.16$$

con:

$$U_1 = 2c_c \bar{\omega}^2 A^2 \text{sen}^2(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \cos^2(\Delta\omega t - \Delta kx) \quad 6.1.17$$

$$U_2 = c_c \bar{\omega} \Delta\omega A^2 \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) \text{sen}(\Delta\omega t - \Delta kx) \quad 6.1.18$$

$$U_3 = 2c_c \Delta\omega^2 A^2 \cos^2(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \text{sen}^2(\Delta\omega t - \Delta kx) \quad 6.1.19$$

Términos similares aparecen con la derivada espacial, cambiando  $\bar{\omega}$  por  $\bar{k}$ ,  $\Delta\omega$  por  $\Delta k$  y  $c_c$  por  $c_p$ .

En la figura 6.1.1 se graficaron estos tres términos para una frecuencia portadora 30 veces mayor que la semisuma. Se puede observar que el término que domina es el primero, siendo además el segundo de valor medio nulo y el tercero menor en la relación cuadrada de la diferencia de frecuencia sobre la frecuencia media (en el ejemplo es 900 veces menor). Todos estos términos están modulados y la envolvente avanza a la velocidad  $v_b$  de la moduladora.

Si analizamos el término dominante  $U_1$  para ambas contribuciones (cinética y potencial), vemos que oscila muy rápidamente en el tiempo al doble de la frecuencia portadora y si calculamos su valor medio temporal sobre un período de la portadora, el término rápidamente oscilante por estar al cuadrado promedia a  $1/2$ , quedando:

$$\langle U_1 \rangle_T = A^2 (c_c \bar{\omega}^2 + c_p \bar{k}^2) \cos^2(\Delta\omega t - \Delta kx) = 2A^2 c_c \bar{\omega}^2 \cos^2(\Delta\omega t - \Delta kx) \quad 6.1.20$$

por ser

$$c_p = c_c v_f^2 \quad 6.1.21$$

En el caso particular de la ecuación de ondas clásica, como la velocidad de la moduladora es igual a la velocidad de fase, la energía viaja a dicha velocidad. En otras ecuaciones de ondas, la energía no viaja a la velocidad de fase.

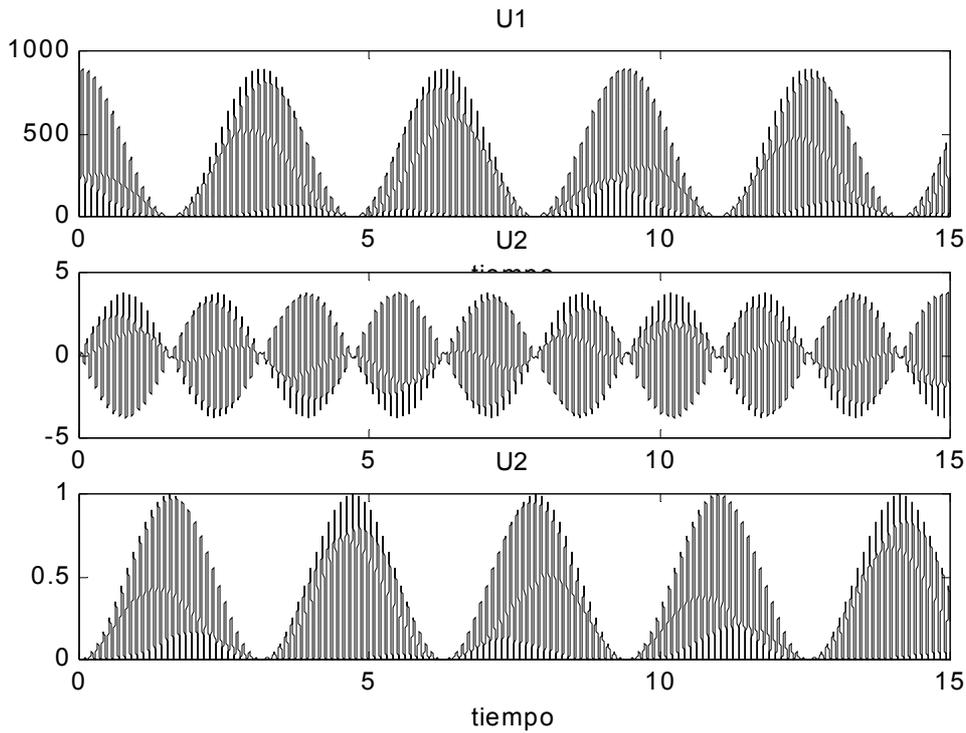


Fig.6.1.2: tres términos de energía del batido de dos ondas con  $\bar{\omega} = 30\Delta\omega$ . El aspecto distinto de cada pico se debe a la impresora (que no es continua, sino a puntos discretos), no es parte de la onda.

### 6.2. Paquetes periódicos

Hemos visto que dos ondas sinusoidales que difieren en su frecuencia en una cantidad relativamente pequeña dan lugar a un batido periódico a la frecuencia y la propagación puede ser descrita como la de una onda portadora a la frecuencia media que es modulada por una amplitud variable en el tiempo que viaja a una velocidad distinta. Analizaremos ahora un caso un poco más complejo en el que se superponen N ondas sinusoidales que viajan a la derecha de distinta amplitud y fase equiespaciadas en frecuencia.

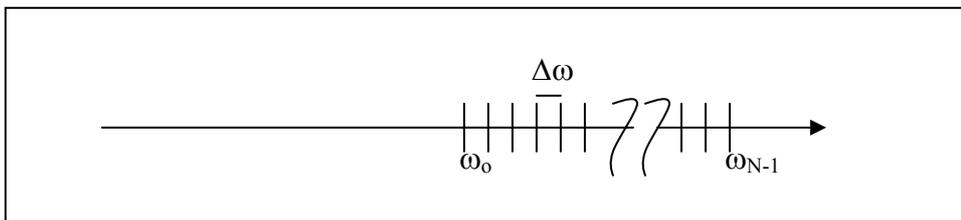


Fig. 6.2.1 Frecuencias equiespaciadas con que se construye la superposición.

En la figura 6.2.1 se ilustra la posición de las N componentes de frecuencia que contribuyen a la onda, éstas son:

$$\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega \tag{6.2.1}$$

con n entero que se extiende desde n=0 hasta n=N-1. La onda que se propaga a derecha queda:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{i(\omega_n t - k_n x)} + cc \tag{6.2.2}$$

que al igual que hicimos para el batido, podemos evaluar primero en  $x=0$ , para luego ver que ocurre al propagarse:

$$\psi(x=0,t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{i(\omega_n t)} + cc = e^{i\omega_o t} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{i(n\Delta\omega t)} + cc \quad 6.2.3$$

Donde al sacar el factor común quedó expresada como una portadora a frecuencia  $\omega_o$ , multiplicada por una moduladora o envolvente (el término de la sumatoria) que depende del tiempo. Esta separación entre portadora y moduladora tiene sentido si se cumple que:

$$N\Delta\omega \ll \omega_o \quad 6.2.4$$

Podemos observar que todos los términos de la envolvente son periódicos de periodo  $T$  dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad 6.2.5$$

En efecto si evaluamos la función de onda luego de transcurrido un período a partir de cualquier instante  $t$ :

$$\psi(x=0,t+T) = e^{i\omega_o(t+T)} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{in\Delta\omega(t+T)} + cc \quad 6.2.6$$

y usando 6.2.5 queda:

$$\psi(x=0,t+T) = e^{i\omega_o t} e^{i\omega_o T} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{in\Delta\omega t} + cc \quad 6.2.7$$

que difiere de 6.2.3 en la fase de la portadora. Queda pues la forma general:

$$\psi(t) = f(t) e^{i\omega_o t} + cc \quad 6.2.8$$

En la figura 6.2.2 se grafica una forma de envolvente posible de periodo  $T$ , a la que falta multiplicar por la portadora para obtener la función de onda completa.

Deseamos ahora ver como viaja este paquete de ondas. Para ello y en virtud de la relación 6.2.4 desarrollamos la relación de dispersión al orden más bajo:

$$k_n = k(\omega_n) = k(\omega_o) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_o} n\Delta\omega + \dots \cong k_o + k' n\Delta\omega \quad 6.2.9$$

que en 6.2.2 y repitiendo el procedimiento anterior da:

$$\psi(x,t) = e^{i(\omega_o t - k_o x)} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{in\Delta\omega(t - k' x)} + cc = e^{i(\omega_o t - k_o x)} f(t - k' x) + cc \quad 6.2.10$$

por lo que en cualquier punto  $x$  se obtiene la misma envolvente retrasada un tiempo  $k' x$ , por lo que la velocidad de la envolvente, que denominamos velocidad de grupo  $v_g$  resulta:

$$v_g = \frac{1}{k'} = \frac{d\omega}{dk} \quad 6.2.11$$

Notemos que la forma del pulso que viaja no se distorsiona y a lo suma cambia la fase de la portadora, que no viaja a la misma velocidad. Si se calcula la envolvente para el caso de la figura 6.2.2 en otra posición  $x$ , se verá la misma figura periódica repetida con un retraso temporal  $t_r = k' x$ . Esta conclusión vale en la medida que la aproximación 6.2.9 basada en la relación 6.2.4 sea adecuada. Si los términos de orden superior se hacen importantes, y esto depende también de la distancia que viajó la onda, el pulso se distorsiona. Salvo en el caso en que los términos superiores no existan, que ocurre para la ecuación de ondas clásica, en que el paquete de ondas viaja sin distorsionarse.

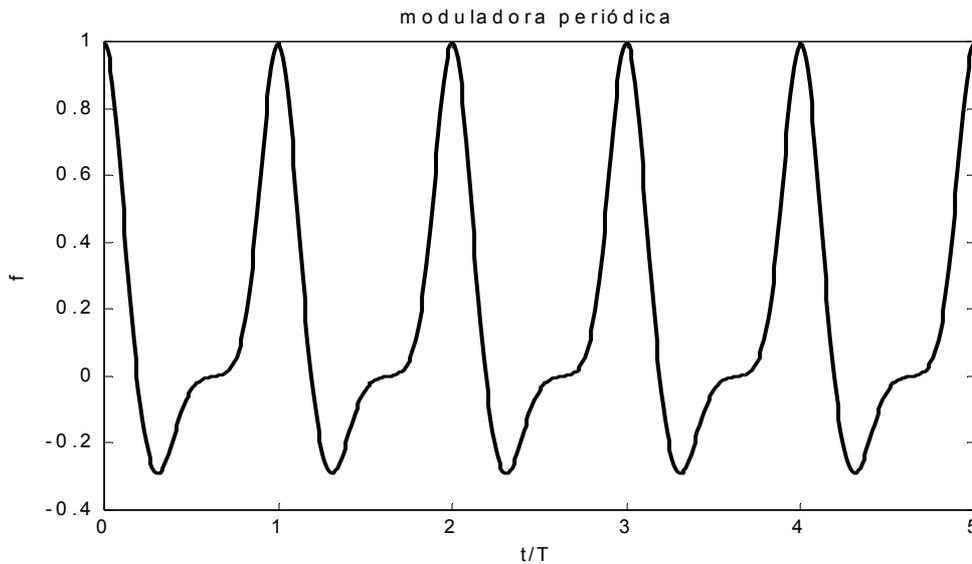


Fig. 6.2.2 Una posible moduladora periódica

### 6.3. Energía del paquete.

Analizaremos un caso particular sencillo para luego discutir sobre la propagación de la energía y algunos detalles más sobre estos paquetes de ondas. El caso particular es el de  $N$  ondas sinusoidales equiespaciadas en frecuencia y de igual amplitud  $A$ :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{i\Delta\omega t n} = A \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{i\Delta\omega t} \right)^n \quad 6.3.1$$

Esta sumatoria puede resolverse explícitamente a partir de la identidad:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{q^N - 1}{q - 1} \quad 6.3.2$$

con lo que se obtiene:

$$f(t) = A \frac{e^{iN\Delta\omega t} - 1}{e^{i\Delta\omega t} - 1} \quad 6.3.3$$

que podemos reagrupar de manera más simétrica extrayendo la fase promedio como factor común de la siguiente manera:

$$f(t) = A \left( \frac{e^{iN\Delta\omega t / 2}}{e^{i\Delta\omega t / 2}} \right) \left( \frac{e^{iN\Delta\omega t / 2} - e^{-iN\Delta\omega t / 2}}{e^{i\Delta\omega t / 2} - e^{-i\Delta\omega t / 2}} \right) = A e^{i(N-1)\Delta\omega t / 2} \frac{\text{sen}(N\Delta\omega t / 2)}{\text{sen}(\Delta\omega t / 2)}$$

6.3.4

Si ahora escribimos la función de onda completa, al término de fase extraído como factor común se lo puede incorporar a la portadora quedando:

$$\psi(x=0, t) = e^{i[\omega_0 + (N-1)\Delta\omega / 2]t} \frac{\text{sen}(N\Delta\omega t / 2)}{\text{sen}(\Delta\omega t / 2)} \quad 6.3.5$$

La portadora ahora está oscilando a la frecuencia media entre la primera ( $\omega_0$ ) y la última ( $\omega_0 + N\Delta\omega$ ). Ante este cambio en la elección de la portadora cabe la siguiente reflexión: la partición entre portadora y moduladora es arbitraria y tiene un sentido práctico de

poder analizar la propagación de manera sencilla, para lo cual es conveniente que la portadora sea alguna frecuencia cercana a la promedio (ver ejercicio 12).

La envolvente es la función:

$$f(t) = \frac{\text{sen}(\pi Nt / T)}{\text{sen}(\pi t / T)} \tag{6.3.6}$$

que es graficada en la figura 6.3.1 para el caso  $N=5$  y  $N=11$ .

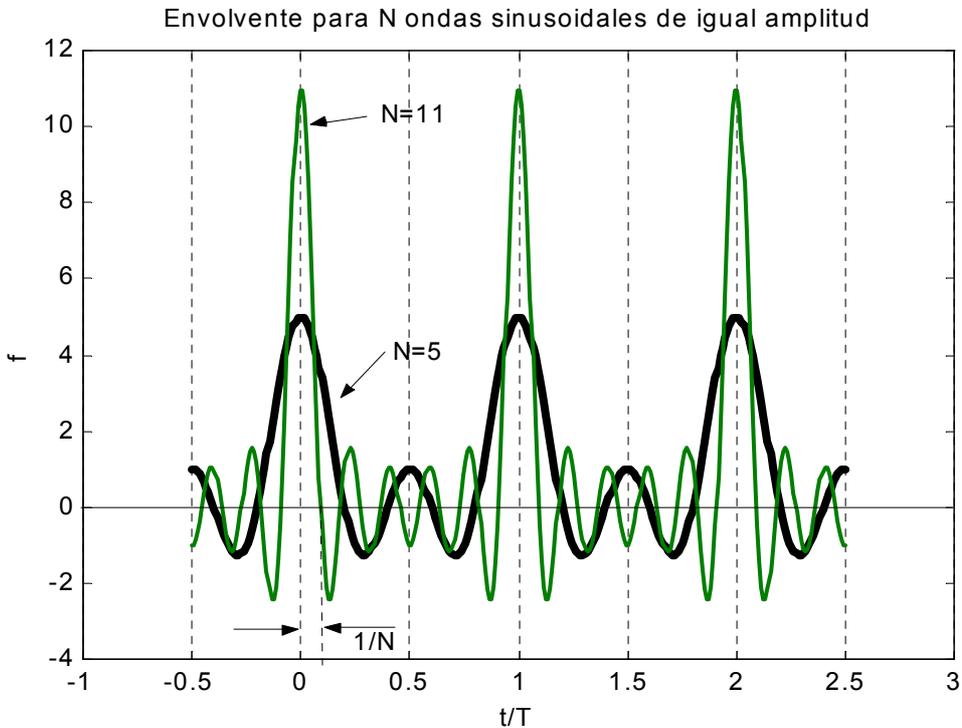


Figura 6.3.1: superposición de N ondas sinusoidales de igual amplitud.

Se puede observar que a mayor número de ondas superpuestas el pico de la función de onda es mayor, lo cual es esperable, ya que cuando todas las frecuencias suman en fase la amplitud será igual a N veces la amplitud de una de ellas. Se ve que una tiene un máximo de 11 y la otra de 5. Asimismo se observa que a mayor número de ondas, más angosto es el pico. Estos dos resultados los podemos analizar analíticamente observando la expresión 6.3.6. El máximo se obtiene cuando el denominador se hace cero, momento en que también es nulo el numerador, por lo que es necesario tomar el límite. En el límite para  $t$  muy pequeño (mucho menor que  $T$ ) se puede hacer la aproximación lineal:

$$f(t) \cong \frac{\pi Nt / T}{\pi t / T} = N \tag{6.3.7}$$

y este límite se repite para los otros máximos, que ocurren en

$$t = mT \tag{6.3.8}$$

a menos de un signo, ya que para  $N$  par el signo de la función va alternando para 6.3.8. La envolvente así escrita es periódica con período  $2T$ .

El ancho de todos los picos será igual por ser periódica. Calculemos la posición del primer cero, que es cuando se anula el numerador lo mas cerca del origen:

$$\frac{\pi Nt}{T} = \pi \Rightarrow t = \frac{T}{N} \tag{6.3.9}$$

lo cual nos confirma lo ya observado, a mayor número de componentes, más angosto es el pulso.

Puesta en término de la frecuencia portadora, el ancho de la envolvente es:

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} \gg \frac{2\pi}{\omega_0} \quad 6.3.10$$

que nos indica que la duración de la envolvente, en la aproximación usada, es mucho mayor que el período de la portadora. Dentro del pico de la envolvente la onda oscila muchas veces. A esta aproximación se la denomina por eso aproximación de envolvente lenta.

Si calculamos la densidad de energía de esta onda, debemos encontrar la derivada temporal al cuadrado. Para ello escribimos la onda como el producto de la envolvente por la portadora:

$$\psi(t) = f(t)\cos(\bar{\omega}t) \quad 6.3.11$$

y calculamos la derivada temporal al cuadrado:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = (-\bar{\omega}f\text{sen}(\bar{\omega}t) + f'\cos(\bar{\omega}t))^2 \quad 6.3.12$$

y la derivada temporal de la envolvente es del orden de magnitud de su valor máximo dividido su ancho, o sea:

$$f'_{\max} \approx \frac{fN}{T} = \frac{fN\Delta\omega}{2\pi} \ll \bar{\omega}f \quad 6.3.13$$

Lo mismo vale para el término de energía potencial proporcional a la derivada espacial, por lo que el término dominante en la energía es el proporcional a la frecuencia media, quedando la densidad de energía como:

$$U(x=0,t) = c_c \left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]^2 \cong \bar{\omega}^2 f^2 \text{sen}^2(\bar{\omega}t) \quad 6.3.14$$

y la propagación de este término da en todo punto del espacio:

$$U(x,t) \cong c_c \bar{\omega}^2 f^2 (t - x/v_g) \text{sen}^2(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \quad 6.3.15$$

y si promediamos sobre un período de oscilación de la portadora:

$$\langle U(x,t) \rangle_t \cong \frac{1}{2} c_c \bar{\omega}^2 f^2 (t - x/v_g) \quad 6.3.16$$

En la figura 6.3.2 se ilustra la densidad de energía para los dos casos en que se graficó la moduladora en la figura 6.3.1. Se ve la relación 121/25 entre los picos, con un ancho 5/11 menor para el caso de mayor número de componentes. Hay que tener en cuenta que todas las componentes tienen igual amplitud, por lo que el paquete con más componentes transporta más energía. Por eso su pico de densidad crece más que su angostamiento (no se conserva el área que sería la energía total).

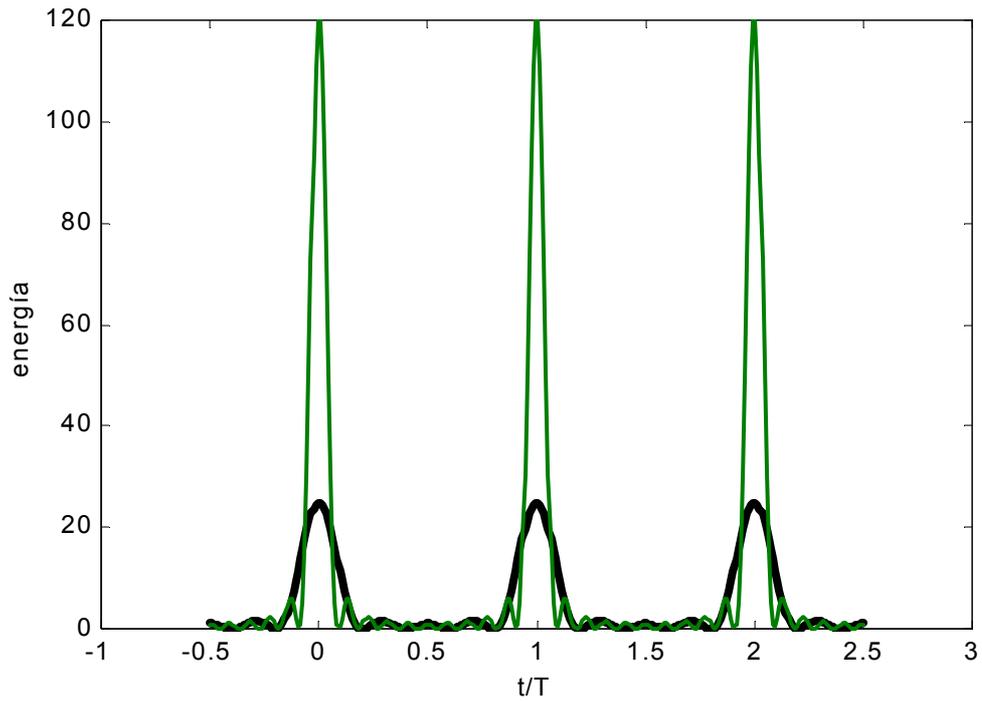


Fig. 6.3.2 Densidad de energía en el caso de la figura 6.3.1

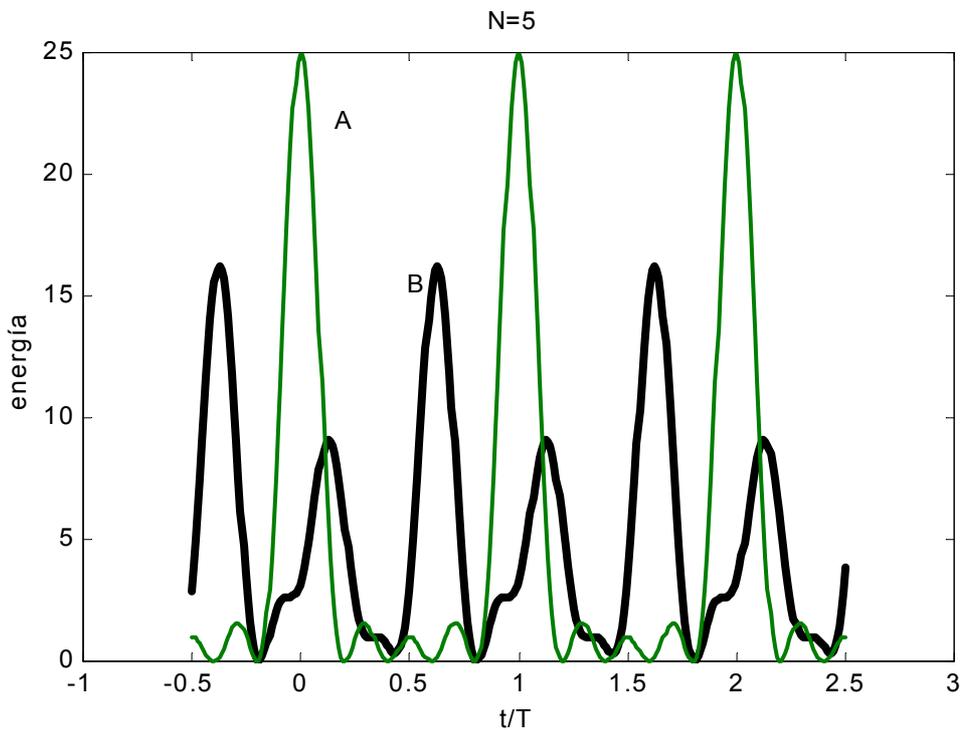


Figura 6.3.3 Superposición de 5 ondas sinusoidales con distinta relación de fase. A) todas en fase. B) fases arbitrarias  $\varphi_1=0, \varphi_2=1, \varphi_3=5, \varphi_4=6, \varphi_5=3$ .

En la figura 6.3.3 se muestra el término  $f^2$  para la superposición de cinco ondas en el caso en que están todas en fase y cuando se eligió una fase arbitraria para cada componente. Se observa que el valor más alto de la energía se obtiene cuando todas

están en fase, ya que allí suman el máximo valor posible que es la suma de los módulos. Es ahí que la energía toma un valor pico  $N^2$  veces el valor de cada componente, y el ancho es mínimo, ya que el área bajo la curva es la energía total, que debe conservarse al superponer. O sea que si la energía total es  $N$  veces la de cada componente y la altura de la función es  $N^2$  veces la de cada una, es razonable que la duración de la función sea en el caso en que están en fase  $N$  veces menor al período, de modo de conservar el área (o sea la energía). Si las componentes no suman en fase, la altura máxima es menor (los vectores no están alineados en el espacio complejo) y por lo tanto para mantener el área la duración será mayor. Esto se puede expresar matemáticamente poniendo una desigualdad en 6.3.9, que corresponde al pulso más corto posible:

$$\Delta t \geq \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} \quad 6.3.17$$

donde  $\Delta t$  es la duración del pulso (ancho de la envolvente) y  $N\Delta\omega$  es el ancho total que ocupan las frecuencias utilizadas para formar el pulso. Lo podemos escribir de manera más sencilla como:

$$\Delta t \Delta\nu \geq 1 \quad 6.3.18$$

donde  $\Delta\nu$  es el ancho total en frecuencias utilizadas:

$$\Delta\nu = \frac{N\Delta\omega}{2\pi} \quad 6.3.19$$

La expresión 6.3.18 es una relación fundamental en la mecánica ondulatoria y expresa que si deseo reducir la duración de un pulso ondulatorio necesariamente debo agrandar el ancho espectral que utilizo para construirlo. En la mecánica cuántica toma el nombre de principio de incertidumbre.

#### **6.4. El problema inverso: Fourier.**

Hemos visto que si la función de onda en un punto dado del espacio es escrita como superposición de oscilaciones sinusoidales a distintas frecuencias, como se conoce la propagación de cada onda sinusoidal a partir de la relación de dispersión, se puede calcular la propagación de toda la onda a cualquier punto arbitrario. El problema ahora es obtener la descomposición de una forma de onda arbitraria en sus componentes sinusoidales.

Como buscamos desarrollar una función real, la expresamos como:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{i2\pi n t / T} + cc \quad 6.4.1$$

donde la función  $f(t)$  así expresada es necesariamente periódica (de período  $T$ ) y real. La pregunta es si cualquier función podrá ser expresada de esta manera, y la respuesta detallada la dejamos para los cursos de matemáticas. Aceptaremos que es así al menos para funciones continuas (podemos aceptar un conjunto finito de discontinuidades). Si la función que queremos desarrollar no es periódica, la podemos hacer periódica con tal de tomar  $T$  suficientemente grande como para que todo el intervalo de interés físico nos caiga dentro de un mismo período (por ejemplo el intervalo en que la función es no nula).

Tenemos entonces la función desarrollada como combinación compleja (los  $C_n$  son complejos) de funciones de la forma:

$$f_n = e^{i\omega_o nt} \quad 6.4.2$$

con  $n$  entero (ya que la parte compleja conjugada tiene valores de  $n$  negativos). Si estas  $f_n$  forman una base ortogonal, tenemos que poder usar un truco similar al utilizado para desarrollar en modos normales, que era multiplicar por un elemento de la base e integrar. Calculemos la integral:

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f_n f_m dt = \int_{t_o}^{t_o+T} e^{i\omega_o nt} e^{i\omega_o mt} dt = \int_{t_o}^{t_o+T} e^{i\omega_o (n+m)t} dt \quad 6.4.3$$

que en el caso particular en que  $n+m=0$  da:

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f_n f_{-n} dt = \int_{t_o}^{t_o+T} dt = T \quad 6.4.4$$

y para otros valores es:

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f_n f_m dt = \int_{t_o}^{t_o+T} e^{i\omega_o (n+m)t} dt = \frac{1}{i\omega_o (n+m)} \left( e^{i\omega_o (n+m)(t_o+T)} - e^{i\omega_o (n+m)t_o} \right) \quad 6.4.5$$

que reagrupando y usando que

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} \quad 6.4.6$$

da como resultado:

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f_n f_m dt = \frac{e^{i\omega_o (n+m)t_o}}{i\omega_o (n+m)} \left( e^{i2\pi(n+m)} - 1 \right) = 0 \quad \text{si } n+m \neq 0 \quad 6.4.7$$

Por lo tanto para extraer el coeficiente  $C_m$  de  $f_m$  en la expresión 6.4.1 debemos multiplicar ambos miembros por  $f_{-m}$  e integrar, con lo que todos los términos de la suma una vez integrados darán cero salvo el término  $m$ -ésimo, quedando:

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f(t) e^{-i\omega_o mt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T \delta_{nm} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* T \delta_{n,-m} = C_m T \quad \text{para } m>0 \quad 6.4.8$$

y para  $m=0$  quedan ambos términos,  $C_0$  y su conjugado:

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T \delta_{n0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* T \delta_{n,0} = 2C_0 T \quad 6.4.9$$

por lo que los coeficientes se obtienen como:

$$C_0 = \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad 6.4.10$$

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_0 m t} dt \quad 6.4.11$$

donde cabe notar que por ser  $f$  real:

$$C_{-m} = C_m^* \quad 6.4.12$$

Cabe notar que en la bibliografía el desarrollo 6.4.1 aparece a veces escrito con otra apariencia, y para ello basta manipular un poco la notación:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{i\omega_0 n t} + cc = 2C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\omega_0 n t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-i\omega_0 n t} \quad 6.4.13$$

que puede ser reagrupado en una única sumatoria como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n' e^{i\omega_0 n t} \quad 6.4.14$$

con una única expresión para los  $C_n'$ , dada por 6.4.11 y que vale aún si  $f$  no es real.

También es posible en el caso de funciones reales re-escribir el desarrollo en término de senos y cosenos, simplemente desarrollando las exponenciales:

$$\begin{aligned} C_n e^{i\omega_0 n t} + cc &= \frac{(B_n - iA_n)}{2} [\cos(\omega_0 n t) + i \operatorname{sen}(\omega_0 n t)] + cc \\ &= B_n \cos(\omega_0 n t) + A_n \operatorname{sen}(\omega_0 n t) \end{aligned} \quad 6.4.15$$

donde hemos escrito

$$C_n = \frac{B_n - iA_n}{2} \quad 6.4.16$$

o lo que es equivalente:

$$A_n = -2 \operatorname{Im}[C_n] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \operatorname{sen}(\omega_0 n t) dt \quad 6.4.17$$

$$B_n = 2 \operatorname{Re}[C_n] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(\omega_0 n t) dt \quad 6.4.18$$

$$B_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad 6.4.19$$

y la función queda desarrollada como:

$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(\omega_0 n t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{cos}(\omega_0 n t) \quad 6.4.20$$

Estos desarrollos alternativos 6.4.1, 6.4.14 o 6.4.20 se los conoce como desarrollo en serie de Fourier, y los coeficientes se obtienen a partir de las expresiones 6.4.11 o 6.4.17 a 19.

Este desarrollo tiene muchas propiedades relevantes que iremos explorando y explotando a medida que lo vallamos utilizando. Es importante remarcar que su primera ventaja es que si conozco el desarrollo de la condición de borde en serie de Fourier puedo rápidamente componer la evolución de la onda en todo el espacio. Esto es gracias a la simetría espacial de la ecuación de ondas, que es invariante ante traslaciones, dando así como resultado que una perturbación temporalmente sinusoidal avanza como una onda sinusoidal de número de onda dado por la relación de dispersión.

Otro hecho importante es que es posible físicamente separar la onda en sus componentes de Fourier, o sea que no es solamente un artilugio matemático útil, sino una descomposición físicamente posible que discutiremos en los capítulos siguientes.

**Guía 6**

1.- a) Determine cuáles de las siguientes expresiones matemáticas satisfacen la ecuación de ondas clásica:

i)  $\Psi(z,t) = A \exp[-\lambda(ax-bt)^2]$ ,  $\lambda \in \wedge$

ii)  $\Psi(z,t) = A(z+vt)$

iii)  $\Psi(z,t) = A \text{sen}(az+bt)$

iv)  $\Psi(z,t) = A \text{sen}(ax^2-bt^2)$

b) Demuestre que cualquier función de la forma  $f(z \pm vt)$  es solución de la ecuación de ondas clásica.

2.- a) Demuestre que la suma de dos ondas armónicas que se propagan en la dirección  $+z$ :  $A_1 = \cos(\omega t - kz + \phi_1)$  y  $A_2 = \cos(\omega t - kz + \phi_2)$  y que tienen la misma frecuencia  $\omega$ , es una onda armónica de propagación del mismo tipo. Esto es la suma puede escribirse en la forma  $A = \cos(\omega t - kz + \phi)$ . Encuentre cómo están relacionados  $A$  y  $\phi$  con  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Resuélvalo también en notación compleja y compare ambos resultados.

b) Calcule la superposición de dos ondas armónicas  $A_1 = \cos(\omega_1 t - k_1 z + \phi_1)$  y  $A_2 = \cos(\omega_2 t - k_2 z + \phi_2)$  que se propagan en la dirección  $+z$ . Sepárelas en una portadora a frecuencia promedio multiplicada por la envolvente. Verifique que si las frecuencias son iguales o las amplitudes lo son recupera resultados anteriores.

c) Encuentre el módulo al cuadrado de la envolvente y muestre que evoluciona en el tiempo o en el espacio siguiendo una elipse en el plano complejo. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos?.

d) ¿cómo se propaga la energía de esa superposición?

3.- Se superponen una onda de frecuencia  $\omega_0$  de amplitud  $A$  con otras dos de frecuencias corridas en  $\pm \Delta\omega$  de amplitud iguales  $B$ .

a) Calcule la envolvente de esta superposición en el origen.

b) Calcule la envolvente de la onda propagada suponiendo que  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Discuta que pasa si no vale esta aproximación.

4.- calcule la velocidad de fase y de grupo para la ecuación de Klein-Gordon.

5.- Se encuentra a partir de un modelo\* que las ondas superficiales en un líquido satisfacen la siguiente relación de dispersión:

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{T}{\rho} k^3 \right) \left[ \frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}} \right]$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $T$  es la tensión superficial (aproximadamente 72 dinas/cm para el agua),  $\rho$  es la densidad del líquido y  $h$  es la profundidad.

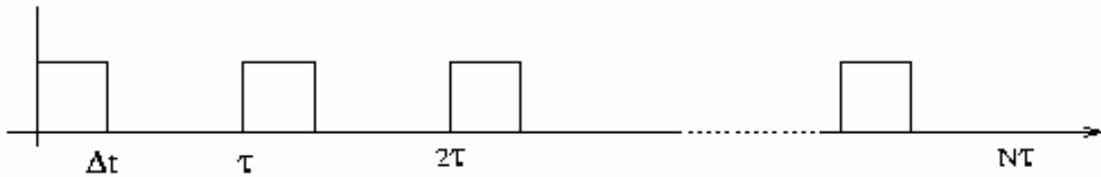
a) encuentre la relación de dispersión en el límite de aguas muy profundas ( $h \gg \lambda$ ) y en el opuesto de aguas poco profundas. Discuta en que rango de frecuencias y profundidades vale cada aproximación.

b) Encuentre las velocidades de fase y de grupo en ambos límites.

c) Se realiza un experimento de propagación de ondas en que se golpea periódicamente la superficie del agua. Discuta que se observa en cada caso.

\*ver libro Ondas de Crawford, cap. 7

6.- Calcule y grafique el módulo y la fase de  $C_n$  (coeficientes del desarrollo en serie de Fourier) de la función periódica:



Para: a)  $\tau=T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$ . b)  $\tau=10T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$  .c)  $\tau=100T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$ . D)  $\tau=10T_1$  y  $\Delta t=\tau_1$ . Indique una estimación del ancho del espectro de frecuencias para cada caso.

7.- Repita el problema anterior para:



7.- Calcule como cambia  $C_n$  en los problemas anteriores (6 y 7) si se corre la función en una cantidad  $t_0$  hacia la derecha.

8.-¿Cómo cambia la función del tiempo si en los casos de los problemas 6 y 7 se agrega una fase lineal con la frecuencia  $\phi(\omega)=\alpha\omega$  a cada componente  $C_n(\omega_n)$ ?

9.- Si se toma la función de los problemas 6 y 7 como moduladoras o envolventes y se las multiplica por una portadora  $\exp(i\omega_0 t)$  (fase lineal con el tiempo),

- a) ¿cómo quedan los nuevos coeficientes de la serie de Fourier. Hacer un gráfico cualitativo.
- b) Si dicha perturbación se propaga a derecha con una relación de dispersión  $\omega=ck$ , hallar  $\psi(t,z)$ .
- c) idem b, si  $\omega=ak+b$ . ¿A qué velocidad se propaga la portadora y a cuál la envolvente?

10.- Hallar la función del tiempo que tiene como coeficientes de Fourier  $C_n= C$  (constante) para  $n=M$  hasta  $M+N$  ( $M \gg N$ ). Dar el valor de la frecuencia portadora.

Estimar su ancho temporal

Repetir los puntos b y c del problema anterior.

11.- Demuestre la siguiente igualdad

$$\int_0^{\lambda} e^{inkx} e^{imkx} dx = \lambda \delta_{nm}$$

donde  $n$  y  $m$  son enteros distintos de cero y  $\delta_{nm}$  es la delta de Krönecker.

12.- Grafique por medio de una computadora la moduladora resultante de superponer 11 ondas de igual amplitud equiespaciadas, si la portadora se toma como la frecuencia más baja, la más alta o la media. Discuta la relevancia de las diferencias y como dependen del ancho de banda relativo (relación entre  $\Delta\omega$  y  $\omega$ ).



**¿La estética de la simetría proviene de la economía de recursos necesaria para describirla?**

## Capítulo 7

### ONDAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Hasta ahora analizamos sistemas con una única dirección de propagación, tales como sogas, sistemas mecánicos acoplados, o sistemas tridimensionales en que definimos una dirección particular (luz, sonido, etc.). Intentaremos estudiar ahora sistemas de dos o tres dimensiones (es decir dos o tres direcciones independientes posibles de propagación). Nos restringiremos a sistemas isótropos, es decir que no tienen direcciones preferenciales (y por lo tanto homogéneos, ya que cualquier inhomogeneidad implica una dirección de máxima variación).

Analizaremos primero un sistema particular de masas acopladas por resortes en una red bidimensional, a fin de mostrar como se generaliza la ecuación de ondas a dos dimensiones (y luego a tres), y presentar la notación para el límite al continuo. Estudiaremos luego las soluciones a las ecuaciones de ondas en término de ondas de propagación. Para ello analizaremos en primer lugar la ecuación de onda clásica, y las soluciones en ondas planas (que son la generalización inmediata de la solución armónica en una dimensión). Se presentara luego otras ecuaciones de ondas para las que las ondas planas también son soluciones, tales como la ecuación de Klein Gordon y la ecuación para ondas electromagnéticas en medios dieléctricos lineales lejos de las resonancias (medios transparentes dispersivos). Se introducirán luego otras soluciones de alta simetría (ondas esféricas y cilíndricas) originadas por fuentes puntuales o lineales. A partir de estas soluciones se analizará el límite de ángulo pequeño (aproximación paraxial) y sistemas formadores de imagen (lentes y espejos).

#### **7.1. Caso de estudio: Red bidimensional de masas acopladas**

Analizaremos el sistema de masas acopladas de la figura 7.1.1. En cada vértice de la red hay una masa  $M$  acoplada en la dirección  $x$  e  $y$  por resortes de constante  $K$  y separadas una distancia  $a$ . Estudiaremos las oscilaciones transversales (movimientos en dirección  $z$ ) y eludiremos la discusión sobre las condiciones de borde (de cómo sostenemos al sistema). Sea  $\psi_{nm}(t)$  el apartamiento del equilibrio en la dirección vertical de la masa en el nodo  $n, m$  ( $x=na, y=ma$ ). Las fuerzas se analizan en forma similar al caso unidimensional y resultan

$$M \frac{d^2 \psi_{nm}}{dt^2} = T_0 \frac{(\psi_{n+1,m} - 2\psi_{nm} + \psi_{n-1,m})}{a} + T_0 \frac{(\psi_{n,m+1} - 2\psi_{nm} + \psi_{n,m-1})}{a} \quad 7.1.1$$

Con  $T_0 = K(a - a_0)$  y  $a_0$  la longitud de reposo de los resortes. En el segundo término aparecen sumando dos contribuciones: las fuerzas debidas a los desplazamientos relativos de las masas contiguas en el eje  $x$  y a las contiguas según  $y$ . Para pasar al límite al continuo reemplazamos las  $N \times M$  funciones del tiempo  $\psi_{nm}$  por una función  $\psi(x, y, t)$  tal que:

$$\psi_{nm}(t) = \psi(x_n, y_m, t) \quad 7.1.2$$

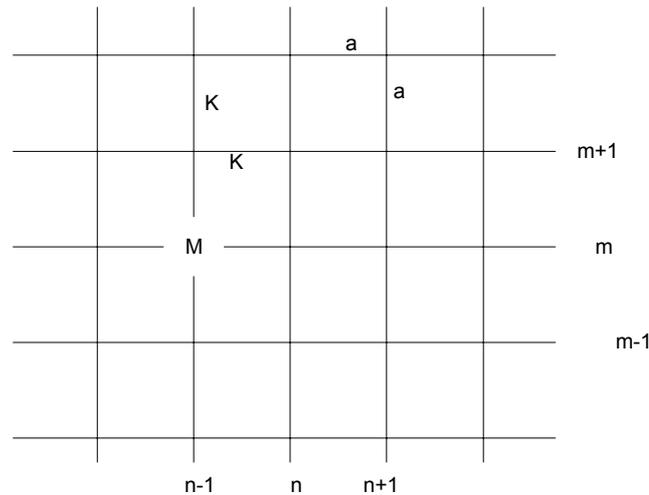


Figura 7.1.1 Red bidimensional

Con lo cual reemplazando en 7.1.1 queda

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0 a}{M} \left[ \frac{\psi(x + a, y, t) - 2\psi(x, y, t) + \psi(x - a, y, t)}{a^2} + \frac{T_0 a}{M} \frac{\psi(x, y + a, t) - 2\psi(x, y, t) + \psi(x, y - a, t)}{a^2} \right] \tag{7.1.3}$$

donde hemos tomado derivada parcial respecto del tiempo por ser la derivada manteniendo las otras variables constante. Notemos que los dos sumandos del segundo término corresponden a cocientes incrementales en que se varía una sola variable.

Definiendo:

$$T_0 a/M = v^2 \tag{7.1.4}$$

En el límite para  $a$  tendiendo a cero (manteniendo  $T_0 a$  constante) queda pues:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \tag{7.1.5}$$

que es la ecuación de ondas clásica en dos dimensiones. Es fácil generalizar esta ecuación a tres dimensiones como

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 \psi \tag{7.1.6}$$

donde  $\nabla^2$  indica la suma de las derivadas segundas respecto de las coordenadas espaciales.

## 7.2. Ondas propagantes

Deseamos buscar las soluciones a esta nueva ecuación de ondas. Comenzaremos por mostrar que las ondas de propagación armónicas ya halladas para sistemas unidimensionales son también soluciones de esta nueva ecuación de ondas. Las soluciones eran:

$$\psi_1(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi) = \text{Re}[A e^{i\phi} e^{i(\omega t - kx)}] \quad 7.2.1$$

con  $\omega = ck$ . Es fácil verificar que 7.2.1 es solución de 7.1.6 pues las derivadas respecto de  $y, z$  son nulas y queda la misma ecuación que en una dimensión. Lo mismo vale para las soluciones:

$$\psi_2(x, y, z, t) = B \cos(\omega t - ky + \phi') = \text{Re}[B e^{i\phi'} e^{i(\omega t - ky)}] \quad 7.2.2$$

$$\psi_3(x, y, z, t) = C \cos(\omega t - kz + \phi'') = \text{Re}[C e^{i\phi''} e^{i(\omega t - kz)}]$$

Para simplificar la notación, de ahora en más escribiremos en notación compleja sin indicar explícitamente que debemos tomar parte real, lo que quedará sobrentendido.

Si buscamos para las soluciones halladas el lugar geométrico de los puntos que tienen igual fase, esto se obtiene planteando la ecuación  $\text{fase} = \text{constante}$ , que por ser una única ecuación en un espacio de tres dimensiones, definirá una superficie. En el caso particular de  $\psi_1$  es:

$$\omega t - kx + \phi = \phi_0 \quad 7.2.3$$

que es la ecuación del plano perpendicular al eje  $x$  y que lo corta en :

$$x = (\phi - \phi_0) / k + (\omega / k)t = x_0 + vt \quad 7.2.4$$

Situaciones similares se encuentran para las soluciones  $\psi_2$  y  $\psi_3$  para los ejes  $y, z$  respectivamente. Las superficies de fase constante avanzan con el tiempo (a la velocidad de fase  $v$ ) y se las denomina frente de onda.

Si la ecuación de ondas describe un medio isótropo deben existir otras soluciones del tipo ondas planas, pero que se propaguen en direcciones arbitrariamente elegidas. Veamos si es así.

Sea  $\vec{n}$  el versor normal al plano del frente de onda. La ecuación del plano que avanza a velocidad  $\vec{v}$ , en la dirección y sentido de  $\vec{n}$  es:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = r_0 + vt \quad 7.2.5$$

que se puede escribir (multiplicando ambos miembros por  $k$ )

$$k\vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi = \text{const.} \quad 7.2.6$$

que será la ecuación para el frente de onda de

$$\Psi_1(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) = (A e^{i\phi}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad 7.2. 7$$

donde al número de onda  $k$ , le asignamos un carácter vectorial definiendo el **vector de onda**

$$\vec{k} = \vec{n}k \quad (k^2 = |\vec{k}|^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}) \quad 7.2. 8$$

Hemos definido pues la función que describe la onda plana en una dirección arbitraria. Falta demostrar que satisface la ecuación de ondas. Para ello es necesario evaluar las correspondientes derivadas parciales, para lo que anotaremos:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad 7.2. 9$$

con lo que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik_x \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi \quad 7.2. 10$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad 7.2. 11$$

y análogamente para las otras derivadas, siendo

$$\nabla^2 \psi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \psi = -k^2 \psi \quad 7.2. 12$$

con lo que se satisface la ecuación de ondas 7.1.6, con la relación de dispersión  $\omega = vk$ .

Esta onda plana obtenida **no** puede ser escrita como combinación de las ondas planas cartesianas dadas en la ecs. 7.2.1 y 7.2.2. Todas son necesarias para poder expresar cualquier solución a la ecuación de ondas como combinación de ondas planas. En efecto, al igual que en el caso unidimensional, se pueden escribir las ondas estacionarias como combinación de dos ondas de igual frecuencia que se propagan en sentidos opuestos ( $\vec{k}$  y  $-\vec{k}$ ). Con cada par de ondas de propagación construimos dos modos normales (ondas estacionarias) independientes (por ejemplo el seno y el coseno),

$$\psi_C = \frac{e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}}{2} = e^{i\omega t} \frac{[e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]}{2} = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) e^{i\omega t} \quad 7.2. 13$$

$$\psi_S = \frac{e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}}{-2i} = e^{i\omega t} \frac{[e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]}{2i} = \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r}) e^{i\omega t}$$

y todas las soluciones posibles se escribirán como combinación de modos normales y por lo tanto de ondas de propagación planas monocromáticas.

Vale la pena remarcar que la descomposición en ondas planas de frecuencia bien definida(monocromáticas) no solo es útil desde el punto de vista del calculo, sino que además es realizable físicamente. Por ejemplo en sistemas mecánicos se pueden colocar filtros que permitan el paso de un grupo de frecuencias tan angosto como deseemos, o haciendo al sistema interactuar con otros sistemas con resonancias muy agudas y midiendo la amplitud de la excitación, o, para el caso de la luz, separando los colores con prismas o redes de difracción.

La ecuación de ondas clásica tiene la particularidad de ser no dispersiva, es decir que todas las frecuencias se propagan a igual velocidad de fase. Esto hace que además de las soluciones armónicas ya halladas, se pueden obtener soluciones de carácter más general de la forma  $f(\vec{n}\cdot\vec{r} - vt)$  en tanto  $f(x)$  sea desarrollable en series o integrales de Fourier. Volveremos sobre este punto luego de estudiar otras ecuaciones de onda.

### **7.3. Otras ecuaciones de ondas: ondas electromagnéticas en materiales** **Ondas en plasmas:**

La ecuación de ondas clásica es solo un ejemplo (el más sencillo) de una gran cantidad de fenómenos físicos que puede ser descrito por funciones de ondas que se propagan siguiendo ecuaciones más o menos parecidas. Analizaremos ahora algunos otros ejemplos y discutiremos las similitudes y diferencias con el ya visto.

Ecuación de Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + v^2 \nabla^2 \psi \quad 7.3.1$$

Es la generalización a tres dimensiones de la ecuación ya deducida para los péndulos acoplados en el límite al continuo. Recordaremos que es el tipo de ecuación que se obtiene cuando las partes del sistema, además de oscilar por el acople con su entorno, tienen una frecuencia propia de oscilación  $\omega_p$ .

Un sistema tridimensional que responde a esta situación es la propagación de ondas electromagnéticas en un *plasma enrarecido* (por ejemplo la ionosfera). Un plasma es un sistema eléctricamente neutro (tantas cargas positivas como negativas) con cargas que se pueden mover libremente, de modo que en equilibrio el campo eléctrico debe ser nulo (pues si el campo es no nulo las cargas se mueven por la acción de la fuerza  $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ ). De hecho esta expresión para la fuerza es la definición del campo eléctrico: una carga en reposo se dice que se encuentra en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  si como consecuencia de su carga en ese punto del espacio está sometida a una fuerza  $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ . Si el campo eléctrico no es nulo, las cargas libres en ese punto se moverán como consecuencia de la presencia de dicho campo. Para lograr el equilibrio las cargas se redistribuirán de modo que el campo electromagnético que ellas generan anulan el campo generado por cualquier carga exterior (apantallan el campo). Si alguna perturbación origina un campo no nulo en alguna región del plasma, las cargas se moverán de modo de apantallarlo (anularlo). El campo eléctrico tiene entonces una “fuerza restauradora” que tiende a devolverlo a su valor de equilibrio (cero). Esta “fuerza restauradora” da lugar a una oscilación del campo eléctrico alrededor de su valor de equilibrio a una frecuencia que es propia del plasma  $\omega_p$ , que depende de la densidad de cargas libres ( $N$ ) (cuando mayor la densidad de cargas libres, más rápidamente se apantalla el campo), su masa ( $m$ ) (cuanto más livianas las cargas, más rápidamente se desplazan para apantallar el campo) y su carga ( $q$ ) (cuanto mayor la carga, mayor el apantallamiento logrado con cada carga), es

$$\omega_p^2 = 4\pi Nq^2 / m \quad 7.3.2$$

El requerimiento de enrarecido corresponde a desprestigiar las colisiones que dan lugar al amortiguamiento, pero hay que tener en cuenta que esta aproximación no es

importante lejos de las resonancias. En general las cargas libres son electrones y las densidades típicas son  $10^4$ - $10^6$  electrones/cm<sup>3</sup> para la ionosfera,  $10^{12}$ - $10^{18}$ e/cm<sup>3</sup> para plasmas de laboratorio (descargas gaseosas),  $10^{16}$ - $10^{20}$ e/cm<sup>3</sup> para semiconductores y  $10^{20}$ - $10^{23}$ e/cm<sup>3</sup> para metales. Calcular como ejercicio las frecuencias de corte correspondientes. ¿En que región del espectro electromagnético caen?

Es fácil demostrar que las ondas planas dadas en la ecuación 7.2.7 son soluciones de la ecuación 7.3.1. La relación de dispersión queda para frecuencias mayores que la del plasma (demostrarlo):

$$\omega^2 = \omega_p^2 + v^2 k^2 \quad 7.3.3$$

mientras que a frecuencias menores las ondas son exponenciales y se produce la reflexión total de la onda. El caso es similar al de los péndulos acoplados, son ondas evanescentes que no transportan energía, por lo que toda la energía es reflejada.

A diferencia de la ecuación de ondas clásica, esta ecuación de ondas es dispersiva. Por lo tanto, si bien cualquier solución se puede escribir como superposición de ondas sinusoidales, la velocidad de fase es distinta para las distintas frecuencias. Esto da lugar a que los pulsos se distorsionen y si bien para la ecuación de ondas clásica la función  $\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt)$  es solución (demostrarlo), veamos que ocurre si reemplazamos en la ecuación de Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 f''; \quad \nabla^2 \psi = |\vec{n}|^2 f'' = f'' \quad 7.3.4$$

Por lo que debe ser

$$c^2 f'' = -\omega_p^2 f + v^2 f'' \quad 7.3.5$$

O lo que es lo mismo

$$f'' = f \frac{\omega_p^2}{(c^2 - v^2)} \quad 7.3.6$$

Ecuación diferencial que solo se satisface para ondas sinusoidales o exponenciales según la frecuencia. Ninguna otra forma funcional  $f$  podrá mantener su forma al propagarse.

### **Ondas en medios transparentes**

Consideramos el caso particular de medios materiales isótropos y para el rango de frecuencias en que el medio transparente (lejos de las resonancias). Ejemplos de estos casos para la luz visible son el vidrio, agua, aire y otros gases. En el infrarrojo pueden ser materiales que a simple vista son opacos como semiconductores. Al igual que en el ejemplo de los plasmas, hay cargas positivas y negativas balanceadas, pero las cargas no son libres (están ligadas a un núcleo atómico o a una molécula). La ecuación de ondas se puede deducir a partir de las ecuaciones de Maxwell, pero debido a la presencia de las cargas queda una ecuación de ondas clásica inhomogénea:

$$c^2 \nabla^2 E - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{7.3.7}$$

en la que se ha ignorado el carácter vectorial del campo eléctrico  $E$  como aproximación, y también de  $P$ , denominado Polarización. El término inhomogeneo que contiene el vector  $P$  (y una constante dimensional  $\epsilon_0$ ) es consecuencia del desplazamiento de los electrones respecto de los núcleos positivos. Este desplazamiento se origina por la existencia de un campo eléctrico externo que mueve las cargas positivas en una dirección y las negativas en otra. Dejamos para un curso de electromagnetismo una explicación mas rigurosa y nos limitaremos a dar un modelo sencillo que nos permita entender los aspectos cualitativos relevantes a la propagación de ondas.

Si suponemos que las cargas negativas se desplazan una distancia  $x$  de las positivas, que su carga es  $q$  y la densidad de estos pares (llamados dipolos) es  $N$ , resulta:



Figura 7.3.1

Al apartar las cargas entre si aparecerá una fuerza restauradora característica del par que origina una oscilación propia a una frecuencia  $\omega_0$ , habrá fuerzas disipativas y la fuerza debida al campo eléctrico, con lo que la ecuación de movimiento para la carga queda:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -M\omega_0^2 x - M\Gamma \frac{dx}{dt} + qE(t) \tag{7.3.9}$$

que es la ecuación para un oscilador forzado amortiguado. Si es forzado en forma armónica con  $E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) \cos(\omega t)$ , (donde  $r$  es la posición del dipolo), la solución estacionaria tendrá una componente elástica en fase con el campo y una componente reactiva que despreciamos por estar interesados en frecuencias lejos de la resonancia (zona de transparencia). La amplitud de la componente elástica es proporcional a la fuerza (al campo) y depende de la frecuencia como:

$$x_{el} = \frac{qE_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{7.3.10}$$

con lo que, ante una excitación armónica la polarización queda:

$$P = \frac{Nq^2}{M} \frac{E_0 \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{Nq^2}{M} \frac{E(\vec{r}, t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{7.3.11}$$

Con lo que la polarización  $P$  resulta proporcional al campo eléctrico. La constante de proporcionalidad depende de la frecuencia, por lo que la ecuación de onda da lugar a relaciones dispersivas entre el vector de onda y la frecuencia. Si definimos la susceptibilidad eléctrica del material  $\chi$  (que es una función de  $\omega$ ) como:

$$P = \epsilon_0 \chi(\omega) E \tag{7.3.12}$$

y remplazamos en la ecuación 7.3.7 asumiendo una onda plana, queda la relación de dispersión:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \chi(\omega)] \tag{7.3.13}$$

Para el caso particular en que  $\omega_0=0$ , si remplazamos la ecuación 7.3.11 en la 7.3.7 queda para la relación de dispersión la correspondiente a la ecuación de Klein-Gordon con frecuencia propia la frecuencia del plasma antes definida. Esto es esperable pues  $\omega_0=0$  equivale a no tener fuerzas restauradoras para las cargas, es decir que se pueden mover libremente. En la situación más general habrá más de una frecuencia de resonancia en el material (varias bandas de absorción). Aparecerán entonces varios términos como el dado en la ecuación 7.3.11, y la relación de dispersión queda de la forma:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \sum_i \frac{A_i}{\omega_i^2 - \omega^2}] \tag{7.3.14}$$

que sigue siendo una aproximación valida lejos de las resonancias. Se suele definir el índice de refracción como

$$n = ck/\omega \tag{7.3.15}$$

que es graficado en la figura 7.3.2 en forma cualitativa. La línea punteada corresponde a la ecuación 7.3.14 y llena a la solución que tiene en cuenta la disipación. La diferencia se manifiesta en la zona cercana a la resonancia, zona en la que además hay que tener en cuenta el término reactivo en la solución al oscilador forzado, por lo que aparecerá una diferencia de fase entre la polarización y el campo eléctrico. En la notación compleja esto se puede representar con un índice de refracción complejo, en que la parte imaginaria describe la absorción.

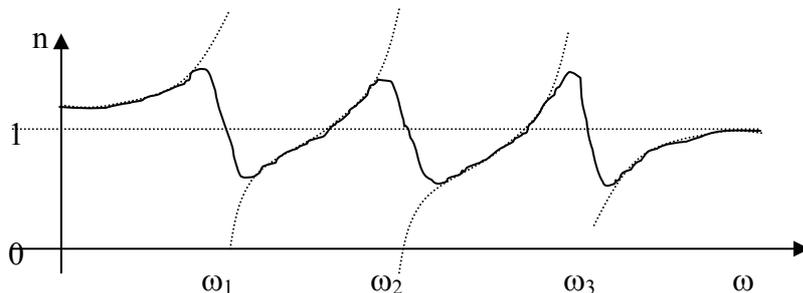


Figura 7.3.2 Índice de refracción en función de la frecuencia, línea punteada: cuando se desprecia la absorción, línea llena, incluyendo la absorción.

### **7.4. Refracción en una superficie plana. Ley de Snell**

Supongamos una onda plana que incide sobre una superficie plana que separa dos medios distintos (por ejemplo luz en aire y vidrio o un cambio de profundidad en una onda superficial en agua). Sin pérdida de generalidad pondremos el eje z

perpendicular a dicha superficie (definida por  $z=0$ ). Asimismo el eje  $x$  lo elegimos tal que el vector de onda  $\vec{k}$  quede en el plano  $xz$  (que llamaremos plano de incidencia). La situación se ilustra en la figura 7.4.1

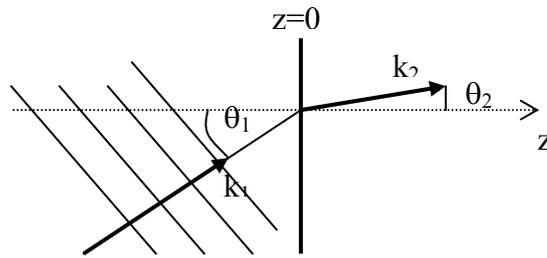


Figura 7.4.1: Refracción en una superficie plana ( $z=0$ ) que separa dos medios con distinto índice de refracción.

Mostraremos ahora que la onda que se propaga por el semiespacio de la derecha, luego del cambio de material, sigue siendo una onda plana, pero con un ángulo de propagación distinto. A este cambio en el ángulo de propagación se lo denomina fenómeno de refracción.

Para ello escribiremos la expresión para una onda plana incidente, la particularizaremos en el plano  $z=0$ , y evaluaremos como debe ser la onda refractada para que coincida con la incidente en la superficie de separación  $z=0$ .

Sea la onda incidente:

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} \quad 7.4.1$$

donde hemos usado que  $k_y=0$ . En  $z=0$  esta onda vale:

$$\psi(x, y, z = 0, t) = Ae^{i(\omega t - k_x x)} \quad 7.4.2$$

Cabe notar que como el módulo de  $k$  está determinado por la frecuencia y la relación de dispersión. Dados  $\omega$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ; queda determinado  $k_z$  a menos de un signo:

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad 7.4.3$$

Por lo tanto solo hay dos ondas que satisfacen 7.4.2, una es 7.4.1, y la otra se propaga hacia la izquierda. Analicemos por un momento esta otra onda. La situación es ilustrada en la figura 7.4.2. La nueva onda se propaga hacia la izquierda con el mismo valor de  $k_x$  y  $k_z$  con signo contrario, o sea que es una onda reflejada en la superficie con el mismo ángulo con que incidió. Que la onda se refleja formando el mismo ángulo con la normal a la superficie es conocida como ley de reflexión especular.

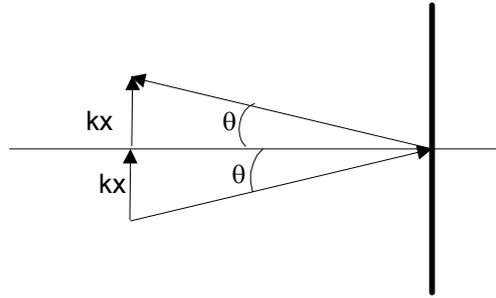


Figura 7.4.2. La onda incidente genera una onda reflejada con el mismo ángulo al de incidencia.

A la derecha de la superficie  $z=0$  la onda diferirá en un coeficiente de transmisión  $t$  con la incidente, que dependerá de las condiciones de borde que la física impone a cada sistema físico (ondas sonoras, electromagnéticas, etc.). Dicho coeficiente no depende de  $x$  e  $y$  ya que ambos medios son supuestos homogéneos. Por lo tanto llamando  $\psi^-$  a la función de onda inmediatamente antes de la superficie, y  $\psi^+$  inmediatamente después (en  $\theta^-$  y  $\theta^+$  respectivamente) queda:

$$\psi^- = \psi(x, y, 0, t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} \quad 7.4.4$$

$$\psi^+ = t\psi^- = Ate^{i(\omega t - k_1 x)} \quad 7.4.5$$

Pero como la onda a la derecha se propaga con vector de onda  $k_2$ , su forma debe ser:

$$\psi^+ = Be^{i(\omega t - k_2 x)} \quad 7.4.6$$

De 7.4.6 y 7.4.5 debe ser

$$k_{1x} = k_{2x} \quad 7.4.7$$

o sea

$$k_1 \text{sen}(\theta_1) = k_2 \text{sen}(\theta_2). \quad 7.4.8$$

Como la frecuencia es la misma para ambos lados (sino no se satisface 7.4.5 para todo  $t$ ), la relación de dispersión fija el valor de  $k_1$  y  $k_2$  a partir del índice de refracción:

$$k_j = n_j \omega / c \quad 7.4.9$$

para  $j=1$  o  $2$ . Con lo que:

$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2).$
--

7.4.10

Que determina el ángulo de refracción en función del de incidencia, conocidos los índices de refracción. Se la conoce como **Ley de Snell**.

Nótese que no hemos hecho uso para su deducción de las condiciones de borde particulares para cada tipo de onda (leyes fundamentales). Solamente hemos usado que existe una solución propagante de cada lado de la superficie de separación y que ambos medios son homogéneos, por lo que la ley vale para todo tipo de ondas.

### 7.5. Ondas esféricas y cilíndricas

Si bien hemos visto que cualquier solución a las ecuaciones de ondas planteadas puede ser hallada como superposición de ondas planas monocromáticas, no siempre esta representación es la que mejor se ajusta a la simetría del problema a tratar. Así por ejemplo, una fuente puntual (como un átomo que emite luz, visto desde lejos, o a la excitación armónica de una de las masas de la red bidimensional) darán en un medio isótropo el mismo campo en todas las direcciones, situación difícil de reconstruir a partir de ondas planas. Por otro lado hemos visto que a una dada frecuencia existen infinitud de soluciones, que son las ondas planas en distintas direcciones. Cuando hay más de una solución a la misma frecuencia (soluciones degeneradas), sabemos que cualquier combinación de ellas también será solución armónica a la misma frecuencia. Por lo tanto buscaremos si existen otras soluciones armónicas que respondan mas adecuadamente a la simetría del problema de fuentes puntuales o lineales.

Para el caso de fuentes puntuales buscamos una solución a la ecuación de ondas en que el frente de onda sea una esfera que crece con el tiempo a la velocidad de fase:

$$\psi(\vec{r}, t) = f(r)e^{i(\omega t - kr)} \quad 7.5.1$$

donde se ha impuesto que la función de onda solo puede depender de la distancia a la fuente  $r$ , pero no de la dirección (buscamos una solución isótropa). La función  $f(r)$  debe elegirse de modo de satisfacer la ecuación de onda. El frente de onda en la ecuación 7.5.1 avanza a velocidad  $v = \omega/k$ . Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad 7.5.2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f' \frac{\partial r}{\partial x} e^{i\phi} + ik \frac{\partial r}{\partial x} f e^{i\phi} \quad 7.5.3$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left\{ f'' \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + f' \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + ik \left[ f \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2f' \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] - k^2 f \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} e^{i\phi} \quad 7.5.4$$

donde  $\phi = \omega t - kr$  y es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad ; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1 - x^2 / r^2}{r} \quad 7.5.5$$

Si reemplazamos las expresiones 7.5.2 a 7.5.5 en la ecuación de ondas 7.1.6 y sabiendo que vale la relación de dispersión  $\omega = vk$ , resulta

$$[2f'/r + f''] + i2k(f' + f/r) = 0 \quad 7.5.6$$

que se satisface si las partes real e imaginaria se anulan. Para la parte imaginaria es

$$df/dr + f/r = 0 \quad 7.5.7$$

que conduce a

$$\frac{df}{f} = -\frac{dr}{r} \quad 7.5.8$$

cuya solución es

$$f=A/r \quad 7.5.9$$

que también satisface que la parte real se anule (verificarlo).  
La solución queda pues

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad 7.5.10$$

y para una onda esférica que converge solo hay que cambiar el signo en  $k$

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t + kr)} \quad 7.5.11$$

Notar que la amplitud decae en forma inversamente proporcional a la distancia. La intensidad de la onda sería proporcional a la amplitud al cuadrado, por lo que decae en forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y por lo tanto al área del frente de onda (superficie de la esfera  $=4\pi r^2$ ). La potencia transportada por la onda permanece constante cualquiera sea el frente de onda considerado. Esto es esperable pues la ecuación de onda utilizada no contiene ningún término disipativo.

Queda como ejercicio verificar que la onda esférica dada por la ecuación 7.5.10 satisface las otras ecuaciones de ondas isótropas presentadas en este libro. Es un resultado esperable ya que siendo las ondas planas una base, la onda esférica debe ser suma de ondas planas de una misma frecuencia, y por lo tanto suma de soluciones de todas las ecuaciones de ondas isótropas (el mismo módulo de  $k$  en todas las direcciones).

Veamos ahora el caso en que la fuente es un hilo recto infinito con todos los puntos emitiendo en fase. La simetría de este problema nos induce a pensar que el frente de ondas debe ser un cilindro. En efecto cualquier par de puntos a la misma distancia del eje debe ver el mismo valor de la función de onda, pues el sistema es invariante tanto ante rotaciones alrededor del eje como a traslaciones a lo largo del mismo. La función de onda propuesta es entonces:

$$\psi = f(\rho) e^{i(\omega t - k\rho)} \quad 7.5.12$$

donde  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , si la fuente es ubicada a lo largo del eje  $z$ .

No hallaremos la solución exacta a la ecuación de onda, sino que nos limitaremos a una aproximación. En función de los resultados para la onda esférica, y dado que el área del cilindro crece linealmente con  $\rho$ , esperamos una solución del tipo

$$\psi = \frac{A}{\rho^{1/2}} e^{i(\omega t - k\rho)} \quad 7.5.13$$

Si reemplazamos 7.5.13 en la ecuación de onda 7.1.6 queda

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\psi}{\rho^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } \rho \rightarrow \infty \quad 7.5.14$$

Es decir que 7.5.13 se parece mas a la solución cuanto mas lejos se esta de la fuente. ¿Cuan lejos es necesario irse? Podemos establecer que si

$$\psi/\rho^2 \ll k^2 \psi \quad 7.5.15$$

el termino sobrante es despreciable frente al  $\nabla^2 \psi$ . Esto vale entonces para

$$\rho \gg \lambda. \quad 7.5.16$$

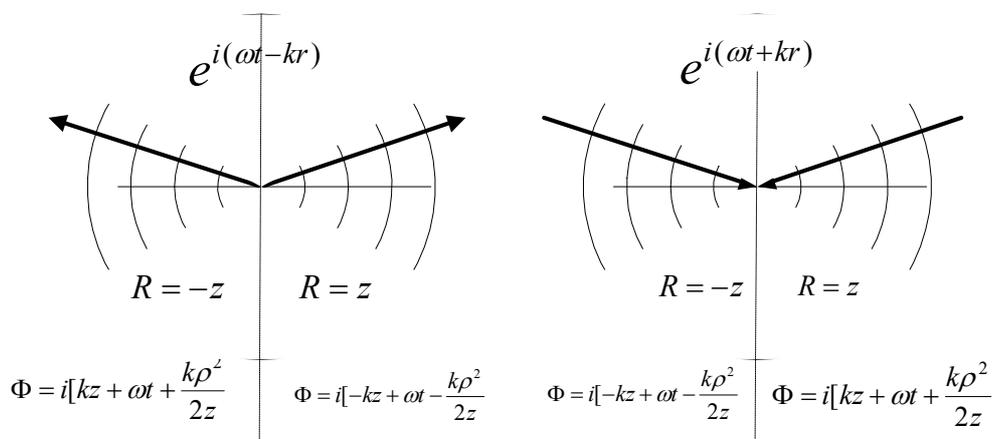
### 7.6. Aproximación paraxial

En muchas aplicaciones en que se estudia la propagación de ondas, interesa hallar la función de onda en puntos cercanos a un eje de referencia. El caso mas común es el del estudio de propagación de la luz en sistemas ópticos. Analicemos el caso de la propagación de ondas esféricas con la fuente o sumidero (desde donde se emite o hacia donde converge) en el origen de coordenadas. Luego analizaremos casos mas generales con fuentes fuera de eje.

En la figura 7.6.1 se muestra el sistema de coordenadas elegido y se analizan los cuatro casos que se pueden presentar: que el punto sea fuente o sumidero que corresponde a  $\phi = \omega t - kr$  o  $\phi = \omega t + kr$  respectivamente, y si analizamos la onda a la izquierda o derecha del origen. Analizamos lo que ocurre cerca del eje z, es decir para

$$x^2 + y^2 \ll z^2 \quad 7.6.1$$

que es nuestra condición de aproximación paraxial



**Figura 7.6.1** Aproximación paraxial para ondas emergentes y convergentes.

Desarrollamos entonces la distancia  $r$  como:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2} = |z| \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2}} \cong |z| + \frac{\rho^2}{2|z|} \quad 7.6.2$$

que en la figura se explicita para cada caso teniendo en cuenta el signo de  $z$ .

Queda pues para una onda que avanza hacia la derecha:

$$\psi \cong \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kz)} e^{-ik\rho^2/2z} \quad 7.6.3$$

y para la onda a izquierda:

$$\psi \cong \frac{A}{r} e^{i(\omega t + kz)} e^{ik\rho^2/2z} \quad 7.6.4$$

Notar que en ambos casos aparece una fase similar a la onda plana y otra cuadrática en  $\rho$ . Esta última la podemos escribir como  $e^{-ik\rho^2/2R}$  donde el signo de  $R$  indica si la onda diverge ( $R > 0$ ) o converge ( $R < 0$ ).

Analicemos ahora el rango de validez de las aproximaciones utilizadas. Por ejemplo para  $z > 0$  es (conservando un orden más)

$$r \cong z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \quad 7.6.5$$

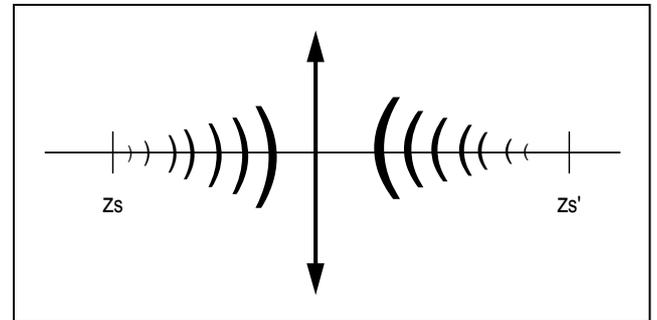
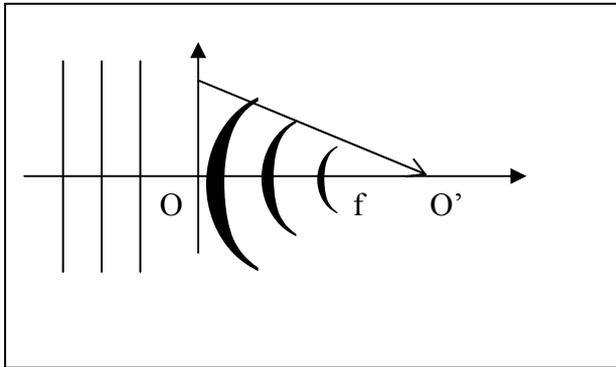
pero  $r$  aparece en un término de fase multiplicado por  $k$ . Cuando realizamos aproximaciones con términos de fase hay que tener presente restricciones adicionales. En efecto si sumamos a una fase que vale  $\phi = 10000\pi$  un término mucho más chico, por ejemplo  $\phi' = \pi$ , el efecto de despreciarlo puede ser catastrófico pues si bien  $\phi' \ll \phi$ , es  $e^{i\pi} = -1$  y la función de onda cambia de signo. Como las sinusoides se repiten cada vuelta, además de pedir que el término despreciado sea mucho menor que el anterior, es necesario pedir que el cambio de fase que introduce sea mucho menor que  $\pi$ . Así, para despreciar el término en  $\rho^4$  es necesario pedir además

$$\frac{k\rho^4}{8z^3} \ll \pi \quad \Leftrightarrow \quad \rho^4 \ll 4\lambda z^3 \quad 7.6.6$$

que pone una condición distinta a pedir que  $\rho^2 \ll z^2$ , pues involucra también a la longitud de onda. Conviene hacerse ejemplos para entender bien la diferencia entre ambas restricciones.

### 7.7. Lentes

Estudiaremos ahora como modificar una fuente de onda dado para que converja a un punto deseado. De ahora en mas seremos mas explícitos en cual es la función de onda, hablamos de luz y por lo tanto usaremos E (campo eléctrico) en lugar de  $\psi$ . Comenzaremos por el caso de una onda plana incidente, ilustrado en la figura 7.7.1-a.



**Figura 7.7.1-a**

La onda incidente es

$$E_1 = Ae^{i(\omega t - kz)} \tag{7.7.1}$$

y deseamos una onda que luego de atravesar una superficie que la modifica ( ubicada en  $z=0$ ) salga como

$$E_2 = \frac{B}{|z'|} e^{i(\omega t - kz')} e^{-ik\rho^2 / 2z'} \tag{7.7.2}$$

con

$$z' = z - f \tag{7.7.3}$$

y  $f$  es la distancia del plano al punto en que converja la onda. Si calculamos tanto la onda incidente como la transmitida en el plano  $z=0$ , el cociente entre ambas debe ser la transmisión necesaria para el plano en cuestión. Es en  $z=0$  ( $z'=-f$ )

$$E_2(z = 0, t) = tE_1(z = 0, t) = \frac{B}{f} e^{i\omega t} e^{ik\rho^2 / 2f} \tag{7.7.4}$$

$$E_1 = Ae^{i\omega t} \tag{7.7.5}$$

donde  $t$  es el coeficiente de transmisión en amplitud de la superficie. El sistema que logra lo buscado sin pérdida de energía tiene una transmisión

$$t(\rho) = e^{ik\rho^2 / 2f} \tag{7.7.6}$$

quedando claro que cualquier factor de amplitud que multiplique solo modificará la potencia, pero no el punto de convergencia.

A cualquier sistema cuya transmisión responde a la ecuación 7.7.6 se lo denomina lente y el parámetro  $f$  es la distancia focal. Analizaremos ahora que ocurre cuando la onda incidente es distinta de la descrita por la ecuación 7.7.1. Veamos primero el caso de una onda esférica incidente como la ilustrada en la figura 7.7.1-b y dada por

$$E_1 = \frac{B}{(z - z_s)} e^{i(\omega t - k(z - z_s))} e^{-ik\rho^2 / 2(z - z_s)} \quad 7.7.7$$

Luego de la lente la onda se obtiene multiplicando por  $t(\rho)$ :

$$E_2(z = 0, t) = tE_1(z = 0, t) = \frac{A}{z_s} e^{ikz_s} e^{i\omega t} e^{ik\rho^2 \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{z_s}\right) / 2} \quad 7.7.8$$

que es la función de onda en  $z=0$  para una onda convergente a  $z=z_s$ , con

$$\frac{1}{z_s'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{z_s} \quad 7.7.9$$

y la onda es

$$E_2(z, t) = \frac{A}{(z_s' - z)} e^{i(\omega t - k(z - z_s'))} e^{-ik\rho^2 / 2(z - z_s')} \quad 7.7.10$$

(verificar que efectivamente 7.7.9 y 7.7.10 en  $z=0$  dan 7.7.8)

Nota: la ecuación 7.7.9 se conoce como ecuación de la lente y suele aparecer escrita de distintas formas según la convención de signos que se tome para definir la posición de la fuente y la imagen. La convención aquí tomada tiene el mismo origen y sentido para medir ambos, lo que la hace muy razonable pero no es la más común.

Como caso particular notemos que si  $z_s = -f$  (punto denominado foco objeto), la imagen cae en el infinito. Esto significa simplemente que la onda transmitida tiene frente plano.

Si en lugar de buscar generar la imagen por transmisión se utiliza una reflexión en la que la fase reflejada depende de  $\rho$  (espejo), el coeficiente de reflexión se obtiene en forma análoga y resulta

$$r(\rho) = e^{ik\rho^2 / 2f} \quad 7.7.11$$

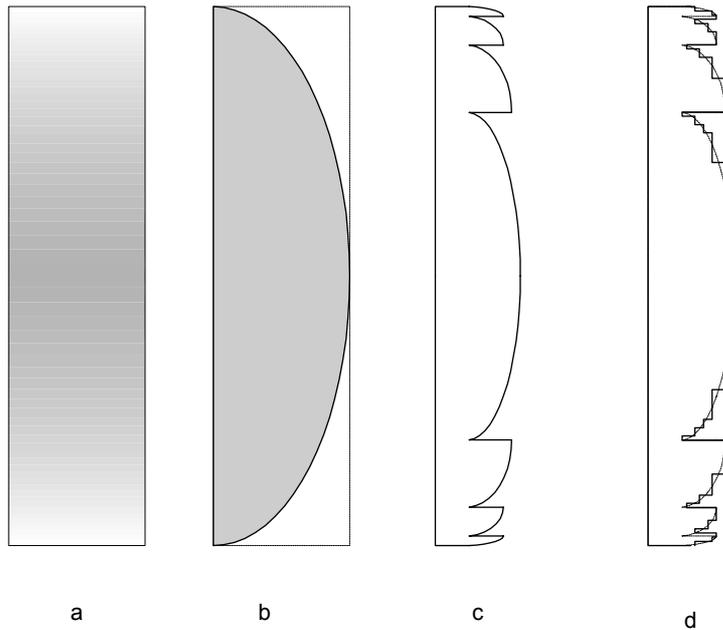
con

$$-\frac{1}{z_s'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{z_s} \quad 7.7.12$$

Notar que la situación es equivalente a la de la lente, pero la imagen se produce en  $z$  negativa para los sistemas que como lente producen la imagen en  $z$  positiva, de ahí la diferencia aparente de signo en las expresiones 7.7.9 y 7.7.12.

Calcule como ejercicio las posiciones de las imágenes para distintas posiciones de las fuentes (por ejemplo delante o detrás del foco objeto, y para distintos signos de  $f$ ).

¿Cómo podemos construir el filtro necesario para que se comporte como una lente?



**Figura 7.7.2.** **a:** lente por gradiente de índice, el color más oscuro ndica mayor índice de refracción. **b:** lente por tallado (la más difundida). **c:** lente difringente. **d:** lente binaria.

Hay varias posibilidades, que se ilustran en la figura 7.7.2. Podemos fabricar una lámina delgada tal que el índice de refracción dependa de  $r$  cuadráticamente. Al atravesar la lámina la onda es retrasada en fase una magnitud  $\Delta\phi = kn(\rho)d$ , donde  $n$  es el índice de refracción y  $d$  es el espesor de la lámina. Al ser

$$n(\rho) = \alpha\rho^2 + n_0 \tag{7.7.13}$$

queda un filtro de fase cuadrático. Este tipo de lentes se denomina lente de gradiente de índice y se lo fabrica difundiendo una impureza en el vidrio (por ejemplo titanio) de modo de introducir una banda de absorción angosta en una región en que no se desea trabajar (una resonancia adicional que modifica la curva de dispersión). La impureza se difunde con una concentración que depende de  $\rho$  (figura 7.7.2-a). Otra posibilidad es que la lámina tenga espesor variable, una parte en vidrio de espesor

$$d(\rho) = \alpha\rho^2 \tag{7.7.14}$$

y el resto en aire de espesor  $d_0 - d(\rho)$ . La variación de fase será

$$\Delta\phi = kn\alpha\rho^2 + k(d_0 - \alpha\rho^2) = kd_0 + k\alpha(n-1)\rho^2 \tag{7.7.15}$$

La distancia focal es en este caso

$$f = \frac{1}{\alpha(n-1)} \tag{7.7.16}$$

Para lograr este perfil de espesores el vidrio debe ser tallado siguiendo una parábola. En realidad es mas sencillo tallar una esfera, que dentro de la aproximación paraxial será un perfil cuadrático . La distancia focal queda

$$f = R/(n-1) \tag{7.7.17}$$

Calcule como ejercicio la expresión de la distancia focal para lentes biconvexas, cóncava-convexas, y cuando el índice después de la lente es distinto al índice anterior. Estas lentes son las más comunes. Una variante se puede introducir si cada vez que el filtro llega al valor  $2\pi$  se produce un salto y se vuelve al plano original. Esta situación se ve en la figura 7.7.2-c, y este tipo de lentes es muy sensible a la longitud de onda, ya que el momento del salto depende de la misma. Se lo denomina óptica difringente. Si los cambios de fase se hacen de a escalones discretos ( ver figura 7.7.2-d) se lo suele denominar óptica binaria. Como vemos hay muchas maneras de producir esencialmente el mismo efecto, pero el concepto involucrado es siempre el mismo. En todos los casos mencionados, la lente real resultante es solo aproximadamente igual al filtro cuadrático (lente ideal), tanto debido a que el perfil no es exactamente parabólico, como al hecho de no ser un objeto infinitamente delgado. Estos apartamientos de la idealidad se los denomina aberraciones, y dependen de cada diseño en particular. Se suele clasificar las aberraciones por el término de fase que es necesario agregar para mejorar la aproximación.

### **7.8. Puntos fuera del eje. Magnificación.**

Analizaremos ahora el caso en que la fuente está localizada fuera del eje (siempre en la aproximación paraxial). La situación se ilustra en la figura 7.8.1. Las coordenadas de la fuente son  $(x_s, 0, z_s)$ , por lo que en la aproximación paraxial la onda que llega a la lente se obtiene desarrollando

$$r = \sqrt{(x - x_s)^2 + y^2 + (z - z_s)^2} \quad 7.8.1$$

que en  $z=0$  se aproxima por

$$r \cong |z_s| + \frac{(x - x_s)^2 + y^2}{2|z_s|} \quad 7.8.2$$

con lo que el campo a la salida de lente será

$$E_2(0, t) = A e^{ik\rho^2/2f} e^{ik\rho^2/2z_s} e^{-ikx_s/2z_s} \quad 7.8.3$$

donde en la constante  $A$  se incluyeron todos los términos de amplitud y fase irrelevantes para este análisis. El término cuadrático indica nuevamente que a la salida hay una onda que converge a  $z=z_s'$  dada por la ecuación 7.7.9. Remplazando explícitamente  $\rho$  por  $x$  e  $y$ , la fase se puede escribir como

$$\phi = k[(x - x_s')^2 + y^2]/z_s' + cte \quad 7.8.4$$

con

$$x_s'/z_s' = x_s/z_s \quad 7.8.5$$

y la onda saliente es de la forma

$$E_2(z, \rho, t) = A(\rho) e^{i(\omega t - kz)} e^{-ik \frac{(x-x_s')^2 + y^2}{2(z-z_s')}} \quad 7.8.6$$

que converge al punto de coordenadas  $(x_s', 0, z_s')$ .

Por lo tanto dos puntos separados una distancia  $\Delta x$  en un plano perpendicular al eje de la lente, aparecerán en su imagen separados una distancia  $\Delta x'$  tal que la magnificación del sistema ( $M$ ) será

$$M = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{z_{s'}}{z_s} \quad 7.8.7$$

La posición de la imagen se puede hallar gráficamente con la siguiente construcción indicada en la figura 7.8.1: de la ecuación 7.8.5 surge que la línea que pasa por la fuente y el centro de la lente, también pasa por la imagen, la línea que pasa por la fuente y el foco objeto  $f'$  corta la lente en  $x'$  tal que

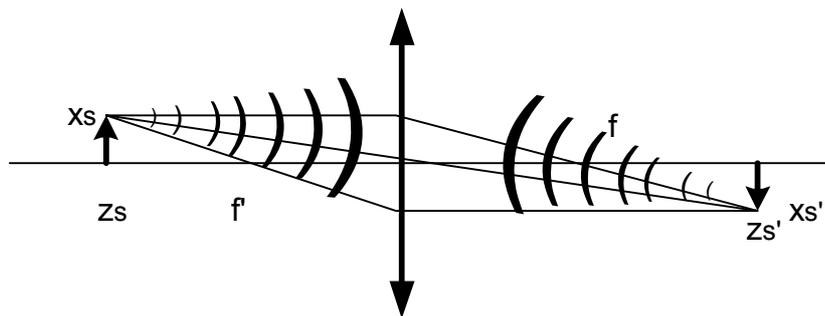
$$\frac{x'}{f} = \frac{x' - x_s}{z_s} \quad 7.8.8$$

que a partir de que  $f' = -f$  (si los índices de refracción son iguales a ambos lados de la lente) y de las ecuaciones 7.7.9 y 7.8.5 resulta  $x' = x_s$ . Queda pues determinada la altura de la imagen, y  $z_{s'}$  se halla buscando la intersección de la recta antes trazada que pasa por el centro, con la horizontal a  $x'$ . También se puede hallar con la recta que corta a la lente en  $x_s$  y pasa por el foco imagen  $f$  (ver figura). Queda como ejercicio demostrarlo.

**Plano focal:** en el plano perpendicular al eje  $z$  que corta en  $z=f$  se forman las imágenes de las ondas planas que inciden con cualquier ángulo. En efecto si hacemos  $z_s \rightarrow \infty$  manteniendo el ángulo  $x_s/z_s = \tan \theta$ , la imagen se forma en  $z_{s'} = f$  (ecuación 7.7.9) y  $x_{s'} = f \tan \theta$ .

**Rayo:** en la construcción geométrica de la imagen hemos utilizado líneas que son perpendiculares al frente de onda en todo punto. Estas líneas coinciden con la dirección del haz de luz que se obtiene luego de obstruir el frente de onda con una pequeña abertura. A estos haces se los denomina rayos y coinciden con las normales a los frentes de onda cuando el medio es isótropo.

Figura 7.8.1



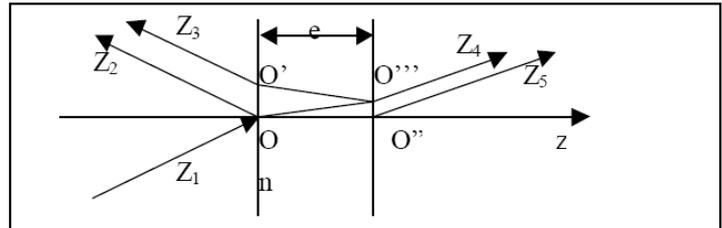
**Guía 7**

1.- a) Demostrar que para la ecuación de Klein-Gordon en tres dimensiones vale la relación de dispersión  $\omega^2 = \omega_p^2 + v^2 k^2$

b) Hallar las frecuencias típicas del plasma de la ionosfera, de los semiconductores y de los metales. Indicar la región del espectro electromagnético a la que pertenecen. ¿Qué densidad de electrones haría falta para hacer un espejo para rayos X?

2.- Demostrar que  $f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)$  es solución de la ecuación de ondas clásica, donde  $\mathbf{n}$  es un versor constante en la dirección de propagación de la onda.

3.- Una onda plana incide desde la izquierda (aire) sobre una lámina de vidrio de espesor  $e$ , con un ángulo de incidencia  $\gamma$ . Demuestre que la onda transmitida se propaga con el mismo ángulo que la incidente.



Escriba la expresión para :

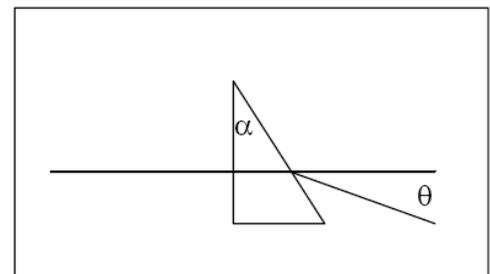
- a) la onda incidente en el sistema de referencia con origen O y eje z; y con origen O y eje z según  $z_1$ .
- b) la onda reflejada, con origen O y eje z; y con origen O' y eje  $z_2$ .
- c) la onda transmitida dentro del material con origen O; con origen O'' y con O'''.
- d) la onda transmitida con origen O''' y eje  $z_4$ ; con origen O'' y ejes  $z_5$  y con eje z.
- e) la onda reflejada en la segunda cara y transmitida hacia atrás en la primera, con origen O' y eje  $z_3$  y con origen O y eje  $z_2$ .

Analice los resultados y elabore una regla general sencilla para construir estas ondas.

4.- Una onda plana incide desde la izquierda perpendicularmente a la cara del prisma de la figura.

Encuentre:

- a) El ángulo de desviación  $\theta$  de la luz transmitida en función del índice de refracción y el ángulo  $\alpha$  del prisma.
- b) La dispersión del prisma ( $d\theta/d\lambda$ ). Estime dicho valor para algún material que encuentre en tablas o algún libro.
- c) El ángulo a partir del cual toda la luz es reflejada (ángulo de refracción rasante). Este ángulo se denomina de reflexión total interna. Discuta para qué caso es posible la reflexión total externa.



5.- Demostrar que  $\psi(x,t) = (A/r) \exp [i(kr-\omega t)]$  satisface la ecuación de Klein-Gordon y la de las ondas electromagnéticas en medios transparentes.

Halle la relación de dispersión correspondiente.

6.- a) Considere el frente esférico generado por una fuente puntual que emite en una longitud de onda ( $\lambda$ ) y que se encuentra a una distancia d del punto de observación. ¿Qué condiciones debe satisfacer  $\rho$  para que sea válida la aproximación paraxial?

b) Analice los siguientes casos:  $d = 100 \mu\text{m}$ ; 1cm; 1m; 100m y 10km, con  $\lambda$  perteneciente a: i) rango visible ii) microondas iii) onda corta iv) rayos X

7.- a) Defina qué se entiende por objetos e imágenes reales o virtuales. ¿Cómo se generan y cómo se detectan?.

b) Sea una fuente real a una distancia  $z_s$  de una lente de distancia focal imagen  $f > 0$ . Para  $z_s > f$ ,  $z_s = f$  y  $z_s < f$ , dibuje los frentes de onda incidentes y emergentes. Idem para  $f < 0$ .

c) Idem b) pero para una fuente virtual.

8.- Escriba, en la aproximación paraxial, la expresión de una onda convergente a derecha a un punto P. Halle la expresión de la onda reflejada en un espejo esférico de radio  $R_1$  en función de la distancia P-espejo. Discuta los distintos casos que se presentan.

9.- Halle la expresión de la onda transmitida cuando una onda esférica incide sobre una dioptra (también esférica).

10.- Halle las distancias focales para lentes: i) plano-cóncava, ii) plano-convexa, iii) bicóncava, iv) biconvexa, v) cóncava-convexa; en función del índice de refracción y de los radios de curvatura de las lentes, como así también de los índices de refracción de los medios externos. En un caso particular demuestre que el resultado es independiente del orden en que se iluminan las superficies.

11.- Una lente delgada convergente, de distancia focal 30cm, se coloca 20cm a la izquierda de otra lente delgada divergente de distancia focal 50cm. Para un objeto colocado a 40cm a la izquierda de la primera lente determine la imagen final. ¿Cuál es el aumento lateral del sistema? ¿La imagen es real o virtual, es directa o invertida?. Resuélvalo también geoméricamente.

12.- a) Describa el microscopio simple (lupa) y recordando que el aumento de un instrumento se define como el cociente entre el ángulo con que se ve al objeto a través del instrumento y el ángulo con que se lo ve a ojo desnudo, calcule su aumento en los siguientes dos casos: i) imagen final en infinito, ii) imagen virtual a 25cm de la lupa.

b) Describa un microscopio compuesto, enumerando cada uno de los elementos que lo componen y la función que cumple cada uno de ellos. Indique también si en la práctica cada uno de estos elementos es un elemento simple o no. ¿Cómo se considera, a los efectos de resolución de esta guía, un microscopio compuesto?.

13.- Un microscopio consta de un objetivo de 4mm de distancia focal y de un ocular de 30mm de distancia focal. La distancia entre el foco imagen del objetivo y el foco objeto del ocular es  $g = 18$ cm. Calcule: a) El aumento normal del microscopio, es decir el aumento cuando la imagen final está en el infinito. b) La distancia objeto-objetivo.

14.- Enumere los elementos básicos que componen un telescopio astronómico y los que componen un anteojo de Galileo, indique qué función cumple cada uno de ellos. Calcule el aumento de cada telescopio.

15.- Un anteojo astronómico utiliza como objetivo una lente convergente de 2m de distancia focal y 10cm de diámetro, y como ocular una lente convergente de 4cm de distancia focal. Determine: a) el aumento.

b) El tamaño de la primera imagen de la luna y el tamaño angular de la imagen final a través del telescopio. La luna subtende, a ojo desnudo, un ángulo de  $31'$ .



**Determinismo no implica reversibilidad en el tiempo. ¿Falta de determinismo da lugar a irreversibilidad?**

## Capítulo 8

### ONDAS VECTORIALES: POLARIZACIÓN

Hemos visto ejemplos de ondas correspondientes a fenómenos en que la magnitud física que oscila alrededor de su equilibrio es escalar o vectorial. Por ejemplo la densidad o la presión en el caso del sonido son escalares, el desplazamiento de la cuerda es un vector. Vibraciones en sólidos son vectores. Pero aún en los casos en que la magnitud fuera un vector nos limitamos a estudiar una sola componente, o sea estudiamos siempre ondas escalares. ¿Habrá peculiaridades del comportamiento de las ondas que surjan de su carácter vectorial, que las diferencia de las ondas escalares? Ese es el tema de este capítulo dedicado específicamente al caso de la luz. Ya hemos mencionado en el capítulo anterior que la magnitud que oscila en el caso de una onda luminosa es el campo eléctrico (y conjuntamente el magnético), pero esto lo planteamos desde el dogma, no lo construimos desde la validación experimental. ¿Cómo sabemos que es el campo electromagnético? ¿Cómo sabemos que es una onda vectorial? ¿Cómo sabemos que el vector, en medios isótropos, es transversal a la dirección de propagación? La primer pregunta quedará postergada, nos abocaremos a estas dos últimas.

#### **8.1. Caso de estudio: ¿La luz es vectorial o escalar?**

Para contestar a esta pregunta es necesario diseñar experimentos que pongan en evidencia diferencias cualitativas entre los dos casos. Supongamos que es una onda vectorial, el vector podría estar dirigido en la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}$  o ser perpendicular a éste, o tener ambas componentes. Veamos que implica en lo que respecta a la simetría que tenga componentes longitudinales o transversales. Supongamos que un haz se propaga en la dirección del eje  $z$ , ya hemos roto la isotropía del espacio marcando esta dirección preferencial. Las otras dos direcciones  $x$  e  $y$  son todavía arbitrarias. Si la vibración es longitudinal (la magnitud física que oscila está dirigida en la dirección de propagación de la onda) la simetría ante rotaciones según el eje  $z$  se mantiene. Si la vibración es transversal (la magnitud física es un vector perpendicular a la dirección de  $\mathbf{k}$ ) hay una nueva ruptura de la simetría. Llamamos  $x$  a esa dirección que ahora se distingue de  $y$  por ser la dirección del vector función de onda. Esto se ilustra en la figura 8.1.1.

Si la onda emitida por nuestra fuente es vectorial y tiene una componente transversal a la dirección de propagación, esperamos poner en evidencia esta rotura de la simetría viendo alguna propiedad distinta a medida que rotamos la fuente alrededor del eje  $z$  (dirección de  $\mathbf{k}$ ). Esto se ilustra en la figura 8.1.2, donde se muestra un experimento en que un láser es dirigido hacia una ventana de vidrio que se ubica a un ángulo  $\Phi$ . Si rotamos la ventana observamos que las potencias detectadas (reflejada y transmitida) varían con el ángulo  $\Phi$ . Asimismo a  $\Phi$  constante, varía con la rotación del láser ( $\Omega$ ).

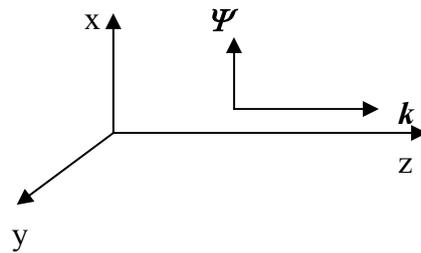
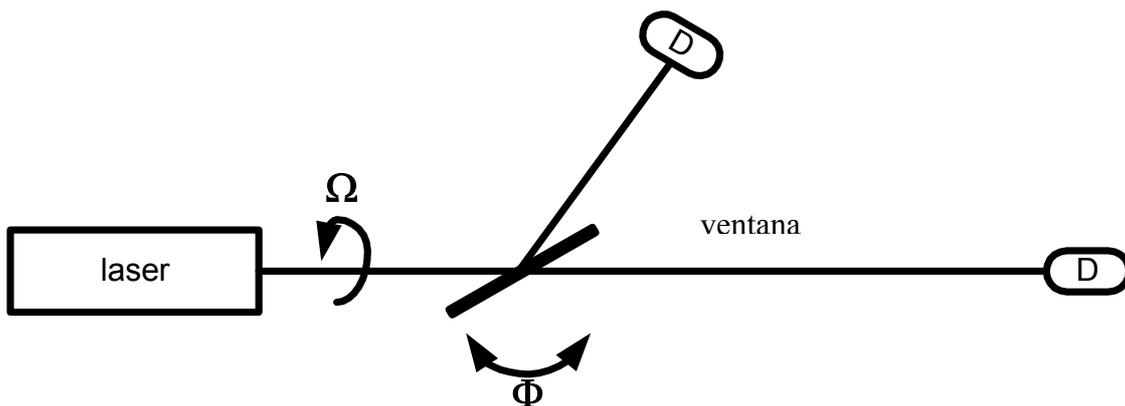


Figura 8.1.1: Una onda vectorial que se propaga según  $z$ , con vector en la dirección  $x$  rompe la simetría. Todas las direcciones del espacio son ahora distinguibles

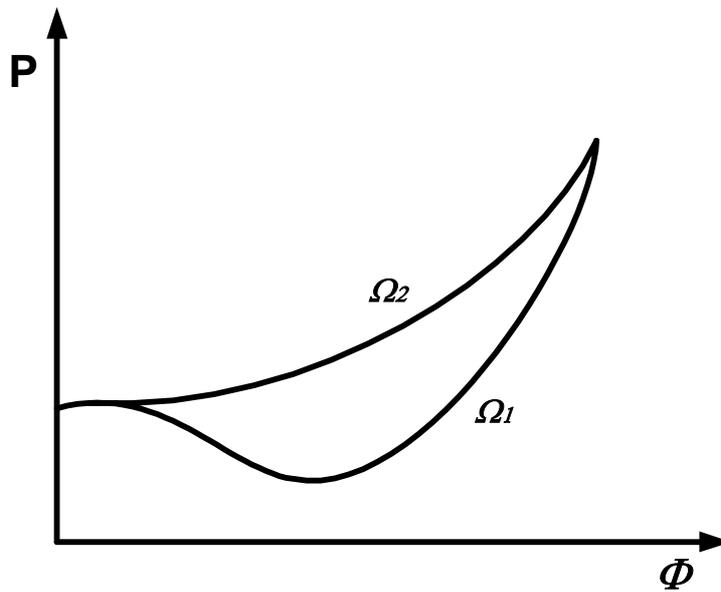
En la figura 8.1.3 se muestra cualitativamente la potencia reflejada para dos ángulos de rotación del láser distintos. Vemos que las curvas son distintas, lo que demuestra que la simetría de rotación según  $z$  está rota por la luz. Esto demuestra que la luz no es una onda escalar, ni tampoco puede ser una onda vectorial longitudinal. Como mínimo debemos usar una descripción vectorial con componentes transversales.



**Figura 8.1.2.** El laser emite luz que incide en una ventana de vidrio inclinada un ángulo  $\Phi$  ajustable. La reflexión incide en un detector y la transmisión en otro. El láser puede ser rotado a lo largo de su eje de emisión (ángulo  $\Omega$ ).

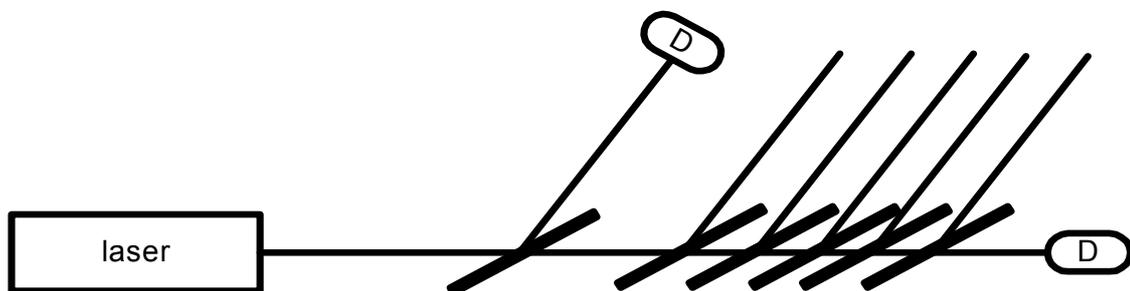
Si exploramos con más detalle la dependencia de la reflexión con los ángulos, buscando el mínimo valor, es fácil encontrar una situación en que la onda reflejada es nula. Esto ocurre para una incidencia sobre la ventana con un ángulo cercano a 60grados y para un ángulo particular del láser. A este ángulo particular de incidencia se lo denomina ángulo de Brewster. Se repite cada media vuelta de rotación en  $\Omega$  y la reflexión es máxima para una rotación de 90grados respecto de la de mínima reflexión.

La pregunta es si la energía es portada por una onda descrita por un vector transversal puro, o si hay además una componente longitudinal posible, de manera similar a las ondas mecánicas en un sólido (en que las vibraciones pueden ser longitudinales o transversales). La conclusión debe provenir de un análisis lógico muy cuidadoso de todas las opciones.



**Figura 8.1.3.** Gráfico cualitativo de la potencia recibida por el detector que mide la reflexión en función del ángulo de la ventana para dos ángulos distintos del láser.

Supongamos que la onda es transversal y longitudinal. ¿Es esto consistente con los resultados? Si para un ángulo dado no hay reflexión, querría decir que la onda reflejada selecciona una de las componentes transversales, que justo no está presente en esa ocasión. En ese ángulo de Brewster entonces no se refleja la onda longitudinal en caso de existir. Por lo tanto la onda longitudinal es transmitida aún cuando rote el láser como para tener componente reflejada máxima. Si intercalamos sucesivas ventanas en ángulo de Brewster (figura 8.1.4) la componente longitudinal será siempre transmitida. Por ende la componente transversal se irá atenuando hasta desaparecer en las sucesivas reflexiones y quedará solamente la longitudinal casi pura. La experiencia muestra que la onda se atenúa geométricamente con las sucesivas ventanas hasta extinguirse, lo que demuestra que, de ser la luz (de este láser) una onda vectorial, no tiene componente longitudinal.



**Figura 8.1.4.** Sucesivas láminas van atenuando la componente transversal transmitida, y como la onda se va extinguiendo, necesariamente no tiene componente longitudinal.

**Nota:** hemos demostrado que la luz **no** es una onda escalar ni puede ser descripta exclusivamente como una onda vectorial longitudinal. No hemos demostrado que es una onda transversal, pues en física uno no demuestra lo que algo es, solamente gana confianza en la descripción (necesariamente transitoria) de una parte de la realidad.

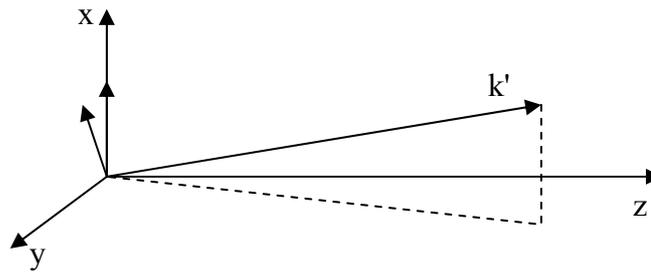
## **8.2. Ondas planas linealmente polarizadas**

Hemos demostrado que la luz debe ser descripta al menos como una onda transversal. Otros experimentos relacionados con el presentado en los que se halla cuantitativamente el coeficiente de reflexión y transmisión cuando se incide sobre una ventana de vidrio permiten corroborar que dichos coeficientes coinciden con los predichos a partir de las ecuaciones de Maxwell si se supone que la luz es una onda electromagnética. Este hecho nos hace ganar confianza en la descripción electromagnética de la luz, confianza que se va incrementando con todos los experimentos que involucran interacciones con la luz en que se utiliza al electromagnetismo como teoría marco para predecir los resultados. En la onda electromagnética las magnitudes físicas que oscilan alrededor del equilibrio son el campo eléctrico y el magnético. Como las ecuaciones de Maxwell, que describen la evolución de dichos campos en presencia de cargas eléctricas en movimiento, nos permiten deducir el valor del campo magnético, conocido el eléctrico (y viceversa), solamente utilizamos uno de ellos para describir la onda. Elegimos el campo eléctrico por ser la magnitud que interactúa más fuertemente con la materia, por lo que la función de onda desde ahora y mientras describamos experimentos con luz, será el campo eléctrico, designado con la letra  $E$ .

Analizaremos en primer lugar ondas monocromáticas (de frecuencia bien definida) y aprovecharemos la linealidad de las ecuaciones de ondas para luego aplicar superposición en caso de necesitar describir un pulso con una dependencia arbitraria en el tiempo. Si el campo sólo tiene componentes transversales, designando a la dirección de propagación como  $z$ , el vector campo eléctrico solamente tendrá componentes  $x$  e  $y$ . Del mismo modo que con ondas mecánicas, podemos considerar el caso más simple en que solamente hay excitada una componente, por ejemplo la  $x$ . El hecho de definir la dirección de propagación nos limita en tres dimensiones a una onda plana, que en notación compleja será:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = A_x e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \hat{x} \quad 8.2.1$$

Donde  $A_x$  es la amplitud (real) y  $\phi_x$  una constante que determina la fase de la oscilación. Otra forma de frente de onda implica necesariamente la superposición de ondas planas en distintas direcciones. Podemos girar la dirección de propagación alrededor del eje  $x$  y mantener la dirección del campo eléctrico (que debe ser perpendicular a  $\mathbf{k}$ ). Pero si rotamos por ejemplo según el eje  $y$ , ya el campo necesariamente incorpora otras componentes para mantenerse perpendicular a  $\mathbf{k}$  (ver figura 8.2.1). Para eludir la complejidad algebraica y a fin de introducir los conceptos centrales de las ondas de luz nos limitaremos a ondas planas colineales. Por otro lado muchas situaciones prácticas son adecuadamente aproximadas por esta descripción de apariencia limitada.

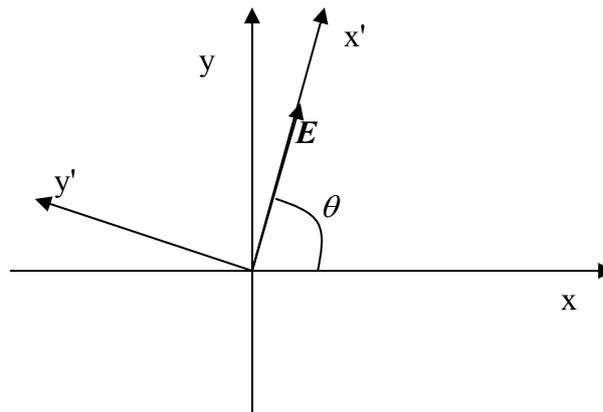


**Figura 8.2.1:** al rotar la dirección de propagación el campo sale del eje x.

Dada la isotropía del espacio en que estamos suponiendo que se propaga la onda, la solución 8.2.1 de la ecuación de ondas será válida para cualquier elección arbitraria de los ejes coordenados. Al igual que para ondas escalares, son necesarias las infinitas direcciones de propagación para tener una base completa. La diferencia es que una vez elegida la dirección y sentido de propagación tenemos aún dos grados de libertad, que son las dos componentes del vector perpendicular a  $\mathbf{k}$ . El otro elemento de la base necesario es pues:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = A_y e^{i(\omega t - kz + \phi_y)} \hat{y} \tag{8.2.2}$$

Cualquier onda plana propagándose en la dirección z positiva debe ser descrita como suma de 8.2.1 y 8.2.2. A estas dos soluciones se las denomina ondas planas linealmente polarizadas en las direcciones x e y respectivamente. ¿Cómo se describe una onda linealmente polarizada en una dirección arbitraria formando un ángulo  $\theta$  con el eje x (figura 8.2.2)?



**Figura 8.2.2:** Onda linealmente polarizada a un ángulo  $\theta$  respecto del eje x.

La onda se puede describir con una ecuación similar a 8.2.1 pero según el eje  $x'$ , o sea:

$$\vec{E}(x', y', z, t) = A_o e^{i(\omega t - kz + \phi_o)} \hat{x}' \tag{8.2.3}$$

(notar que el eje  $z$  no cambia en la rotación). Esta onda puede ser escrita en el sistema  $xy$ , cambiando las coordenadas según la transformación lineal que origina una rotación, que se obtiene de escribir  $x$  e  $y$  en términos de  $x'$  e  $y'$ :

$$x = x' \cos(\theta) - y' \operatorname{sen}(\theta) \quad 8.2.4$$

$$y = x' \operatorname{sen}(\theta) + y' \cos(\theta) \quad 8.2.5$$

o en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_{-\theta} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad 8.2.6$$

y su inversa:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_{\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad 8.2.7$$

Es sencillo demostrar que el producto de las matrices en 8.2.6 y 8.2.7 es la matriz unidad:

$$R_{\theta} R_{-\theta} = R_{-\theta} R_{\theta} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 8.2.8$$

Aplicando la transformación 8.2.6 a 8.2.3, se obtiene:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = R_{-\theta} \begin{bmatrix} E_{x'} \\ 0 \end{bmatrix} = A_o e^{i(\omega t - kz + \phi_o)} (\cos(\theta)\hat{x} + \operatorname{sen}(\theta)\hat{y}) \quad 8.2.9$$

que es una superposición muy particular de 8.2.1 y 8.2.1 en la que:

$$\phi_x = \phi_y = \phi_o \quad 8.2.10$$

De modo que la onda linealmente polarizada en una dirección arbitraria (propagándose según  $z$ ) se obtiene superponiendo ondas polarizadas según  $x$  e  $y$  con la misma fase. En notación matricial la onda linealmente polarizada a un ángulo  $\theta$  es:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o e^{i(\omega t - kz + \phi_o)} \cos(\theta) \\ A_o e^{i(\omega t - kz + \phi_o)} \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix} = A_o e^{i(\omega t - kz + \phi_o)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad 8.2.11$$

El cociente entre las amplitudes de las dos componentes resulta:

$$\frac{A_y}{A_x} = \tan(\theta) \quad 8.2.12$$

y determina el ángulo cuando ambas componentes están en fase (onda linealmente polarizada).

¿Cómo es la onda si las componentes no están en fase?

### 8.3. Polarización elíptica y circular

Si superponemos dos ondas según 8.2.1 y 8.2.2 con una relación de fase cualquiera, el campo resulta:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \\ A_y e^{i(\omega t - kz + \phi_y)} \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{i(\phi_y - \phi_x)} \end{bmatrix} \quad 8.3.1$$

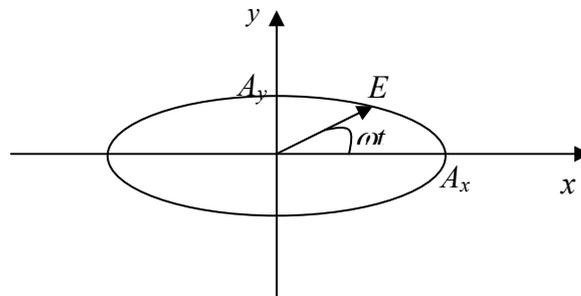
donde ambas componentes oscilan a la misma frecuencia pero no están en fase. En realidad debemos tomar la parte real para ver como es el vector campo eléctrico, resultando:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{bmatrix} \quad 8.3.2$$

Esta es la ecuación paramétrica de la elipse. A medida que avanza el tiempo o cambia la posición, el vector va recorriendo una elipse. El caso más fácil de visualizar es cuando

$$\varepsilon = \phi_y - \phi_x = \pm\pi/2 \quad 8.3.3$$

Para este caso cuando la componente  $x$  llega a un máximo o mínimo, la componente  $y$  pasa por cero, y viceversa. La elipse está recostada con sus ejes sobre los ejes cartesianos, siendo sus radios mayores y menores  $A_x$  y  $A_y$  (según cual sea mayor de ellos). Esto es ilustrado en la figura 8.3.1



**Figura 8.3.1:** El vector campo eléctrico recorre una elipse con frecuencia angular  $\omega$ .

Según que la diferencia de fase entre las dos componentes sea  $+\pi/2$  o  $-\pi/2$  el vector campo eléctrico girará en sentidos contrarios. Si la diferencia es positiva tenemos:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} A_x \\ iA_y \end{bmatrix} \quad 8.3.4$$

cuya parte real es

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ -A_y \text{sen}(\omega t - kz + \phi_x) \end{bmatrix} \quad 8.3.5$$

En este caso la componente  $y$  está adelantada respecto de la  $x$  (que llega al máximo cuando la  $y$  ya vuelve y está pasando por cero). El vector gira en la figura 8.3.1 en el sentido horario, y para una onda viajando hacia  $z$  positivo (saliendo de la figura) se dice que rota a derecha.

¿Cómo se verá esta onda elíptica en un eje rotado un ángulo  $\theta$ ? Para ello rotamos 8.3.4 usando 8.2.7:

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{bmatrix} = R_{\theta} e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} A_x \\ iA_y \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} \cos(\theta)A_x + i\sin(\theta)A_y \\ -\sin(\theta)A_x + i\cos(\theta)A_y \end{bmatrix} \quad 8.3.6$$

de donde podemos calcular las fases de cada componente (la tangente es el cociente de la parte imaginaria sobre la real):

$$\tan(\phi_{x'}) = \tan(\theta) \frac{A_y}{A_x} \quad 8.3.7$$

$$\tan(\phi_{y'}) = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{A_y}{A_x} = \frac{\sin(\theta + \pi/2)}{\cos(\theta + \pi/2)} \frac{A_y}{A_x} = \tan(\theta + \pi/2) \frac{A_y}{A_x} \quad 8.3.8$$

Cambiando los valores de  $A_y/A_x$  se obtienen distintos desfases para distintos valores de la rotación  $\theta$ , salvo el caso particular en que

$$A_x = A_y \quad 8.3.9$$

en que resulta siempre:

$$\tan(\phi_{x'}) = \tan(\theta)$$

$$\tan(\phi_{y'}) = \tan(\theta + \pi/2)$$

y queda

$$\phi_{y'} - \phi_{x'} = \pi/2 \quad \forall \theta \quad 8.3.10$$

Para este caso particular el vector campo eléctrico describe una circunferencia, y el desfase no depende del sistema de coordenadas elegido. Se lo **denomina polarización circular derecha**.

El caso en que es desfase es de  $-\pi/2$ , en lugar de 8.3.4 se obtiene:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} A_x \\ -iA_y \end{bmatrix} \quad 8.3.11$$

que escrita en forma real da:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ A_y \sin(\omega t - kz + \phi_x) \end{bmatrix} \quad 8.3.12$$

Ahora la componente  $y$  está atrasada respecto de la  $x$  en un cuarto de vuelta, y el vector gira en sentido antihorario. La onda que viaja según  $z$  positivo se denomina polarizada a izquierda.

Si repetimos el análisis hecho de cuando vale 8.3.9 para la polarización a izquierda, se obtiene

$$\phi_{y'} - \phi_{x'} = -\pi/2 \quad \forall \theta \quad 8.3.13$$

Nuevamente el desfase no depende del sistema de coordenadas, y el vector describe una circunferencia. Se lo **denomina polarización circular izquierda**.

Cabe notar que si la onda viaja en el otro sentido, como definimos la dirección de rotación observando la onda venir, debemos mirar la figura desde el otro lado, y la polarizada a derecha es la que tiene un desfase de  $-\pi/2$ . No es el sentido de rotación en nuestro sistema sino respecto de su dirección de propagación lo que define si es derecha o izquierda.

Volviendo a la notación compleja para polarización circular (ecuaciones 8.3.4 y 8.3.11), podemos escribirlas como:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = Ae^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = Ae^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \hat{e}_r \quad 8.3.14$$

para la polarización circular derecha y :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = Ae^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = Ae^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \hat{e}_l \quad 8.3.15$$

para la izquierda.

Donde hemos definido nuevos versores:

$$\hat{e}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) \quad 8.3.16$$

$$\hat{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad 8.3.17$$

Es fácil demostrar que los versores  $\hat{e}_r$  y  $\hat{e}_l$  son ortonormales. Basta con multiplicarlos:

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = \frac{1}{2} [1 \quad i]^* \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [1 \quad -i] \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 1 \quad 8.3.18$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_l = \frac{1}{2} [1 \quad i]^* \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [1 \quad -i] \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 0 \quad 8.3.19$$

$$\hat{e}_l \cdot \hat{e}_l = \frac{1}{2} [1 \quad -i]^* \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [1 \quad i] \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 1 \quad 8.3.20$$

Tenemos ahora una nueva base ortogonal en la que se puede expresar la onda. Por lo tanto debe existir una matriz de cambio de base para pasar del campo expresado como suma de dos ondas linealmente polarizadas según x e y, a dos ondas circularmente polarizadas a derecha e izquierda y viceversa. En 8.3.16 y 8.3.17 ya tenemos una de las transformaciones, por lo que si la onda esta expresada en la base de polarización circular la podemos transformar como:

$$\vec{E} = E_r \hat{e}_r + E_l \hat{e}_l = E_r \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) + E_l \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad 8.3.21$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_l \end{bmatrix} = T_{CL} \begin{bmatrix} E_r \\ E_l \end{bmatrix} \quad 8.3.22$$

y la transformación inversa se puede obtener invirtiendo antes 8.3.16 y 8.3.17 y repitiendo el procedimiento o simplemente invirtiendo  $T_{CL}$ :

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = T_{LC} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad 8.3.23$$

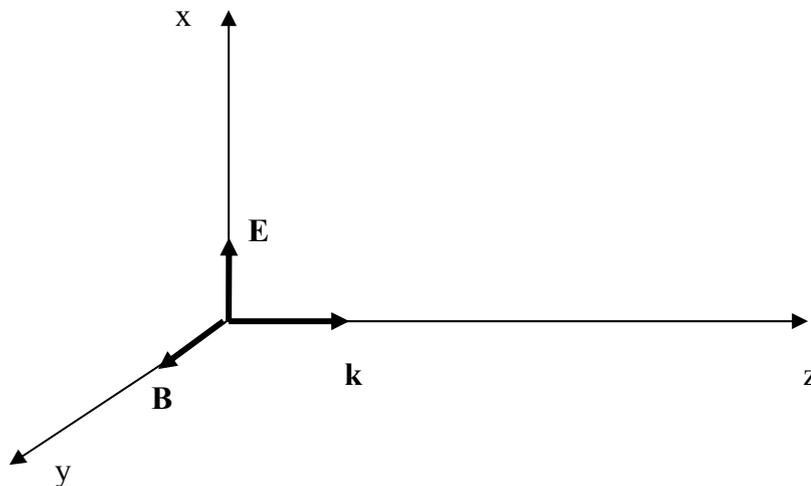
Notar que el producto de  $T_{CL}$  por  $T_{LC}$  es la matriz unidad.

#### **8.4. Densidad de energía e intensidad**

Habíamos visto en ondas unidimensionales que la densidad de energía y la potencia para ondas propagantes es proporcional a la función de onda al cuadrado. En el caso particular de ondas electromagnéticas, la energía está equidistribuida entre la del campo eléctrico y el magnético. Para ondas propagantes ambos son perpendiculares (el campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) está orientado respecto al eléctrico como indica la figura 4.4.1), viajan en fase y la amplitud del campo magnético es proporcional a la del eléctrico. Por ello se calcula directamente la densidad de energía ( $U_{EM}$ ) como proporcional al campo eléctrico al cuadrado (recordar que hay que tomar la parte real antes de elevar al cuadrado):

$$U_{EM} = C_{EM} |\vec{E}|^2 = C_{EM} (E_x^2 + E_y^2) \quad 8.4.1$$

donde  $C_{EM}$  es una constante que depende del sistema de unidades y del medio en que se propaga onda. Para el sistema de unidades MKS la constante es:



**Figura 8.4.1:** orientaciones relativas del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el magnético  $\mathbf{B}$  en una onda propagante según el vector de onda  $\mathbf{k}$  (para  $\epsilon > 0$  y  $\mu > 0$ ).

$$C_{EM} = \epsilon \quad 8.4.2$$

donde  $\epsilon = \epsilon_0$  para el vacío, y esta constante que depende del medio se denomina constante dieléctrica e indica en que medida el material apantalla el campo (lo disminuye) por movimiento de sus propias cargas.

La intensidad transportada por la onda, es decir la potencia por unidad de área, la obtenemos siguiendo el razonamiento presentado en 5.3, imponiendo que la energía almacenada por la onda en un volumen de área  $dA$  y largo  $v \cdot dt$  ( $v$ = velocidad de la luz en el medio) o sea  $UdAvdt$  atraviesa la superficie  $dA$  en un tiempo  $dt$ , siendo:

$$I = vU \quad 8.4.3$$

Los detectores de luz y ondas electromagnéticas de alta frecuencia (de rayos gama a infrarrojo) dan señales que surgen de absorber cuantos de energía (fotones), y por lo tanto miden densidad de fotones que llegan en el tiempo de integración. Por ejemplo un fotomultiplicador da un pulso de electrones por cada fotón absorbido, un fotodiodo da un par de cargas por cada fotón. Detectores térmicos distribuyen la energía absorbida en sus grados de libertad, dando un aumento de la temperatura. La magnitud física asociada a esta medición es la potencia media que llega al detector, promediada en un tiempo mayor o igual a un periodo de la portadora. En esta promediación la fase de la onda no juega ningún rol ya que a lo largo de un periodo dará una vuelta completa en el plano complejo. Se obtiene:

$$\langle I(t) \rangle_T = \frac{vC_{EM}}{T} \int_t^{t+T} (A_x^2 \cos^2(\omega t' - kz + \phi_x) + A_y^2 \cos^2(\omega t' - kz + \phi_y)) dt' = \frac{vC_{EM}}{2} (A_x^2 + A_y^2)$$

8.4.4

cabe notar que este mismo resultado se obtiene tomando directamente el módulo al cuadrado del campo en la notación compleja y dividiendo por dos, o sea:

$$\langle I(t) \rangle_T = \frac{vC_{EM}}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{vC_{EM}}{2} (A_x^2 + A_y^2) \quad 8.4.5$$

de modo que de ahora en más usaremos esta cuenta sencilla para obtener la intensidad media. Cabe notar que las intensidades de cada polarización ortogonal contribuye independientemente a la intensidad total, esto no vale si se suman contribuciones no ortogonales entre sí, en cuyo caso es necesario previamente descomponerlas en una base ortogonal.

### **8.5. Componentes pasivos 1: el polarizador**

Hay materiales que por su estructura interna o construcción rompen la isotropía del espacio, por ende la simetría y pueden alterar el estado de polarización de la luz transmitida o reflejada. Un caso ya lo vimos empíricamente en 8.1, al observar que para cierto ángulo de incidencia, llamado ángulo de Brewster, solamente un estado de polarización lineal es reflejado. Este ángulo puede ser predicho a partir de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y es aquel en que la onda reflejada se propaga perpendicular a la onda refractada. En la figura 8.5.1 se ilustra la situación y se observa que requiere que:

$$\theta_i + \theta_r = \pi / 2 \quad 8.5.1$$

De la ley de Snell (7.4.8) equivale a pedir que:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\pi / 2 - \theta_i) = n_2 \cos(\theta_i) \quad 8.5.2$$

que da para el ángulo de incidencia de Brewster:

$$\tan(\theta_{iB}) = \frac{1}{\tan(\theta_{rB})} = \frac{n_2}{n_1} \quad 8.5.3$$

Para este ángulo de incidencia, cualquiera sea la polarización incidente, la onda reflejada será linealmente polarizada en la dirección perpendicular al plano de incidencia. Parte de la onda de esa polarización es transmitida, por lo que si definimos como eje  $x$  al del plano, la onda reflejada será una fracción  $r$  (coeficiente de reflexión en amplitud) de la incidente:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad 8.5.4$$

utilizamos  $r$  minúscula para indicar el coeficiente de reflexión, y usaremos  $R$  mayúscula para la fracción de energía reflejada. Cualquier componente pasivo que tiene una matriz de transferencia (reflexión o transmisión) como la descrita en 8.5.4, o sea con tres ceros y un número menor que 1 en uno de los elementos de la diagonal, se denomina polarizador, ya que independientemente de la onda incidente, transfiere una onda linealmente polarizada. El polarizador ideal es aquel en que  $r=1$ .

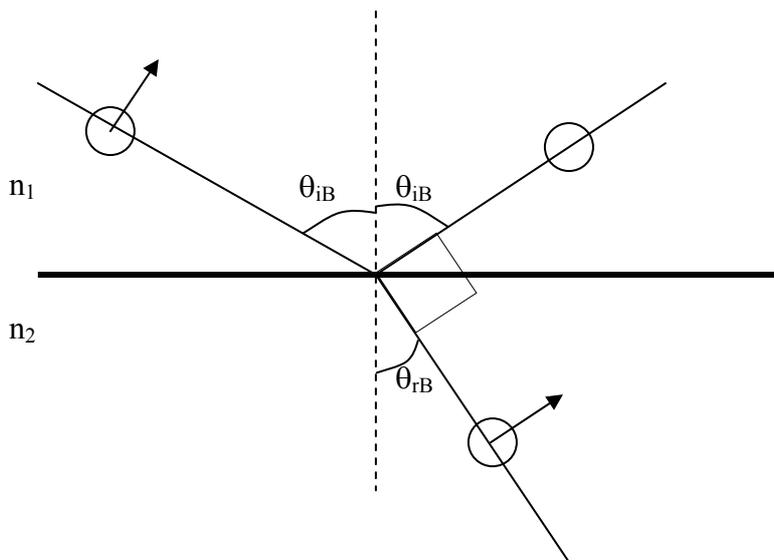


Figura 8.5.1: ángulo entre los haces incidentes, reflejados y refractados en la incidencia en ángulo de Brewster. La polarización incidente tiene ambas componentes, una en el plano, indicada con la flecha y otra perpendicular indicada con el círculo. La onda reflejada solamente tiene una componente.

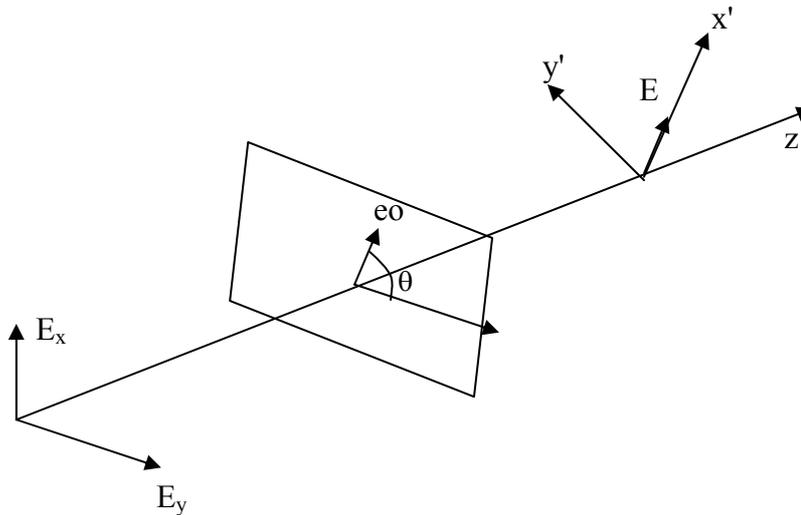
Se pueden construir polarizadores por transmisión aprovechando la propiedad de ciertos materiales anisótropos de absorber preferencialmente una componente de polarización, esta propiedad se denomina dicroísmo. También se los construye aprovechando la diferencia en la propagación de las dos polarizaciones en materiales en que tiene distinto índice de refracción como la calcita. Estos materiales se los denomina birrefringentes, y su tratamiento riguroso escapa el alcance de este curso, por lo que sólo mencionaremos algunos ejemplos.

El eje del polarizador (dirección del campo que es transmitida) no necesariamente coincide con algún eje elegido como base. En este caso es necesario o bien rotar los ejes a aquellos en que definimos la matriz del polarizador, o rotar la matriz del polarizador a nuestra base. La situación se ilustra en la figura 8.5.2. Si rotamos el campo a la base con un eje según el polarizador (ángulo  $\theta$ ), introducimos la matriz del polarizador y volvemos a rotar a la base original tenemos:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_T = R_{-\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_{\theta} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen} \theta \cos \theta \\ \text{sen} \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad 8.5.5$$

hemos obtenido pues la matriz del polarizador en una base rotada. Si la luz incidente está polarizada según el eje x, la luz transmitida será

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen} \theta \cos \theta \\ \text{sen} \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \cos^2 \theta \\ E_x \text{sen} \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad 8.5.6$$



**Figura 8.5.2:** campo eléctrico incidente y transmitido luego de un polarizador ideal. e.o: eje óptico del polarizador.

Si en cambio queríamos calcular el campo en los ejes del polarizador, no realizamos la última rotación de vuelta y queda:

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_{\theta} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = (E_x \cos \theta + E_y \text{sen} \theta) \hat{x}' \quad 8.5.7$$

Y para el caso en que la luz incidente está polarizada según el eje x, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{bmatrix}_T = E_x \cos(\theta) \hat{x}' \quad 8.5.8$$

La intensidad transmitida será a partir de 8.4.5:

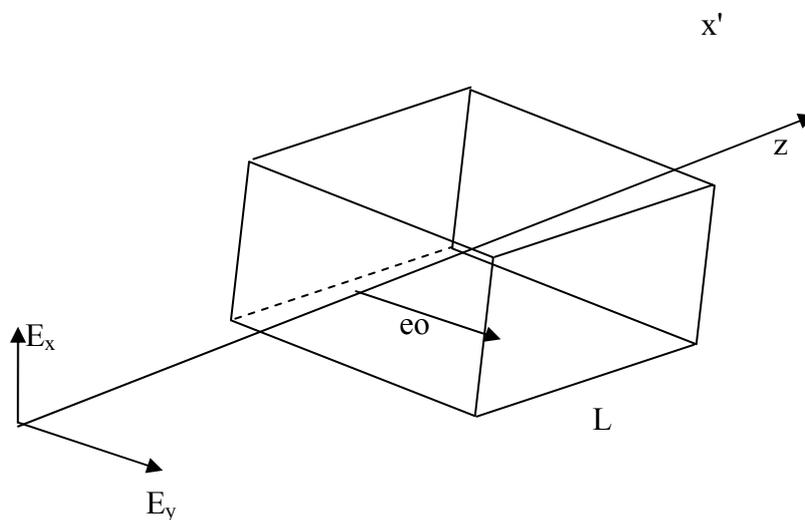
$$I_T = \cos^2(\theta)I_{inc} \quad 8.5.9$$

Que es conocida como ley de Malus.

### **8.6. Componentes pasivos 2: láminas de onda**

Hemos visto componentes que a partir de una onda arbitraria se obtiene ondas linealmente polarizadas según un eje determinado. Veremos ahora como obtener luz circularmente polarizada, o en general luz elípticamente polarizada. Si la luz incide linealmente polarizada, ambas componentes están en fase. Para pasar a polarización elíptica es necesario introducir una diferencia de fase entre ellas. Si el desfase es de  $\pm \pi/2$ , la elipse estará con sus ejes según los ejes cartesianos elegidos y si ambas componentes son iguales, la polarización será circular.

Hay dos maneras simples de obtener una diferencia de fase entre las dos componentes, una es por reflexión en una interfase entre dos materiales de distinto índice de refracción. La amplitud y fase de las reflexiones a ángulos de incidencia arbitrarios se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell (como condiciones de borde) y se conocen como coeficientes de Fresnel. Otro mecanismo es utilizar un material que tenga distinto índice de refracción para las dos componentes de polarización (conocidos como materiales birrefringentes). De esta manera, luego de propagarse por el material una distancia  $L$ , cada componente acumulará una fase  $kL$  distinta por ser diferente el número de onda  $k$ . Al salir del material dicha diferencia queda congelada y si el espesor es elegido para que sea de  $\pm \pi/2$ , se habrá logrado el objetivo buscado. Esta situación es ilustrada en la figura 8.5.1.



**Figura 8.5.1:** cristal birrefringente utilizado como lámina de onda. eo: eje óptico del cristal, la luz polarizada según ese eje tiene un índice de refracción distinto (extraordinario). A la salida del cristal de largo  $L$  las fases de las distintas componentes de polarización habrán cambiado en cantidades distintas.

El eje preferencial tiene un índice de refracción denominado extraordinario ( $n_e$ ), en contraposición con el otro denominado ordinario ( $n_o$ ) y los números de ondas serán

$$k_e = n_e \frac{\omega}{c} \quad 8.6.1$$

$$k_o = n_o \frac{\omega}{c}$$

Y las fases acumuladas en el tránsito serán:

$$\phi_x = -k_o L \quad 8.6.2$$

$$\phi_y = -k_e L$$

Y la diferencia de fases:

$$\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = (n_e - n_o) \frac{\omega}{c} L \quad 8.6.3$$

Eligiendo el largo del cristal se puede ajustar de modo que esta diferencia sea  $\pm \pi/2$ , en cuyo caso se la denomina lámina de cuarto de onda (produce un desfase de un cuarto de vuelta). Si es

$$\Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2} (2m + 1) \quad 8.6.4$$

con m entero, produce el mismo efecto. Se la denomina lámina de cuarto de onda de orden múltiple.

Si

$$\Delta\phi = \pm m\pi \quad 8.6.5$$

es una lámina de media onda. El efecto es cambiar el signo de una componente, y con ello cambiar la orientación de la polarización, que sigue siendo lineal, si lo era a la entrada.

Las matrices de las láminas de media ( $M_{\lambda/2}$ ) y cuarto de onda ( $M_{\lambda/4}$ ) son:

$$M_{\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad M_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix} \quad 8.6.6$$

Para que la polarización a la salida sea circular, es necesario incidir con la polarización a 45 grados del eje óptico, de modo que ambas componentes tengan la misma amplitud. Nuevamente para una orientación arbitraria del eje, es necesario rotar los ejes del campo incidente o rotar la matriz de la lámina.

Si la diferencia de fases es cualquiera, la matriz toma la forma:

$$M_{\Delta\phi} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = e^{i(\phi_x + \phi_y)/2} \begin{bmatrix} e^{i(\phi_x - \phi_y)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i(\phi_x - \phi_y)/2} \end{bmatrix} \quad 8.6.7$$

## 8.7. Componentes activos y otras situaciones atípicas

**Actividad óptica:** existen sustancias que poseen una asimetría helicoidal, y poseen distinto índice de refracción para las polarizaciones circulares a derecha e izquierda. En este caso es necesario escribir el campo en la base circular, aplicar una matriz similar a la de láminas de ondas 8.6.7 y volver a la base lineal:

En la base circular la matriz de actividad óptica será

$$M_{AO/BC} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_r} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_l} \end{bmatrix} = e^{i\bar{\phi}} \begin{bmatrix} e^{i\Delta\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta\phi/2} \end{bmatrix} \quad 8.7.1$$

y en la base linealmente polarizada luego de una cuenta sencilla:

$$M_{AO/BL} = T_{CL} M_{AO} T_{LC} = R_{\Delta\phi/2} \quad 8.7.2$$

El efecto de la actividad óptica es rotar la polarización de la luz en un ángulo fijo.

Hay otros efectos que se logran introduciendo rupturas en la simetría en materiales por medio de campos externos. Por ejemplo con campos eléctricos y magnéticos. He aquí algunos ejemplos:

**Efecto Kerr:** se introduce una birrefringencia por la aplicación de un campo eléctrico. Este efecto se debe a la orientación de moléculas polares en líquidos por efecto del campo externo o a deformaciones en las nubes electrónicas debido a esos campos. El campo eléctrico se aplica transversal a la dirección de propagación de la luz y la variación entre el índice extraordinario y el ordinario resulta:

$$\Delta n = \lambda_o K E^2 \quad 8.7.3$$

donde  $\lambda_o$  es la longitud de onda de la luz en el vacío, K una constante que depende del material y E es el campo eléctrico aplicado (no el de la luz).

**Efecto Pockels:** También se introduce una birrefringencia por medio de un campo eléctrico externo, pero a diferencia del efecto Kerr, la diferencia de índice de refracción resulta proporcional al campo aplicado. Los dispositivos suelen describirse por la diferencia de potencial eléctrico necesario para generar una lámina de media onda denominada  $V_{\lambda/2}$ , resultando:

$$\Delta n = \pi \frac{V}{V_{\lambda/2}} \quad 8.7.4$$

El valor de  $V_{\lambda/2}$  depende del material, la longitud de onda y la geometría del mismo. Este fenómeno aparece en cristales sin centros de inversión, en los que la aplicación de un campo externo da lugar a deformaciones que inducen la birrefringencia. El campo eléctrico puede ser transversal o longitudinal según el material y forma de corte del cristal.

**Efecto Faraday:** aparece cuando se aplica un campo magnético intenso en la dirección de propagación de la luz. El efecto es similar al de la actividad óptica, pero con una diferencia sustancial, el campo magnético rompe la simetría entre una onda que se propaga en su dirección, y una onda contrapropagante. La magnitud de la rotación de la polarización es proporcional al campo magnético (B) aplicado:

$$\beta = VBd \quad 8.7.5$$

donde d es el espesor atravesado y V la constante propia del material llamada constante de Verdet. B se define positivo si es paralelo a k, por lo que el ángulo de rotación cambia de signo cuando la luz viaja en sentido contrario. Por ejemplo si se diseña su largo para que el ángulo de rotación sea de  $\pi/4$ , y la luz se refleja con un espejo nuevamente sobre si misma, en la segunda pasada rotará otro  $\pi/4$  (no desanda la rotación) y da una rotación neta de  $\pi/2$ , quedando perpendicular a la luz incidente. Esta

propiedad suele utilizarse para impedir que luz reflejada vuelva a la fuente, para lo cual se agrega un polarizador a la entrada del medio Faraday (problema 8).

### **8.8. Polarización natural**

Muchas fuentes de luz, particularmente las fuentes obtenidas por calentamiento de un material (lamparita, descarga en gases, sol) están constituidas por un sinnúmero de emisores independientes que no tienen una dirección de polarización preferencial en la cual emitir. La superposición de estas emisiones independientes (que pueden ocurrir en tiempos del orden de  $10^{-8}$ s o menores) da lugar a una onda cuya polarización fluctúa permanentemente en esos tiempos característicos. Si nuestro detector es más lento que dichas fluctuaciones (el ojo promedia durante aproximadamente 0,1s) lo que vemos es un promedio. Por lo tanto debo expresar el estado de polarización como:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\Delta\phi} \end{bmatrix} \quad 8.8.1$$

donde  $\Delta\phi$  es una magnitud que varía aleatoriamente con valor medio

$$\langle \Delta\phi \rangle = 0. \quad 8.8.2$$

Si pasamos esta luz por un polarizador orientado según el eje  $x$ , obtenemos a la salida

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \hat{x} \quad 8.8.3$$

Si en cambio utilizamos un polarizador según  $y$ :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} e^{i\Delta\phi} \hat{y} \quad 8.8.4$$

El valor medio de la intensidad, calculado a partir de 8.4.5 da en ambos casos lo mismo. ¿Qué pasa si rotamos el polarizador? Usando 8.5.7

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{bmatrix}_T = (E_x \cos \theta + E_y \sin \theta) \hat{x}' = A e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} (\cos \theta + e^{i\Delta\phi} \sin \theta) \hat{x}' \quad 8.8.5$$

y si ahora calculamos la intensidad media a partir de 8.4.5

$$\langle I(t) \rangle_T = \frac{vC_{EM}}{2} |A_{x'}|^2 = \frac{vC_{EM}}{2} A^2 [\cos(\theta) + e^{i\Delta\phi} \sin(\theta)] [\cos(\theta) + e^{-i\Delta\phi} \sin(\theta)] \quad 8.8.6$$

que depende de la diferencia de fase  $\Delta\phi$ , pero como este valor fluctúa rápidamente (de modo que el detector promedia sobre todos sus valores posibles) se obtiene de la nueva promediación:

$$\langle \langle I(t) \rangle_T \rangle_{\Delta\phi} = \frac{vC_{EM}}{2} A^2 \langle (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\Delta\phi)) \rangle_{\Delta\phi} = \frac{vC_{EM}}{2} A^2 \quad 8.8.7$$

que notablemente no depende del ángulo del polarizador. Esto es porque la polarización, al fluctuar la diferencia de fase, fluctúa en su estado, pasando por todas sus posibilidades, por lo que en promedio solamente la mitad de la energía pasa el polarizador.

La transmisión de un polarizador si incide luz circularmente polarizada también es la mitad de la intensidad incidente (ver problema 6), pero el estado es cualitativamente distinto. Si colocamos una lámina de cuarto de onda adecuadamente orientada delante del haz circularmente polarizado, a la salida la polarización es lineal. En cambio si lo hacemos delante de luz natural, la polarización sigue siendo natural (la diferencia de fases sigue fluctuando arbitrariamente). Este sencillo experimento permite discernir entre ambas situaciones.

**Guía 8**

1) Una onda inicialmente polarizada según  $x$  y viajando según  $z$  positivo incide en un polarizador cuyo eje de transmisión forma un ángulo  $A$  con el eje  $x$ , y luego pasa por un segundo polarizador que forma un ángulo  $B$  con el primero. ¿Cuál es la expresión de la onda transmitida en los ejes originales? ¿Y en los ejes del segundo polarizador? ¿Cómo son las respectivas matrices que describen al sistema?

¿Cuál es la intensidad media transmitida por el sistema?

2) Se tiene un polarizador imperfecto con una matriz

$$\begin{bmatrix} t_x & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta \end{bmatrix} \text{ con } t_x \approx 1, \varepsilon \ll 1 \text{ y } \delta \ll 1.$$

a) hallar la matriz del polarizador si forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ .

b) Hallar la energía transmitida si se incide con luz linealmente polarizada según  $x$ .

c) idem b si incide polarizada según  $y$ .

3) Se tienen  $N$  polarizadores sucesivamente rotados en ángulos  $\pi/(2N)$ , encontrar la matriz del sistema. Hallar el límite para  $N$  tendiendo a  $\infty$ . Calcular la intensidad transmitida.

4) Una onda de polarización arbitraria incide sobre un espejo plano y se refleja sobre si misma. ¿Cómo escribe la onda reflejada cambiando al sistema  $z'=-z$  de modo que nuevamente se propague según  $z$  positivo. Note que al invertir  $z$ , debe invertir algún otro eje para mantener las orientaciones relativas de los ejes.

¿Cómo es ahora la matriz de un polarizador en este nuevo sistema? ¿y una lámina de onda?

5) Mostrar que el versor para una onda polarizada circularmente solo cambia en una fase ante una rotación de coordenadas. ¿Cuánto cambia la fase? Explique.

6) Encontrar la matriz de un polarizador seguido de una lámina de cuarto de onda orientada con su eje a un ángulo  $A$  respecto del eje del polarizador.

¿Cuál es el estado de polarización de la onda transmitida? ¿Depende del estado de polarización de la incidente? Explique.

¿Calcule la intensidad transmitida en función de  $A$ ?

7) Al sistema anterior se le agrega un espejo que refleja la onda sobre si misma. ¿Para qué ángulo  $A$  la transmisión del sistema a la vuelta es nula y para cuál es máxima?

8) Se realizan los siguientes experimentos: entre dos polarizadores rotados un ángulo  $A$  se colocan alternativamente un medio con actividad óptica que rota la polarización un ángulo  $B$  y un rotador de Faraday que también rota ese mismo ángulo.

Calcule para cada caso la transmisión del sistema y para que valor de  $B$  es máxima.

Para ese valor de  $B$  se refleja la luz nuevamente sobre el sistema. Calcule ahora la intensidad devuelta para cada caso. ¿En algún caso se puede hacer nula?

9) Se tiene un haz de luz y se quiere conocer su estado de polarización (el tipo de polarización y la orientación respecto de los ejes del laboratorio) realizando experimentos. Se cuenta con el siguiente material: un detector que mide intensidad de luz, un polarizador lineal con el eje de transmisión paralelo a la mesa óptica (la mesa sobre la que se trabaja), una lámina de media onda, y una lámina de cuarto de onda. Las dos últimas están montadas en soportes que permiten girarlas, y se conoce la ubicación de los ejes ordinarios. Describa un procedimiento experimental que contemple todos los casos que puedan presentarse.



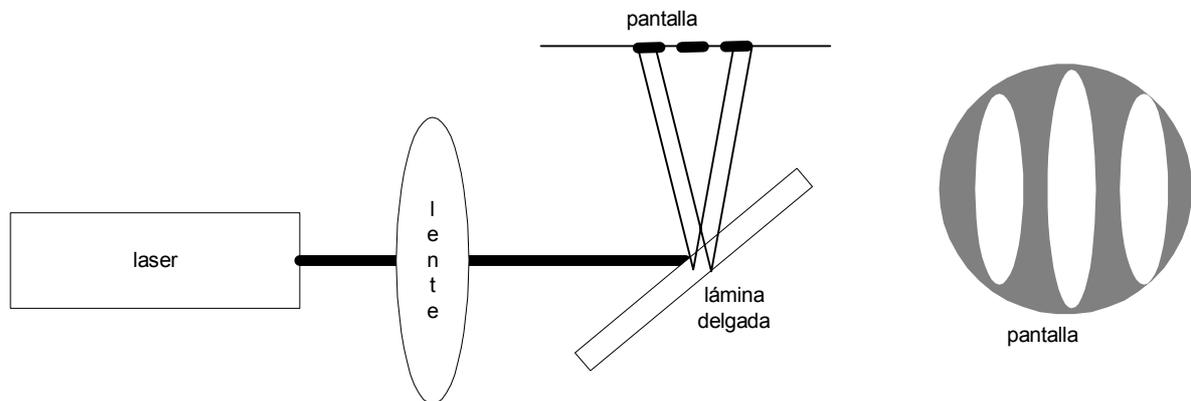
**¿Nuestro cerebro tiene incluido en su estructura las herramientas necesarias para entenderse a si mismo?**

## Capítulo 9 INTERFERENCIA

En este capítulo estudiaremos los efectos que aparecen cuando se superponen varias ondas en el espacio, dando lugar a máximos y mínimos de intensidad debido a que las mismas suman cada una con su fase, que depende del camino recorrido y por ende varía entre distintos puntos en que se observa. A menos que se indique lo contrario estudiaremos ondas escalares o luz linealmente polarizada.

### 9.1. Caso de estudio: reflexión en una lámina delgada

Observamos la reflexión en una lámina delgada (una fracción de milímetro) de un haz proveniente de un láser que ha sido enfocado para tener mayor divergencia de modo de hacer más fácilmente visible el fenómeno buscado (figura 9.1.1).



**Figura 9.1.1:** Un haz láser incide enfocado sobre una lámina delgada y su reflexión es observada en la pantalla. A la derecha una imagen típica de la pantalla en la que se observan zonas claras y oscuras.

La luz que llega a la pantalla proviene de las reflexiones en la primera y segunda cara de la lámina delgada. En distintos puntos de la pantalla la luz de ambas reflexiones llega luego de recorrer distintos caminos, por lo que la fase de cada uno de los términos puede ser distinta. Hay entonces dos contribuciones al campo eléctrico en cada punto,  $E_1$  proveniente de la primera cara y  $E_2$  proveniente de la segunda. El campo total será la suma de ambos y vendrá dado por:

$$E = E_1 + E_2 = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}) \quad 9.1.1$$

y la intensidad media será proporcional al módulo del campo al cuadrado que vale:

$$|E|^2 = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})(A_1 e^{-i\phi_1} + A_2 e^{-i\phi_2}) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad 9.1.2$$

Y según sea el valor de la diferencia de fases ( $\phi_1 - \phi_2$ ) será distinta la intensidad. A este fenómeno en el cual al superponer dos campos se producen diferencias de intensidad

según la fase relativa se lo denomina interferencia. El valor máximo corresponde al caso en que ambas componentes lleguen en fase, el coseno vale 1 y da:

$$|E|_{\max}^2 = (A_1 + A_2)^2 \quad 9.1.3$$

y el mínimo cuando el coseno vale  $-1$ , están en contrafase y vale:

$$|E|_{\min}^2 = (A_1 - A_2)^2 \quad 9.1.4$$

Y este resultado explica las zonas claras y oscuras observadas en el experimento.

## **9.2. Detectores cuadráticos, batidos y coherencia**

Cabe preguntarse porqué no se observa permanentemente este fenómeno al superponer luces de distintas fuentes. Para ello analicemos en primer lugar qué ocurre si las dos ondas superpuestas son de distinta frecuencia:

$$E = E_1 + E_2 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)} = e^{i(\bar{\omega} t + \bar{\phi})} (A_1 e^{i(\Delta\omega t + \Delta\phi)} + A_2 e^{-i(\Delta\omega t + \Delta\phi)}) \quad 9.2.1$$

Y si nuevamente promediamos, ahora sobre un tiempo  $2\pi / \bar{\omega}$ , la intensidad queda:

$$|E|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\phi) \quad 9.2.2$$

El término de “interferencia” ahora oscila en el tiempo a la frecuencia diferencia. Si en vez de promediar en un período de la portadora  $2\pi / \bar{\omega}$ , promediamos tiempos mayores que el período del batido, este término promedia a cero. Si la frecuencia diferencia es suficientemente pequeña, se podrá observar el batido. Por lo tanto el tiempo de observación es vital para determinar qué vemos. El ojo promedia en tiempos del orden de 0,1s, fotodiodos (detectores de luz semiconductores) promedian típicamente entre 1 $\mu$ s y 1ns (hay fotodiodos que llegan a 10ps). Un obturador mecánico del orden de 1ms. Por otro lado la frecuencia de la luz es del orden de  $10^{15}$ Hz. Por lo que aún en los detectores más rápidos se promedian muchos miles de ciclos.

Otra manera de ver la falta de monocromaticidad es pensar que la fase de la onda fluctúa en el tiempo. En el caso visto la fase varía linealmente con el tiempo

$$\Phi = \Delta\phi + \Delta\omega t \quad 9.2.3$$

pero podría ocurrir que el término en  $\Delta\phi$  a su vez fluctúe. El efecto sería el mismo, si promediamos en tiempos mayores que el de fluctuación, la contribución del término de interferencia se hace cero, si el tiempo es por el contrario mucho más corto, se lo puede observar.

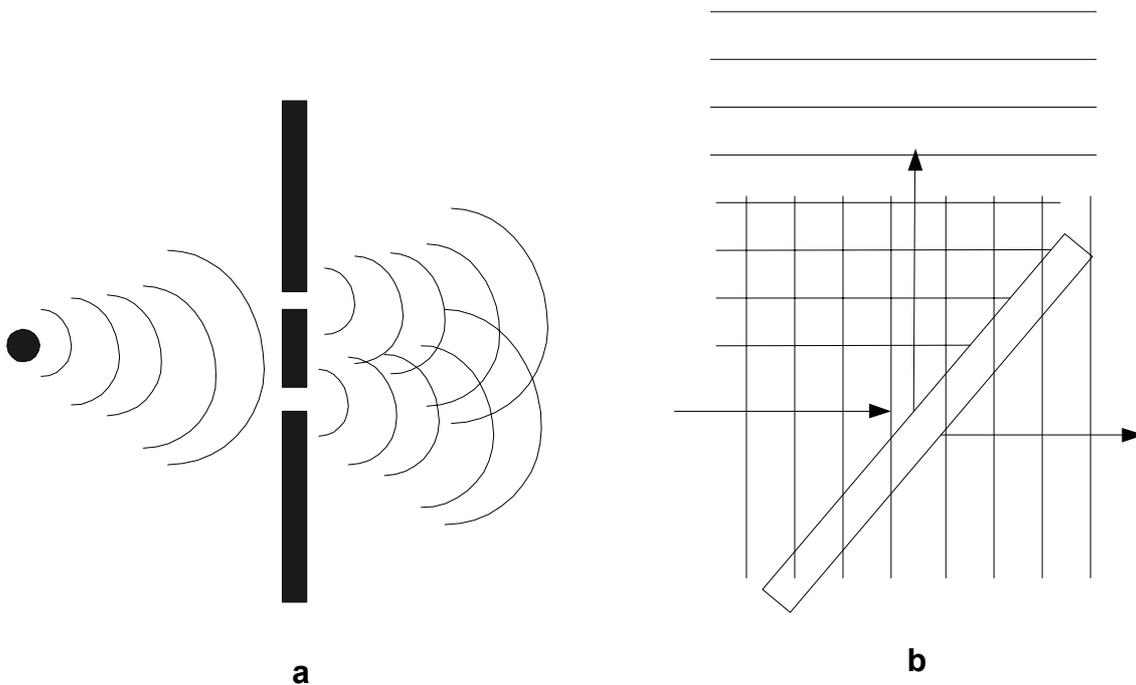
De lo anterior se concluye que si deseamos ver el fenómeno de interferencia cuando iluminamos con dos fuentes independientes es necesario mantener sus frecuencias muy estables e iguales, ¡si el detector es el ojo debo estabilizarla en 14 cifras! A la relación de fase fija entre dos fuentes se la denomina coherencia.

El mismo problema surge con distintos puntos de una fuente extensa como por ejemplo una lámpara. Cada punto emite en forma independiente, es decir no hay coherencia espacial. Por ello no se observa interferencia permanentemente en cada situación de iluminación. El caso del láser es diferente, ya que la emisión no se produce de manera espontánea desde cada átomo o molécula, sino que es estimulada por la luz que les llega. En la emisión estimulada, la emisión se produce en fase con la estimulación, y la radiación desde los distintos puntos es coherente.

En el caso de fuentes de sonido, ondas de radio u otras fuentes de menores frecuencias a la de la luz, es posible en general controlar simultáneamente la amplitud y la fase de la onda emitida. En estos casos es fácilmente implementable obtener fuentes independientes coherentes. En el caso de la luz y frecuencias mayores (UV, rayos X) es conveniente utilizar trucos para obtener el efecto de dos fuentes a partir de una sola.

Una manera es dividir el frente de ondas como se indica en la figura 9.2.1-a. La onda proveniente de una sola fuente es obstruida parcialmente por medio de pantallas opacas con aberturas, de modo que cada abertura se convierta en una nueva fuente. Como cada abertura emite una onda en fase con la onda incidente, de este modo las dos aberturas tienen una relación de fase bien definida.

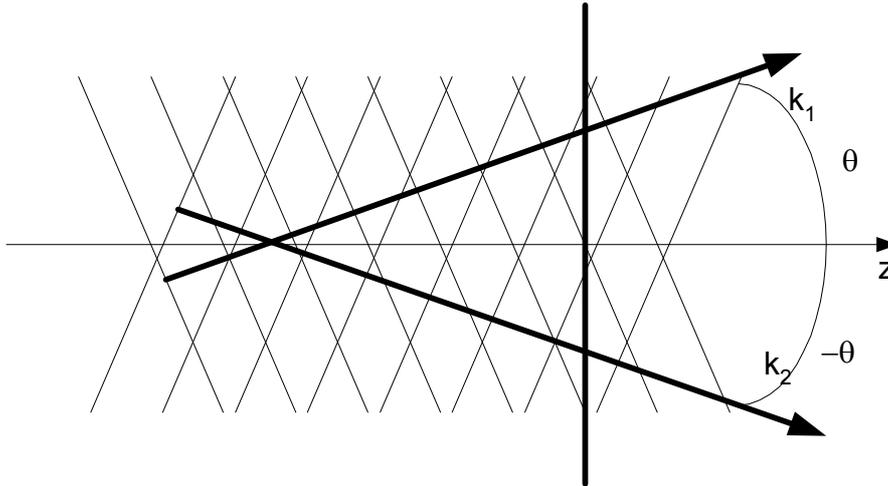
El otro método es dividir la amplitud de la onda, reflejando parte de la misma y transmitiendo el resto, como se indica en la figura 9.2.1-b. Veremos más adelante dispositivos basados en estos dos trucos, antes analizaremos algunos casos particulares de interés..



**figura 9.2.1** Dos métodos para generar dos ondas coherentes entre sí a partir de una sola fuente. a) división del frente de ondas (aberturas) b) división de amplitudes (espejo semitransparente).

### **9.3. Interferencia entre dos ondas planas**

Supongamos que dos ondas planas de igual frecuencia se propagan con su vector de onda formando ángulos  $\theta$  y  $-\theta$  respecto del eje  $z$  como indica la figura 9.3.1. En cada punto del espacio la diferencia de fases entre ella será distinto, por lo que en una pantalla ubicada como se indica se verán zonas claras y oscuras (interferencia).



**figura 9.3.1** Dos ondas planas de vector de onda  $k_1$  y  $k_2$  interfieren en todo el espacio. Se observa la intensidad en una pantalla perpendicular al eje  $z$ . Las líneas paralelas corresponden a planos de igual fase de cada una de las ondas.

Si tomamos como eje  $x$  al contenido en el plano, las ondas no tendrán componente  $y$  del vector  $k$ . Se escriben como:

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 e^{i(\omega t - k_z z + k_x x + \phi_1)} \\ E_2 &= A_2 e^{i(\omega t - k_z z - k_x x + \phi_2)} \end{aligned} \quad 9.3.1$$

La intensidad se obtiene del módulo al cuadrado del campo, que de 9.1.2 queda:

$$|E|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(2k_x x + \phi_1 - \phi_2) \quad 9.3.2$$

que tiene máximos cada vez que el coseno vale 1 y mínimos cuando vale -1, o sea:

$$2k_x x_{\max} + \phi_1 - \phi_2 = 2m\pi \quad 9.3.3$$

$$2k_x x_{\min} + \phi_1 - \phi_2 = (2m + 1)\pi \quad 9.3.4$$

con  $m$  entero. Se obtienen máximos y mínimos que son planos a valores de  $x$  constantes. En la pantalla se observan franjas claras y oscuras paralelas al eje  $y$ . La distancia entre máximos o mínimos es idéntica ( $\Delta x$ ) y se obtiene de restar dos posiciones consecutivas:

$$2k_x \Delta x = 2\pi \quad 9.3.5$$

y poniendo  $k_x$  en término del ángulo  $\theta$  y la longitud de onda  $\lambda$ :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\text{sen}(\theta)} \quad 9.3.6$$

El mínimo espaciado entre franjas (interfranja) ocurre para el máximo valor del seno, o sea cuando las ondas son contrapropagantes (onda estacionaria). En este caso la interfranja vale media longitud de onda. Cualquier valor mayor es posible ajustando el ángulo de propagación.

Los valores de intensidad máximo y mínimo están dados por las ecuaciones 9.1.3 y 9.1.4 y la visibilidad de las franjas (o contraste) se define como la semidiferencia dividida por el valor medio (o equivalentemente la diferencia dividida la suma):

$$C = \frac{|E|_{\max}^2 - |E|_{\min}^2}{|E|_{\max}^2 + |E|_{\min}^2} = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} \quad 9.3.4$$

que toma su valor máximo  $C=1$  cuando ambas amplitudes son iguales y el mínimo cuando una de las amplitudes es cero.

#### **9.4. Interferencia entre dos ondas esféricas (fuentes puntuales)**

Analizaremos ahora otra situación particular cual es la de dos fuentes puntuales que emiten sendas ondas esféricas. Los campos resultantes en todo el espacio se escriben como suma de las siguientes dos contribuciones:

$$E_1 = \frac{A_1}{r_1} e^{i(\omega t - kr_1 - \phi_1)} \quad 9.4.1$$

$$E_2 = \frac{A_2}{r_2} e^{i(\omega t - kr_2 - \phi_2)}$$

donde las distancias están definidas en la figura 9.4.1.

Nuevamente usando la ecuación 9.1.2 podemos determinar los puntos en que la intensidad es máxima (interferencia constructiva) y aquellos en que es mínima (interferencia destructiva). La expresión resulta:

$$|E|^2 = \frac{A_1^2}{r_1^2} + \frac{A_2^2}{r_2^2} + 2 \frac{A_1A_2}{r_1r_2} \cos[k(r_1 - r_2) + \phi_1 - \phi_2] \quad 9.4.2$$

Para hallar los máximos y mínimos habría que derivar respecto de la posición de P e igualar a cero. **Si las distancias son grandes respecto de la longitud de onda**, el coseno varía más rápidamente que las inversas de  $r$ , y los máximos y mínimos estarán muy cerca de los puntos en que el coseno vale respectivamente 1 y -1, o sea:

$$k(r_1 - r_2)_{\max} + \phi_1 - \phi_2 = 2m\pi \quad 9.4.3$$

$$k(r_1 - r_2)_{\min} + \phi_1 - \phi_2 = (2m + 1)\pi \quad 9.4.4$$

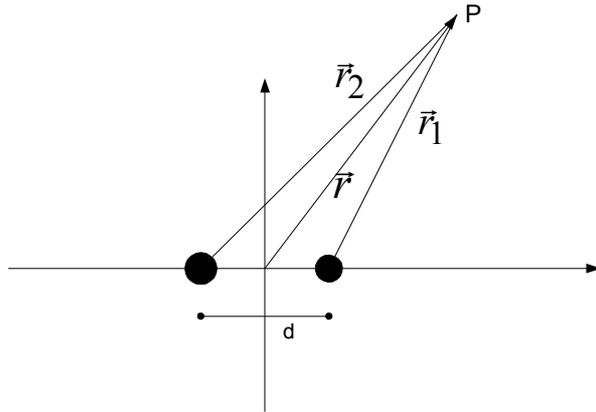


figura 9.4.1 Dos fuentes puntuales emiten sendas ondas esféricas. Se calcula la interferencia en un punto arbitrario P.

y en función de la longitud de onda:

$$(r_1 - r_2)_{\max} = m\lambda + (\phi_1 - \phi_2) \frac{\lambda}{2\pi} \quad 9.4.5$$

$$(r_1 - r_2)_{\min} = (m + 1/2)\lambda + (\phi_1 - \phi_2) \frac{\lambda}{2\pi} \quad 9.4.6$$

Estas dos ecuaciones describen superficies que cumplen con la condición de que la diferencia de distancia a dos puntos fijos (focos) sea una constante. Esta es la definición del hiperboloide de revolución. En el plano de la figura son hipérbolas, las fuentes son los focos de las hipérbolas y por la simetría del problema la superficie debe ser invariante ante rotaciones alrededor del eje que une las dos fuentes. Esto se ilustra en la figura 9.4.2.

Es sencillo calcular los puntos en que los hiperboloides cortan al eje de las fuentes ( $z$ ). En este eje y entre las dos fuentes (cuidado con los signos de los módulos) es:

$$(r_1 - r_2)_{\max} = \left(\frac{d}{2} - z_{\max}\right) - \left(\frac{d}{2} + z_{\max}\right) = -2z_{\max} = m\lambda + (\phi_1 - \phi_2) \frac{\lambda}{2\pi} \quad 9.4.7$$

que coincide con la expresión para ondas contrapropagantes con la salvedad de que sólo vale en el segmento entre las dos fuentes. En las semirrectas a izquierda de la fuente izquierda y derecha de la fuente derecha las ondas son copropagantes, y no hay máximos y mínimos de interferencia, la diferencia de fases es constante en estas semirrectas.

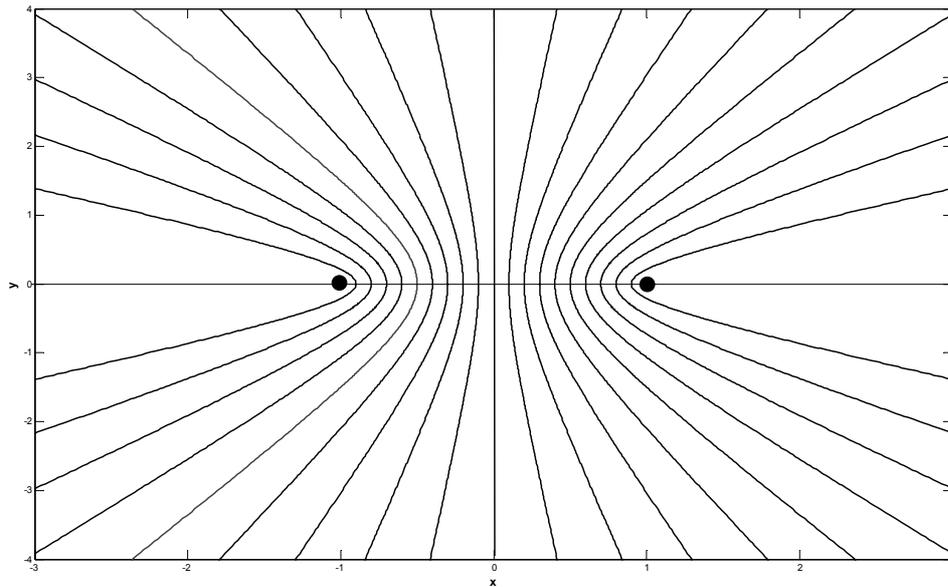


figura 9.4.2. Hiperboloides de revolución con focos en las fuentes (corte xy).

Si observamos las figuras de interferencia en una pantalla perpendicular al eje de las fuentes, por la simetría de revolución veremos circunferencias claras y oscuras. Si cortamos con una pantalla paralela a dicho eje (por ejemplo paralela a la hoja), veremos hipérbolas con focos comunes.

### **9.5. Interferencia entre dos fuentes puntuales en aproximación paraxial**

Analizaremos dos situaciones límite, lejos de las fuentes en la dirección perpendicular al eje y lejos en la dirección del eje que une las fuentes. El primer caso se ilustra en la figura 9.5.1

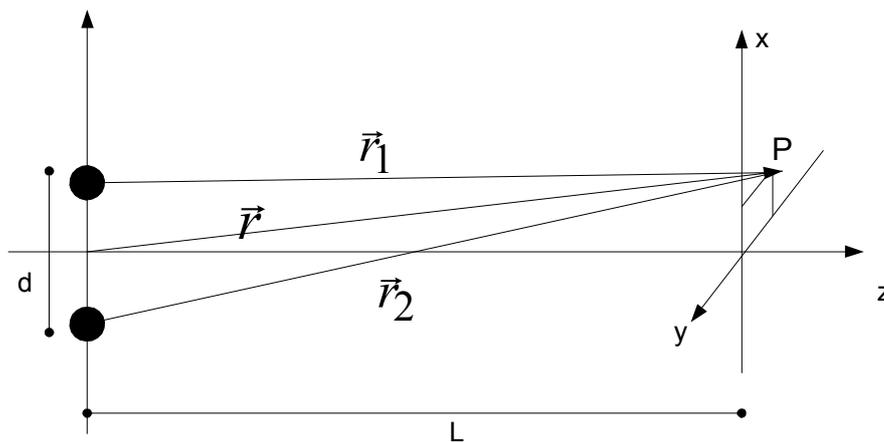


figura 9.5.1: análisis de la interferencia en un plano perpendicular a las fuentes.

Aproximaremos las coordenadas del punto de análisis ( $P$ ) a segundo orden (aproximación paraxial):

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + L^2} \cong L + \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{2L} \quad 9.5.1$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + L^2} \cong L + \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{2L} \quad 9.5.2$$

y queda a segundo orden en las coordenadas transversales  $(x,y)$ :

$$r_1 - r_2 = \frac{-xd}{L} \quad 9.5.3$$

Esta aproximación es equivalente a suponer que el punto es tan lejano que los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son paralelos. De 9.4.5 y 9.4.6 las posiciones de los máximos y mínimos son

$$x_{\max} = \frac{m\lambda L}{d} \quad 9.5.4$$

$$x_{\min} = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda L}{d}$$

Quedan franjas rectas de máximos y mínimos equidistantes. Comparando con la figura de los hiperboloides, corresponde a mirar en la zona central, en que las hipérbolas se aproximan a rectas.

En la expresión 9.4.2 en esta aproximación queda:

$$|E|^2 = \frac{A_1^2}{L^2} + \frac{A_2^2}{L^2} + 2 \frac{A_1 A_2}{L^2} \cos\left(\frac{kdx}{L} + \phi_1 - \phi_2\right) \quad 9.5.5$$

donde además se ha aproximado la distancia en la expresión de la amplitud por una constante, del mismo modo que hicimos al hacer la aproximación paraxial para el estudio de ondas esféricas. Y en el caso en que las dos amplitudes son iguales:

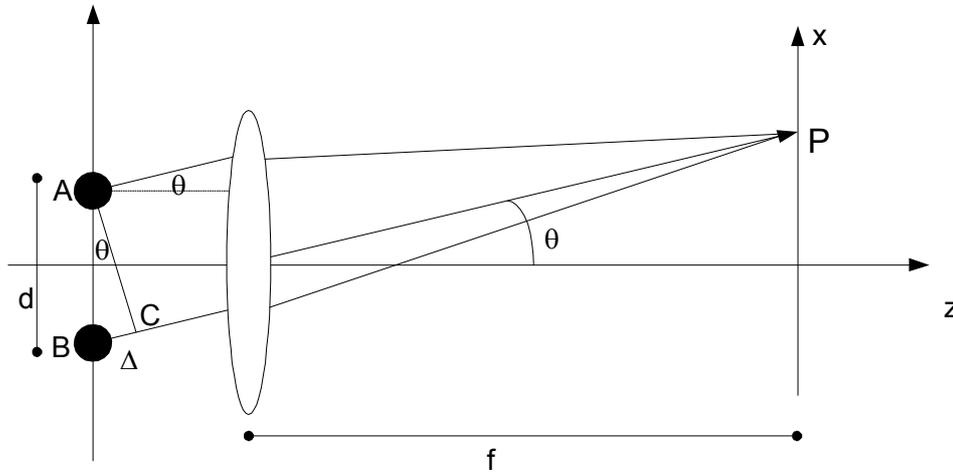
$$|E|^2 = 2 \frac{A^2}{L^2} \left[1 + \cos\left(\frac{kdx}{L} + \phi_1 - \phi_2\right)\right] = \frac{4A^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{kdx}{2L} + \phi_1 - \phi_2\right) \quad 9.5.6$$

que en los mínimos llega a cero y en los máximos cuadruplica la intensidad de cada fuente.

### ***El truco de la lente:***

Ya que estamos en la aproximación paraxial podemos aprovechar las lentes para mejorar el esquema experimental haciendo que converjan a un mismo punto en la pantalla los rayos que efectivamente son paralelos (figura 9.5.2). Esto permite relajar a

condición sobre la distancia a la que debo ubicar la pantalla, que ahora debe ir en el plano focal de la lente.



**figura 9.5.2:** con la pantalla ubicada en el plano focal de la lente, rayos paralelos convergen al mismo punto y la diferencia de caminos resulta  $\Delta$ .

Analizando la figura 9.5.2 vemos que si una onda plana incide en la lente formando un ángulo  $\theta$ , se focaliza en el punto P. Por lo tanto los caminos ópticos (las fases divididas el número de onda) AP y CP son iguales. La diferencia entre AP y BP es entonces:

$$\overline{BC} = \Delta = d \sin(\theta) \tag{9.5.7}$$

expresión que coincide con 9.5.3 dentro de la aproximación de ángulos pequeños.

Si en vez de ubicar la pantalla en el foco imagen de la lente, ubicamos las fuentes en el foco objeto, cada onda esférica será transformada por la lente en una onda plana, y convertimos el problema en el analizado en el punto 9.4. de dos ondas planas propagándose en ángulo. El ángulo de propagación será

$$\tan(\theta) = \frac{d}{2f} = \frac{x}{L} \tag{9.5.8}$$

El otro caso particular es analizar la figura de interferencia con la pantalla ubicada perpendicular al eje que une las fuentes. Esta situación se ilustra en la figura 9.5.3, en la imagen superior. Como se discutió se obtienen circunferencias con máximos y mínimos sucesivos. La aproximación paraxial se puede hacer del mismo modo que antes, o utilizando el truco de la lente (figura 9.5.3 inferior). En este caso las fuentes no pueden ir ambas ubicadas en el plano focal por lo que es necesario optar por ubicar la pantalla en el plano focal imagen. La diferencia de caminos es ahora

$$\overline{AC} = \Delta = d \cos(\theta) \tag{9.5.9}$$

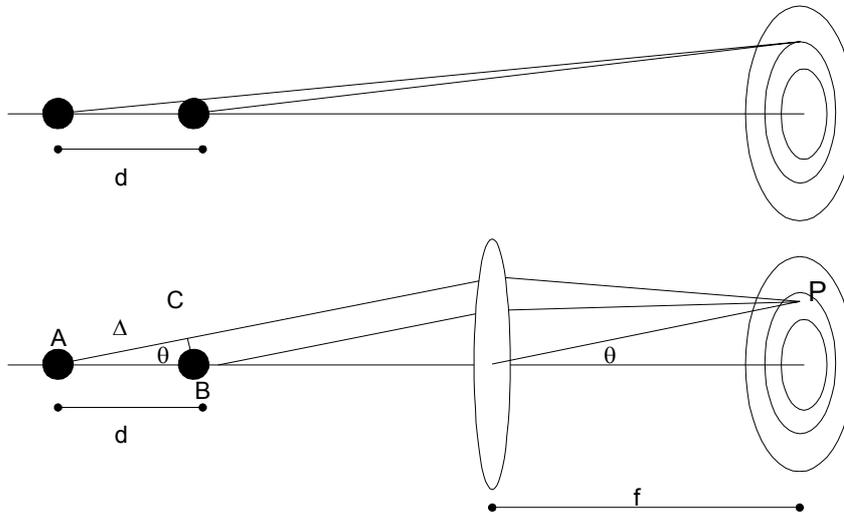
y los máximos aparecerán para los ángulos que satisfagan:

$$k\Delta + \phi_1 - \phi_2 = m2\pi \tag{9.5.10}$$

o sea:

$$\cos(\theta) = \frac{m\lambda}{2d} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{kd} \quad 9.5.11$$

En este caso las franjas no quedan equiespaciadas.



**figura 9.5.3:** Interferencia en una pantalla colocada perpendicular al eje que une las fuentes. Superior: en aproximación paraxial con la pantalla lejos de las fuentes. Inferior: usando el truco de la lente y la pantalla en el plano focal.

### **9.6. Interferómetros. Young y Michelson**

Hasta ahora hemos discutido los experimentos de manera conceptual con fuentes idealizadas. Hemos mencionado el problema de la coherencia y la necesidad de generar las dos fuentes a partir de una sola. Hay muchas maneras distintas de lograrlo, y cada configuración particular recibe el nombre de su inventor. Veremos a modo de ejemplo uno de cada tipo.

#### ***Interferómetro de Young:***

Es un caso de división del frente por medio de aberturas. Se lo ilustra en la figura 9.6.1. Dos ranuras muy próximas son iluminadas por una única fuente. Las ranuras pasan a ser ahora fuentes secundarias de ondas que interfieren en la pantalla. Si ilumino con una onda plana con el frente de ondas coincidente con la pantalla las dos ranuras estarán en fase y emitirán sendas ondas aproximadamente cilíndricas. El cálculo para la aproximación paraxial se puede hacer igual que para la figura 9.5.1 o se puede usar el truco de la lente presentado en la figura 9.5.2. Los resultados son idénticos a los ya presentados.

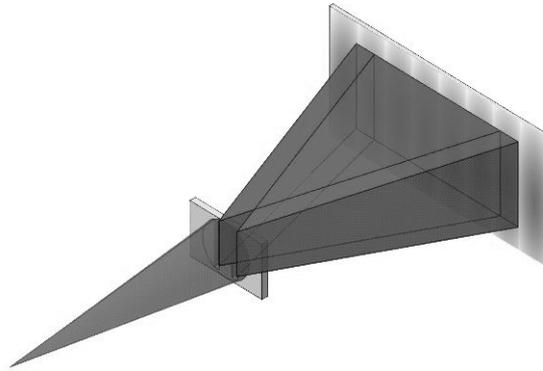


figura 9.6.1. Interferómetro de Young. Una fuente ilumina dos ranuras paralelas que pasan a ser fuentes secundarias que interfieren en la pantalla.

Si las rendijas son iluminadas con una onda plana incidiendo en ángulo, habrá un desfase inicial entre las dos ranuras dado por el retardo del frente de ondas en llegar a la ranura más lejana (ver problema 9).

### Interferómetro de Michelson:

Este interferómetro utiliza un espejo semitransparente para dividir amplitudes. El esquema es ilustrado en la figura 9.6.2. La luz de la fuente es dividida por el espejo semitransparente ST (también llamado divisor de haz). La luz reflejada incide en el espejo E2 como si viniese de la imagen  $I_2$  y vuelve sobre si misma luego de recorrer dos veces la distancia  $L_2$  (ida y vuelta) como si viniese de la imagen  $I_2'$ . La luz transmitida por ST incide en el espejo E1 y vuelve como si proviniese de la imagen  $I_1$  habiendo recorrido dos veces  $L_1$ . Al reflejarse en ST va hacia la pantalla como si proviniese de la imagen  $I_1'$ . La diferencia de caminos recorridos a lo largo del eje, y por ende la distancia entre las dos fuentes imágenes vistas desde la pantalla es:

$$\Delta = 2(L_1 - L_2) \quad 9.6.1$$

pero además de estas distancias hay que tener en cuenta que la fase puede cambiar en la reflexión en los espejos o en la transmisión de ST. Por lo tanto para determinar la figura de interferencia hay que suponer dos fuentes puntuales con amplitudes y fases dadas por:

$$E_1 = At_{st}r_1r_{st}'e^{-ik(2L_1+L_0)}E_F \quad 9.6.2$$

$$E_2 = Ar_{st}r_1t_{st}'e^{-ik(2L_2+L_0)}E_F \quad 9.6.3$$

donde  $E_F$  es la onda esférica emitida por la fuente,  $r_{st}$  y  $r_{st}'$  son los coeficientes de reflexión del espejo semitransparente desde cada lado (difieren en la fase),  $t_{st}$  es el coeficiente de transmisión y  $r_1$  y  $r_2$  los coeficientes de reflexión de los espejos E1 y E2 respectivamente. El sistema se redujo a la interferencia presentada en el punto anterior para la pantalla perpendicular al eje de las dos fuentes, pero hay que tener en cuenta las fases adicionales que surgen de las reflexiones.

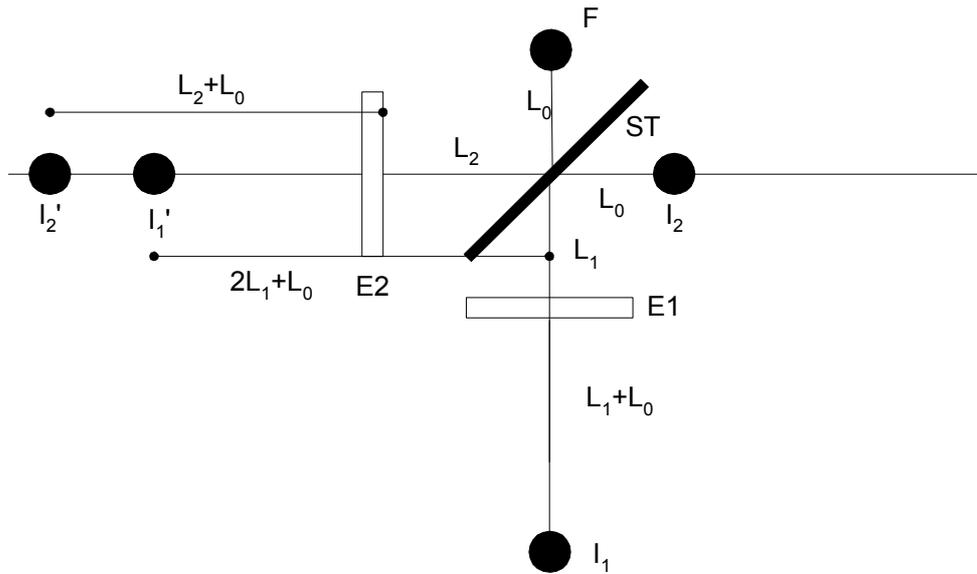


Figura 9.6.2: interferómetro de Michelson. La luz proveniente de la fuente F es dividida por el espejo semitransparente ST y cada brazo es reflejado nuevamente por sendos espejos E1 y E2. Visto desde la pantalla la luz parece provenir de las imágenes I<sub>2</sub>' e I<sub>1</sub>'.

Los interferómetros son utilizados para medir con alta precisión longitudes de onda de fuentes de luz o distancias a partir de una fuente conocida. El interferómetro de Michelson está particularmente difundido para comparar longitudes de onda. Para ello se mide el número de franjas de interferencia que pasan por un detector ubicado en el eje para la onda conocida y la desconocida mientras se barre la distancia de una de los brazos una distancia L. El número de máximos que pasaron no depende de las fases con que reflejan los espejos, ya que se está calculando una diferencia y se cancelan. Si pasan M franjas de la fuente 1 y N de la fuente 2, es:

$$2L = M\lambda_1 = N\lambda_2 \tag{9.6.4}$$

con lo que

$$\lambda_2 = \frac{M}{N} \lambda_1 \tag{9.6.5}$$

y el error de la medición proviene de que no se cuentan fracciones de franjas, o sea que

$$\Delta M = \pm 1 \quad \Delta N = 0 \tag{9.6.6}$$

y el error en la longitud de onda es:

$$\Delta\lambda_2 = \left( \frac{1}{N} + \frac{M}{N^2} \right) \lambda_1 = \frac{M}{N} \lambda_1 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) = \lambda_2 \left( \frac{\lambda_1}{2L} + \frac{\lambda_2}{2L} \right) \tag{9.6.7}$$

o más compacto

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2L} \tag{9.6.8}$$

por lo que el error relativo en la determinación de la longitud de onda decrece con el largo del barrido. Un barrido de 1m de uno de los brazos y para longitudes de onda del orden de 500nm da un error menor a una parte por millón. Escrita en término del número de onda  $k$ , la expresión 9.6.8 queda:

$$L\Delta k \approx 2\pi \quad 9.6.9$$

que es un resultado fundamental común a todos los interferómetros y sobre el que volveremos más adelante.

Un uso alternativo de este interferómetro sería medir distancias conocida la longitud de onda. En este caso si pasan  $M$  máximos de interferencia la distancia barrida es:

$$L = M\lambda \quad 0.6.10$$

y el error en la longitud es de una longitud de onda. Este error se puede disminuir aún más si en vez de contar máximos medimos la señal en función de la posición y ajustamos la expresión teórica. Se pueden medir de esta manera fracciones de longitud de onda.

### ***Inciendo con ondas planas***

Si en el interferómetro de Michelson incidimos con ondas planas en vez de ondas esféricas, lo que podemos hacer simplemente poniendo la fuente puntual en el plano focal de una lente, el problema se reduce no al de dos imágenes puntuales sino al de dos ondas planas. Si el interferómetro está perfectamente alineado, con el divisor de haz a 45grados y los dos espejos perpendiculares entre si, las dos ondas planas salen colineales y tendremos máximos o mínimos en la potencia reflejada según sea la diferencia de fase. Barriendo el largo de un brazo pasamos entre máximos y mínimos sucesivamente. La conservación de la energía requiere que si la luz no sale hacia la pantalla (figura 9.6.2) debe estar volviendo a la fuente y viceversa. Si uno de los espejos es desalineado ligeramente las ondas saldrán formando un ángulo y se verán las franjas de interferencia de ondas planas no colineales.

### **9.7. Visibilidad de las franjas y coherencia**

Hemos supuesto hasta ahora que la fuente era monocromática para hacer nuestras cuentas. Una fuente monocromática requiere que la amplitud sea constante para todo tiempo y la fase también, cosa no realizable en la práctica. ¿Qué pasa si en realidad tenemos una superposición de un continuo de frecuencias? Ya vimos en 9.2 que si hay una leve diferencia entre dos frecuencias que observemos el batido depende del tiempo de integración del detector. Analizaremos el caso extremo de un detector infinitamente lento (por ejemplo una placa fotográfica). Vimos en 9.2 que en este caso frecuencias distintas no interfieren entre sí (el batido se promedia a cero) y simplemente se suman las intensidades. Entonces si el campo es la suma de las contribuciones de muchas frecuencias  $\omega_i$  la intensidad resultante será la suma de las intensidades  $I_i = I(\omega_i)$ . Cada una de ellas es resultado de la interferencia de sus dos réplicas producidas en el interferómetro. Ejemplifiquemos con un Michelson que da sus dos amplitudes iguales, será entonces:

$$I_i = I_{i0}(1 + \cos(\Delta\phi_i + 2k_i\Delta L)) \quad 9.7.1$$

donde  $I_{i0}$  es la intensidad incidente en el interferómetro (supuesto sin pérdidas).

Escribiendo la diferencia de caminos en término del tiempo de tránsito como:

$$k_i 2L = \frac{\omega_i}{c} 2L = \omega_i \frac{2L}{c} = \omega_i \tau \quad 9.7.2$$

La intensidad total, que, si promediamos a tiempo infinito, es la suma de las intensidades, quedará:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i I_{i0}(1 + \cos(\Delta\phi_i + \omega_i \tau)) = \sum_i I_{i0} + \sum_i I_{i0} \cos(\Delta\phi_i + \omega_i \tau) \quad 9.7.3$$

El primer sumando del último término es la intensidad total incidente y el segundo, que es una función de  $\tau$ , es la transformada de Fourier de cosenos de  $I_{i0}$ . Este segundo término es el que da la figura de interferencia, y sabemos de las transformadas de Fourier que hay una relación entre la duración en el tiempo ( $\tau$ ) y el ancho de banda utilizado para construirlo, que es:

$$\Delta\omega\Delta\tau \approx 2\pi \quad 9.7.4$$

que nos indica que la figura de interferencia va a tener su máxima visibilidad en la región en que la diferencia de tiempo de tránsito sea menor que la inversa del ancho de banda. Si deseamos una figura de interferencia visible en una región más amplia es necesario usar luz más monocromática.

Otra manera de ver lo que ocurre es pensar que la interfranja (distancia entre máximos) depende de la longitud de onda. Si en un punto todas las frecuencias coinciden en dar un máximo, a medida que me alejo de dicho punto los máximos se superponen cada vez menos, hasta que finalmente se desdibujan (un color da máximo donde otro da mínimo) y se pierde contraste. Esto se ilustra en la figura 9.7.1 donde se graficaron superpuestas las figuras de interferencia correspondientes a 5 frecuencias próximas y luego la figura resultante de la suma de ellas. Se ve que alejándose del centro las distintas figuras dejan de superponerse entre si y se van desdibujando las franjas en la suma. En la tercera figura se ilustra el caso en que hay una superposición continua de frecuencias próximas en vez de un número discreto.

Al tiempo de retardo máximo en que se mantiene una visibilidad apreciable de las franjas de interferencia se lo denomina tiempo de coherencia de la fuente y no es otra cosa que la inversa de su ancho de banda. La distancia que recorre la luz en ese tiempo se denomina longitud de coherencia.

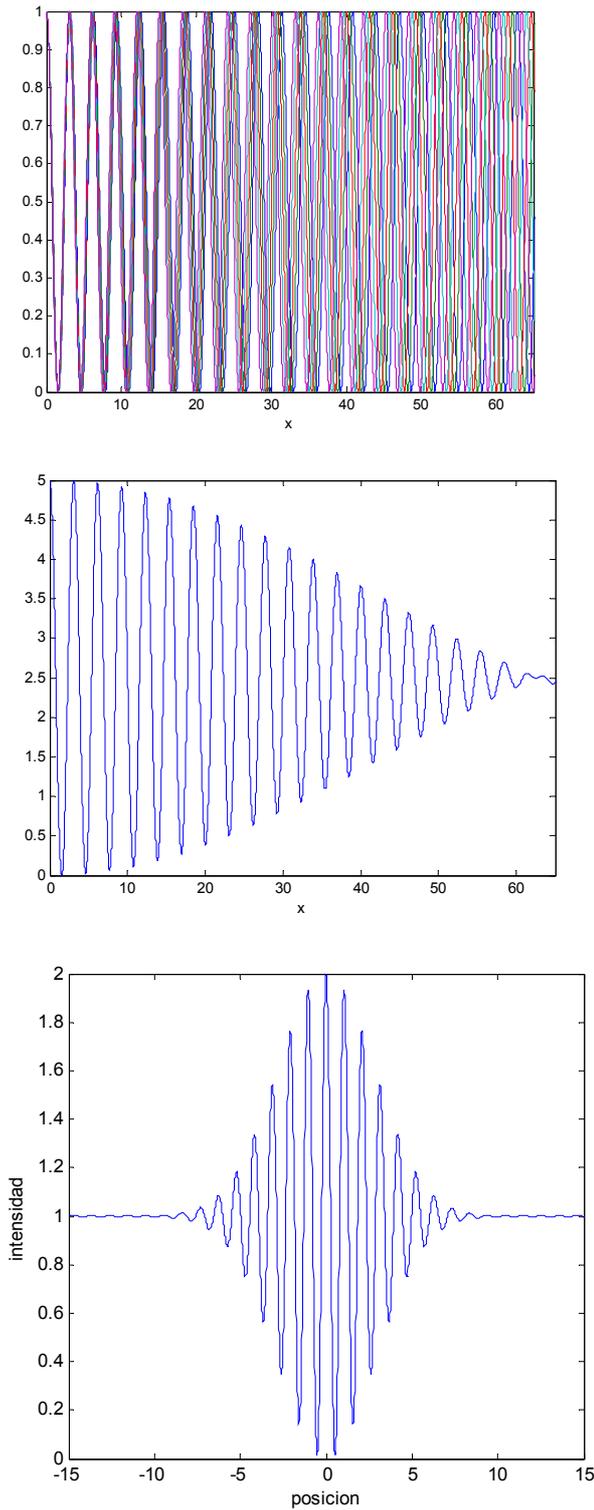
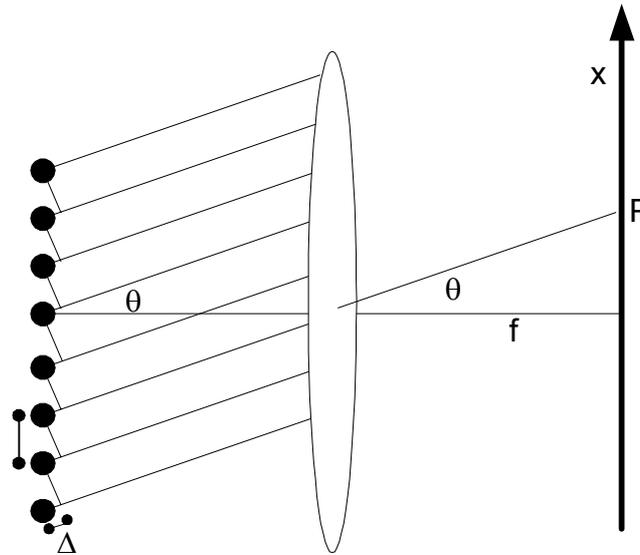


Figura 9.7.1. Arriba: superposición de las figuras de interferencia de 5 ondas de frecuencia ligeramente distintas. Medio: suma de dichas contribuciones, figura de interferencia resultante de la superposición. Abajo: figura resultante de superponer un continuo de frecuencias próximas.

### 9.8. Interferencia entre $N$ fuentes puntuales

Hasta ahora analizamos el caso en que se superponen solamente dos fuentes. Veremos ahora algunos casos en que el número de fuentes es mayor. A mayor número de fuentes es de esperar una estructura de la figura de interferencia más compleja. Habrá puntos en que interfieran constructivamente algunas y destructivamente otras, según las respectivas fases con que llegan. No necesariamente hay puntos en que todas están en fase. Como caso más simple, a fin de ilustrar algunos nuevos hechos relevantes analizaremos el caso de  $N$  fuentes idénticas equiespaciadas (figura 9.8.1).



**figura 9.8.1**  $N$  fuentes idénticas equiespaciadas que emiten en fase. Se puede utilizar el truco de la lente u observar a grandes distancia.  $d$ : distancia entre fuentes consecutivas.  $\Delta$ : diferencia de caminos entre fuentes contiguas al observar en la dirección dada por  $\theta$ .

Analizaremos solamente lo que ocurre en el plano de la figura ( $xz$ ). Este caso se puede analizar en dos situaciones, en la aproximación paraxial con una lente u observando a grandes distancias, de modo de considerar los rayos que interfieren como paralelos. En los dos casos la diferencia de caminos entre fuentes contiguas es:

$$\Delta = d \sin(\theta) \quad 9.8.1$$

Si numeramos las  $N$  fuentes desde 0 hasta  $(N-1)$ , la diferencia de caminos entre la fuente  $m$  y la 0 es  $m$  veces la expresada en 9.8.1. La diferencia de fase asociada es:

$$\phi_m = m k d \sin(\theta) = m \phi_0 \quad 9.8.2$$

y el campo en el punto  $P$  será la suma de las  $N$  contribuciones:

$$E_P = e^{i(\omega t - kL_{comun})} \sum_{i=0}^{N-1} A e^{i\phi_m} = e^{i(\omega t - kL_{comun})} A \sum_{i=0}^{N-1} e^{im\phi_0} \quad 9.8.3$$

Debemos pues resolver esta sumatoria, que se puede escribir como:

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{im\phi_0} = \sum_{i=0}^{N-1} (e^{-i\phi_0})^m = \frac{e^{-i\phi_0 N} - 1}{e^{-i\phi_0} - 1} = \frac{e^{-i\frac{\phi_0 N}{2}} \left( e^{-i\phi_0 N/2} - e^{i\phi_0 N/2} \right)}{e^{-i\phi_0/2} \left( e^{-i\phi_0/2} - e^{i\phi_0/2} \right)} \quad 9.8.4$$

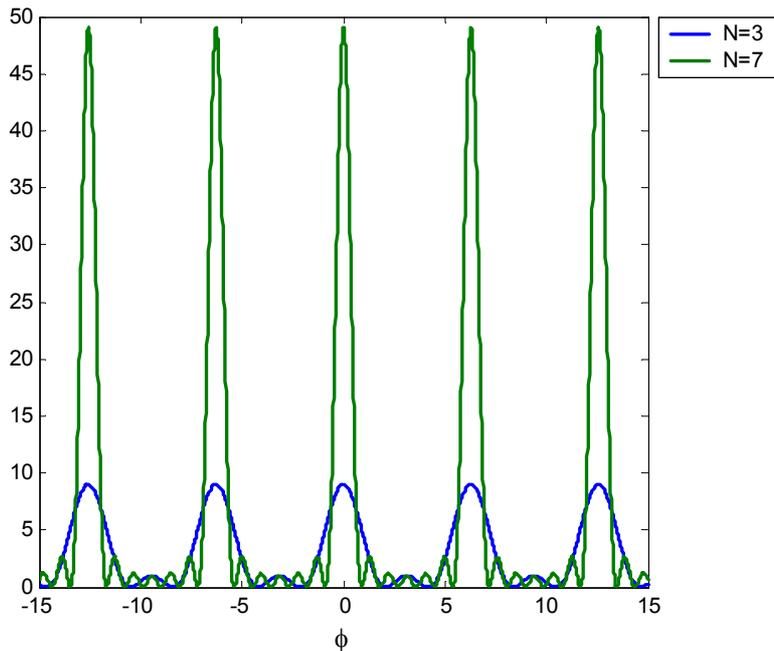
que puede escribirse como un cociente de senos, por lo que en 9.8.3 queda:

$$E_P = A e^{i\phi_{comun}} \frac{\text{sen}(\phi_0 N / 2)}{\text{sen}(\phi_0 / 2)} \quad 9.8.5$$

donde se han agrupado todos los términos de fase en uno común. La intensidad será proporcional al módulo al cuadrado, obteniéndose:

$$|E_P|^2 = A^2 \frac{\text{sen}^2(\phi_0 N / 2)}{\text{sen}^2(\phi_0 / 2)} \quad 9.8.7$$

En la figura 9.8.2 se grafica para el caso de N=3 y N=7. Se observa que a mayor número de fuentes se obtiene mayor intensidad y picos más angostos.



**Figura 9.8.2.** Interferencia entre 3 y entre 7 fuentes.

Analizando la expresión 9.8.7 observamos que el denominador es periódico en  $\phi_0$  (se repite cada  $\pi$ ) y el numerador se repite con una frecuencia  $N$  veces mayor. Por lo tanto el cociente es periódico cada vez que  $\phi_0$  varía en  $\pi$ . Los valores máximos los toma cuando se anula el denominador (también se anula el numerador), y los mínimos (que valen cero) ocurren cuando el numerador se anula y no se anula el denominador. El máximo es pues:

$$|E_P|^2 = A^2 \lim_{\phi_0 \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}^2(\phi_0 N / 2)}{\text{sen}^2(\phi_0 / 2)} \right) = A^2 N^2 \quad 9.8.8$$

que ocurre cuando:

$$\frac{\phi_0}{2} = \frac{kdsen(\theta)}{2} = m\pi \quad 9.8.9$$

o equivalentemente:

$$dsen(\theta) = m\lambda \quad 9.8.10$$

o sea cuando la diferencia de caminos entre fuentes consecutivas es un número entero de longitudes de onda. Al número  $m$  se lo denomina orden del pico de interferencia. La dependencia de la energía con el número de fuentes (9.8.8) da un resultado esperable, todas las contribuciones son en fase, tengo  $N$  veces la amplitud de cada una, y la intensidad crece  $N^2$  veces la de una fuente.

Con un análisis similar podemos encontrar el primer mínimo después del máximo y así estimar el ancho de cada pico (son todos iguales si los expresamos en  $\phi_0$ ). El primer mínimo se obtiene cuando se anula el numerador en 9.8.8, que es cuando el argumento del seno vale  $\pi$ .

$$\pi = \frac{\phi_0 N}{2} \quad 9.8.11$$

que es  $N$  veces menor que la distancia entre máximos. O sea que al incluir más fuentes la intensidad crece cuadráticamente con el número de fuentes y el ancho del pico decrece linealmente. Esto es razonable pues la energía total debe crecer linealmente con el número de fuentes.

Del análisis de las expresiones 9.8.8 y 9.8.11 se ve que, como se dijo, los máximos ocurren cuando las fuentes vecinas están en fase, y los mínimos cuando están en fase recién la fuente 0 con la  $N$ , o sea cuando la primera está en contrafase con la del medio, la segunda con la siguiente y cada fuente de una mitad interfiere destructivamente con una de la otra mitad.

Cabe notar también que como el seno tienen valor máximo 1 y mínimo  $-1$ , los valores posibles del entero  $m$  en 9.8.10 están acotados por:

$$-\frac{d}{\lambda} \leq m \leq \frac{d}{\lambda} \quad 9.8.12$$

o equivalentemente que la máxima diferencia de caminos posible entre fuentes sucesivas es la distancia entre fuentes.

Como la posición de los máximos depende de la longitud de onda, es posible utilizar un interferómetro de este tipo para determinar las frecuencias presentes en una dada fuente de luz. Un instrumento utilizado con estos fines se denomina espectrómetro. En tal caso es necesario determinar cuán separadas deben estar dos longitudes de onda (o dos frecuencias) para que el instrumento detecte dos picos separados y nos permita resolver la amplitud de cada componente. Para ello hay que comparar la separación entre los dos picos con el ancho (figura 9.8.3). Si tenemos dos longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , sus picos estarán ubicados en sendos ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , tal que:

$$\text{sen}(\theta_1) - \text{sen}(\theta_2) = m \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{d} \quad 9.8.13$$

y de 9.8.11 el ancho del pico es:

$$\Delta \text{sen}(\theta) = \frac{\lambda}{Nd} \quad 9.8.14$$

donde no distinguimos cual de las dos longitudes de onda usamos ya que son muy próximas y sólo estamos estimando el error. Deseamos que para poder distinguir (resolver) los picos 9.8.14 debe ser menor que 9.8.13, o sea:

$$\frac{\lambda}{Nd} < m \frac{\Delta \lambda}{d} \quad 9.8.15$$

que podemos escribir como:

$$\frac{1}{Nm} < \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \quad 9.8.16$$

que nos dice que el error relativo depende del orden y del número de fuentes de manera inversamente proporcional.

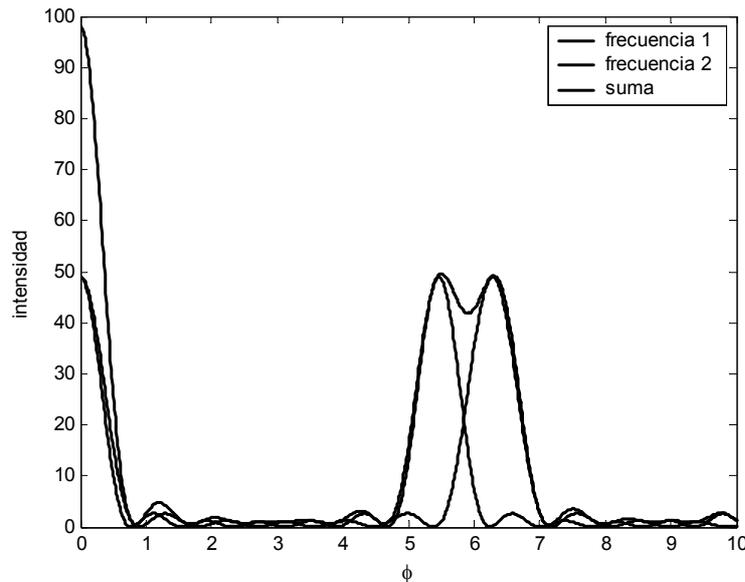
Podemos analizar esto de otra manera y llegaremos a una expresión conceptualmente más rica. Dividiendo por la longitud de onda en 9.8.16 queda:

$$\frac{1}{Nm\lambda} < \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \frac{\Delta k}{2\pi} \quad 9.8.17$$

y el denominador del primer término no es otra cosa que la diferencia de caminos ópticos entre la primera y la última fuente (entre consecutivas es  $m\lambda$ ) que llamaremos  $\Delta L$ , con lo que obtenemos nuevamente la expresión:

$$\Delta k \Delta L > 2\pi \quad 9.8.18$$

Que nos dice que la máxima diferencia de caminos del interferómetro determina la resolución espectral.



**Figura 9.8.3:** Se ilustran las figuras de interferencia (intensidad en función de la posición) debidas a dos fuentes de distinta frecuencia (líneas partidas) y la suma de ambas (línea llena). Se observa en la suma que con esta separación entre picos apenas se distingue la existencia de dos frecuencias, para una separación menor los dos picos se confunden en uno solo.

### 9.9. Interferómetro de Fabry Perot

Este es otro ejemplo muy difundido de un interferómetro en que se utilizan muchas copias de una misma fuente. El esquema es ilustrado en la figura 9.9.1 y consiste en dos espejos semitransparentes orientados paralelos entre sí y perpendiculares a la dirección de incidencia de la onda. Analizaremos el sistema asumiendo que inciden ondas planas monocromáticas.

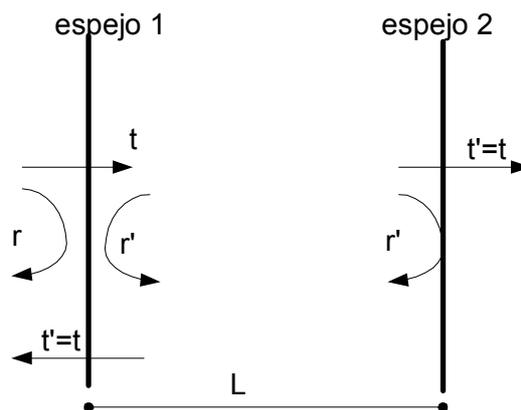
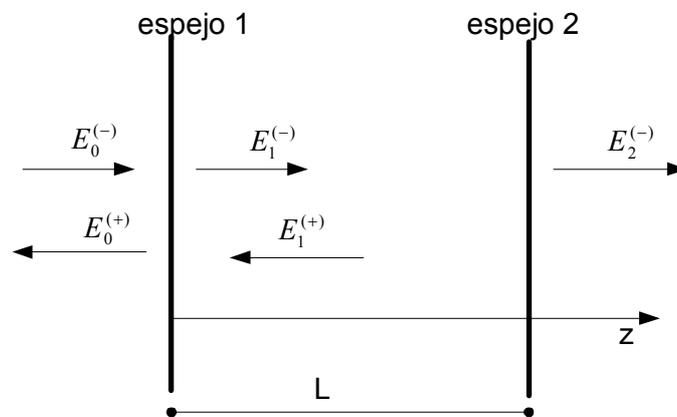


Figura 9.9.1 Esquema de un interferómetro Fabry Perot. Dos espejos paralelos son ubicados a una distancia  $L$ . Se indican los coeficientes complejos de reflectividad ( $r$ ,  $r'$ ) y de transmisión ( $t$ )

La onda incide desde la izquierda, parte se refleja en el primer espejo y parte se transmite. La onda transmitida a su vez parcialmente se refleja en el segundo espejo y vuelve. La parte transmitida en el primer espejo interfiere con la primera reflexión, y la

parte reflejada con la primera transmisión. Es necesario entonces sumar las infinitas reflexiones con las ondas que ahora son de distinta amplitud (en cada reflexión se pierde algo) y con distintas fases (en el viaje de largo  $2L$  y en las reflexiones cambian las fases). Es de esperar que si en una vuelta completa dentro del interferómetro (entre los espejos) el desfase es un múltiplo de  $2\pi$ , la interferencia entre las infinitas reflexiones dará un máximo de transmisión. Una pequeña diferencia en la fase se irá acumulando en sucesivos pasajes dando lugar a una transmisión sensiblemente menor. Por lo tanto este dispositivo debe tener una transmisión fuertemente dependiente de la longitud de onda.

Para calcular este efecto en lugar de sumar las infinitas reflexiones, vamos a buscar la solución estacionaria autoconsistente, con la siguiente estrategia: luego de infinitas reflexiones se establece una solución estacionaria en que hay una onda incidente desde la izquierda, una onda viajando a derecha dentro del interferómetro, una onda viajando a izquierda, una onda reflejada en el interferómetro y una onda transmitida. Estas cinco ondas se indican en la figura 9.9.2.



**Figura 9.9.2.** Ondas propagantes establecidas en la solución estacionaria. El supraíndice (+) indica que viaja a izquierda y el (-) que viaja a derecha. Los índices 0, 1 y 2 indican la región del espacio en que están definidas.

La expresiones para las cinco ondas serán:

$$E_0^{(-)} = Ae^{i(\omega t - kz)} \quad 9.9.1$$

$$E_1^{(-)} = Be^{i(\omega t - kz)} \quad 9.9.2$$

$$E_1^{(+)} = B'e^{i(\omega t + kz)} \quad 9.9.3$$

$$E_0^{(+)} = A'e^{i(\omega t + kz)} \quad 9.9.4$$

$$E_2^{(-)} = Ce^{i(\omega t - kz)} \quad 9.9.5$$

Los coeficientes  $A, A', B, B'$  y  $C$  son complejos, y sus amplitudes y fases deben salir de las condiciones de borde, planteadas en término de los coeficientes de reflexión y transmisión. La primera condición en el primer espejo es que la onda  $E_1^{(-)}$  proviene de la interferencia de la onda transmitida y la reflejada:

$$E_1^{(-)}(0) = tE_0^{(-)}(0) + r'E_1^{(+)}(0) \quad 9.9.6$$

La segunda condición es que la onda  $E_0^{(+)}$  es la interferencia de la reflejada con la transmitida desde adentro:

$$E_0^{(+)}(0) = rE_0^{(-)}(0) + tE_1^{(+)}(0) \quad 9.9.7$$

Estas dos condiciones se obtienen con la onda evaluada en  $z=0$ . Para el segundo espejo se hace un razonamiento similar, ahora con las ondas evaluadas en  $z=L$  y teniendo en cuenta que no incide onda desde la derecha:

$$E_1^{(+)}(L) = r'E_1^{(-)}(L) \quad 9.9.8$$

$$E_2^{(-)}(L) = tE_1^{(-)}(L) \quad 9.9.9$$

Usando las cinco definiciones 9.9.1 a 9.9.5 en estas cuatro condiciones se obtienen cuatro ecuaciones algebraicas:

$$B = tA + r'B' \quad 9.9.10$$

$$A' = rA + tB' \quad 9.9.11$$

$$B'e^{ikL} = r'Be^{-ikL} \quad 9.9.12$$

$$Ce^{-ikL} = tBe^{-ikL} \quad 9.9.13$$

El coeficiente  $A$  es dato y las cuatro incógnitas son  $B$ ,  $C$ ,  $A'$  y  $B'$ . Como el sistema es lineal, todos ellos deben resultar proporcionales a  $A$ . Reemplazando  $B'$  de 9.9.12 en 9.9.10:

$$B = tA + r'^2 Be^{-i2kL} \quad 9.9.14$$

de donde obtenemos  $B$ :

$$B = \frac{tA}{1 - r'^2 e^{-i2kL}} \quad 9.9.15$$

y en 9.9.12 da

$$B' = \frac{r'tAe^{-i2kL}}{1 - r'^2 e^{-i2kL}} \quad 9.9.16$$

y 9.9.15 en 9.9.13 da:

$$C = \frac{t^2 A}{1 - r'^2 e^{-i2kL}} \quad 9.9.17$$

Con este resultado podemos calcular la transmisión buscada de la intensidad incidente:

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{|t|^4}{(1 - r'^2 e^{-2ikL})(1 - r'^2 e^{2ikL})} \quad 9.9.18$$

Para simplificar esta expresión es conveniente escribir explícitamente los coeficientes de reflexión y transmisión como:

$$r' = r_0 e^{i\alpha} \quad 9.9.19$$

$$t = t_0 e^{i\beta}$$

y definiendo:

$$\phi = 2kL - 2\alpha \quad 9.9.20$$

9.9.18 queda:

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{t_0^4}{(1-r_o^2 e^{-i\phi})(1-r_o^2 e^{i\phi})} = \frac{(1-r_o^2)^2}{[1+r_o^4 - 2r_o^2 \cos(\phi)]} \quad 9.9.21$$

donde hemos utilizado que la intensidad se conserva por lo que la transmisión más la reflexión en un único espejo debe dar la intensidad incidente, es decir:

$$r_o^2 + t_o^2 = 1 \quad 9.9.22$$

esta expresión vale pues no se ha cambiado de medio en la transmisión y el área del haz se mantiene. En una refracción, al cambiar el ángulo, no se conservan las áreas transversales y por lo tanto la conservación de la energía no implica conservación de la intensidad.

Reagrupando términos en 9.9.21:

$$T = \frac{(1-r_o^2)^2}{\{(1-r_o^2)^2 + 2r_o^2[1-\cos(\phi)]\}} = \frac{1}{1 + \frac{4r_o^2}{(1-r_o^2)^2} \text{sen}^2(\phi/2)} \quad 9.9.23$$

Definiendo:

$$F = \frac{4r_o^2}{(1-r_o^2)^2} \quad 9.9.24$$

la transmisión del Fabry Perot queda:

$$T = \frac{1}{1 + F \text{sen}^2(\phi/2)} \quad 9.9.25$$

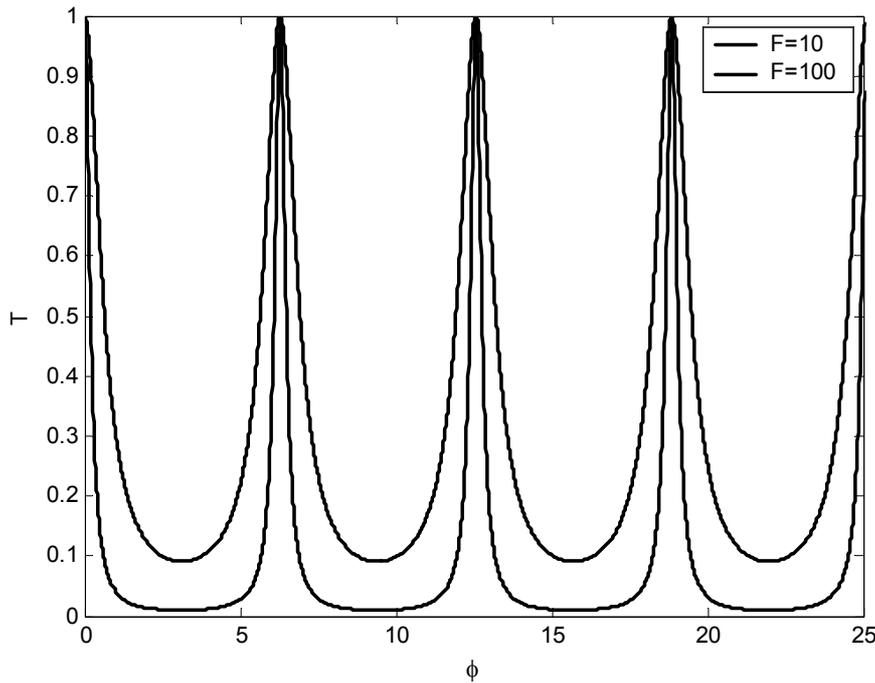
Esta expresión es obviamente periódica en  $\phi$  y ha sido graficada en la figura 9.9.3 para  $F=10$  y  $F=100$ . Toma el valor máximo  $T=1$  cuando se anula el seno, o sea cuando:

$$\frac{\phi}{2} = kL - \alpha = m\pi \quad 9.9.26$$

o equivalentemente:

$$L = m \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha\lambda}{2\pi} \quad 9.9.27$$

o sea que se repite un máximo cada vez que la cavidad se incrementa en media longitud de onda.



**Figura 9.9.3.** Transmisión de un Fabry Perot para distintos valores de  $F$ .

También se puede mirar el gráfico pensando que se varía la longitud de onda, en este caso se encuentra un nuevo máximo cada vez que se incrementa  $m$  en una unidad y se reduce la longitud de onda proporcionalmente. Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos máximos consecutivos de orden  $m$  y  $m+1$ , es de 9.9.27

$$m\lambda_1 = (m + 1)\lambda_2 \tag{9.9.28}$$

que da:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{m} \tag{9.9.29}$$

que es la separación espectral de dos longitudes de onda en las que se producen máximos consecutivos a largo del interferómetro constante. Se puede observar que dicha separación, llamada rango espectral libre, es menor cuanto mayor es  $m$ , o sea cuanto mayor es el largo del interferómetro ya que es

$$m \approx \frac{2L}{\lambda} \tag{9.9.30}$$

Si la reflectividad de los espejos es grande (cercana a la unidad) el valor de  $F$  resulta un número mucho mayor que uno. Por ejemplo para  $r_o^2 = 0.95$  se obtiene  $F=1520$ . El valor mínimo de la trasmisión (9.9.25) resulta en este caso (cuando  $\text{sen}^2(\phi/2) = 1$ ),  $T < 7 \cdot 10^{-4}$ .

La resolución del espectrómetro dependerá de cuan angostos son los picos. Podemos estimar esto viendo cuando el pico cae a la mitad de su valor máximo. Observando la forma de 9.9.25, es obvio que cae a la mitad cuando

$$F \text{sen}^2(\phi/2) = 1 \tag{9.9.31}$$

Como todos los picos son iguales, podemos sin pérdida de generalidad calcular más fácilmente el pico alrededor del cero y para valores de  $F$  grandes. Allí vale la aproximación lineal del seno, de modo que obtenemos para el ancho del pico:

$$\delta\phi = \frac{2}{\sqrt{F}} \quad 9.9.32$$

que a partir de 9.9.20 permite calcular el ancho en término del número de onda:

$$\delta\phi = 2\delta kL = \frac{2}{\sqrt{F}} \quad 9.9.33$$

Que indica que la resolución espectral aumenta con  $\sqrt{F}$ , o sea con la reflectividad de los espejos.  $F$  tiende a infinito cuando la reflectividad tiende a 1. La resolución también aumenta con el largo  $L$ , pero de 9.9.29 y 30 con  $L$  disminuye el rango espectral libre, que es el rango dentro del cual no confundido el máximo  $m$  de una longitud de onda con el  $(m+1)$  de otra, o sea el rango del espectro dentro del cual puedo identificar unívocamente la longitud de onda.

Por último cabe discutir cualitativamente que ocurre cuando la transmisión es máxima. Toda la energía incidente es transmitida y la reflexión es cero (se deja como ejercicio calcular el coeficiente de reflexión para verificar esta afirmación). Si calculamos la amplitud dentro de la cavidad, por ejemplo el coeficiente  $|B|^2$  a partir de 9.9.15 y 9.9.17:

$$\frac{|B|^2}{|C|^2} = \frac{1}{t_o^2} \quad 9.9.34$$

o sea que la intensidad dentro de la cavidad es mucho mayor que la incidente (y transmitida) cuando el sistema está en resonancia (máxima transmisión). La cavidad, a través de las sucesivas reflexiones, ha almacenado tanta energía que la pequeña pérdida en el espejo es tan grande como la intensidad incidente. La amplitud del término  $B'$  también crece y su transmisión en el primer espejo interfiere destructivamente con la primera reflexión, dando la reflexión neta nula.

**Guía 9**

1) Dos ondas planas monocromáticas de igual frecuencia se propagan formando un ángulo  $\alpha$  entre sus vectores de onda. Calcule la amplitud e intensidad media en una pantalla perpendicular a la bisectriz entre ambos vectores de onda.

2) Resuelva el problema anterior si las dos ondas son de frecuencia ligeramente diferentes.

Muestre que la figura de interferencia viaja a lo largo del plano y determine a que velocidad se mueve. Si se desea fotografiar la figura de interferencia, ¿que relación debe haber entre el tiempo de obturación y la diferencia entre ambas frecuencias? Si para este experimento se utilizan dos láseres distintos. ¿Qué longitud de coherencia deben tener como mínimo? ¿Con cuántas cifras debe estar definida la frecuencia para un caso típico de luz visible?

3) Una onda plana incide sobre una lámina de caras paralelas de vidrio de espesor  $d$ , con un ángulo de incidencia  $\theta_i$ . Calcule la amplitud de la onda reflejada teniendo en cuenta solamente las dos reflexiones más intensas. Calcule la amplitud de la onda transmitida teniendo en cuenta la que no sufre reflexiones y la que se refleja dos veces. Compare la pérdida de energía de la onda transmitida con la energía de la onda reflejada.

4) Se tienen dos fuentes puntuales que emiten en fase ubicadas a una distancia  $d$  entre ellas.

Calcule la figura de interferencia que se observa en una pantalla ubicada a una distancia  $L$  y perpendicular a la recta de unión entre las fuentes ( $L \gg d$ ). ¿Cómo es la figura en una pantalla paralela a la recta de unión y a una distancia  $L'$  de la misma ( $L' \gg d$ )? ¿Cuántos máximos de interferencia aparecen en cada caso? ¿Como debe ser la longitud de coherencia para que todos ellos sean visibles?

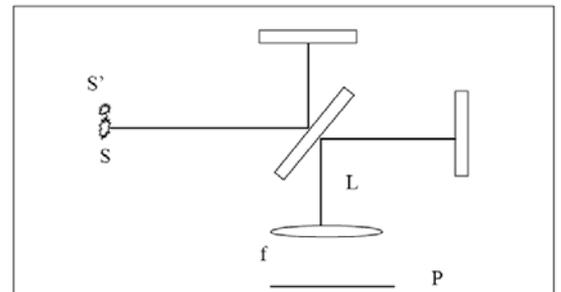
5) Un interferómetro de Michelson es iluminado por medio de una fuente puntual monocromática  $S$ . Calcule:

- La posición de los máximos y mínimos en una pantalla ubicada a una distancia  $L$  del divisor de haz.
- La posición de los máximos y mínimos en una pantalla ubicada a una distancia  $f$  de una lente de distancia focal  $f$  ubicada a una distancia  $L$  del divisor de haz.
- Lo mismo que en a y b si se ubica otra fuente  $S'$

d) Discuta como se observaría la figura si se ilumina con una fuente extensa. Explique porque esta configuración se denomina franjas de igual inclinación.

e) Indique la expresión de la intensidad que se mide con un detector que detecta el punto central, en función de la diferencia de distancias entre el divisor de haz y los dos espejos.

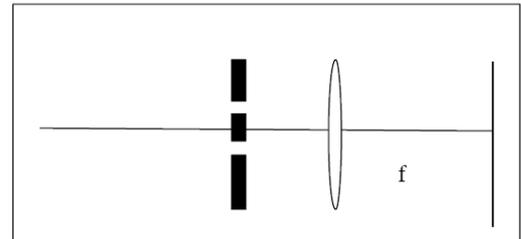
6) Un interferómetro de Michelson es iluminado por una fuente que emite en dos frecuencias. Calcule el valor medio de la intensidad de luz detectada. Muestre que cada frecuencia da una contribución sinusoidal con la distancia independiente de las otras frecuencias presentes, y que si multiplica la señal medida por  $\cos(\omega z/c)$  e integra según  $z$  puede recuperar la intensidad de la fuente a la frecuencia  $\omega$ . ¿Cuán largo debe ser el barrido para que la otra frecuencia  $\omega'$  no contribuya?. Calcule el caso particular de querer resolver el doblete del sodio.



7) Diseñe (si es posible) un experimento de Young a ser realizado por medio de un puntero laser, un papel de aluminio en que perforo dos aberturas muy próximas con un alfiler y observe a ojo desnudo. ¿Que ventajas tiene utilizar un biprisma de fresnel para realizar el mismo experimento?

8) Diseñe un experimento similar al de Young pero con dos fuentes sonoras y de modo que ambas orejas caigan dentro de un máximo de interferencia. ¿Porqué con sonido se pueden usar fuentes independientes?

9) Se realiza un experimento de Young utilizando dos aberturas ubicadas a una distancia  $d$  y observando en una pantalla ubicada en el plano focal de una lente colocada delante de las ranuras. Discuta que se observa en cada uno de los siguientes casos:



- a) Se ilumina las aberturas con una onda plana incidiendo sobre las ranuras con un ángulo  $\alpha$  respecto del eje indicado y en el plano del dibujo.
- b) Se ilumina por medio de una fuente puntual ubicada en el eje.
- c) la fuente puntual es ubicada fuera del eje.
- d) la fuente no es monocromática sino que tiene una longitud de coherencia de  $10\lambda$ .

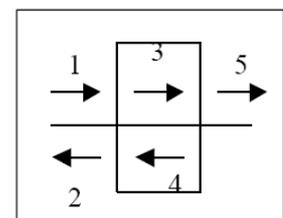
10) Resuelva nuevamente el caso de la lámina de caras paralelas teniendo en cuenta ahora las infinitas reflexiones.

11) Se tienen  $N$  fuentes puntuales monocromáticas en línea equiespaciadas. Calcule las franjas de igual inclinación si se observa a lo largo del eje determinado por las fuentes. Calcule el ancho de las franjas claras y la separación entre ellas. ¿Qué se observa a lo largo del eje de las fuentes en función de la separación entre las fuentes? ¿Cómo cambia con el número de fuentes? Si las fuentes emiten en dos colores, ¿en qué condiciones quedan separados nítidamente los respectivos máximos?

12) Repita el problema anterior observando a lo largo de un eje perpendicular a las fuentes. ¿Qué se observa ahora que cambia con la separación entre fuentes y con el número de fuentes?

13) Compare la solución del interferómetro Fabry-Perot con la solución del problema 11. ¿En que se parecen y en que difieren? ¿Quien juega el papel de la distancia entre fuentes y cual es el número de fuentes equivalentes que da los mismos anchos característicos de los máximos?

14) Resuelva el problema de la lámina de caras paralelas con incidencia normal a las caras asumiendo una solución autoconsistente en vez de hacer una suma infinita: considere que dentro de la lámina hay una onda hacia la derecha  $\Psi_3$  y otra hacia la izquierda  $\Psi_4$ , que incide una onda de la izquierda  $\Psi_1$ , se refleja una onda hacia la derecha  $\Psi_2$  y se transmite una onda  $\Psi_5$ . Resuelva las incógnitas planteando las condiciones de borde (reflectividad y transmisión en cada cara).



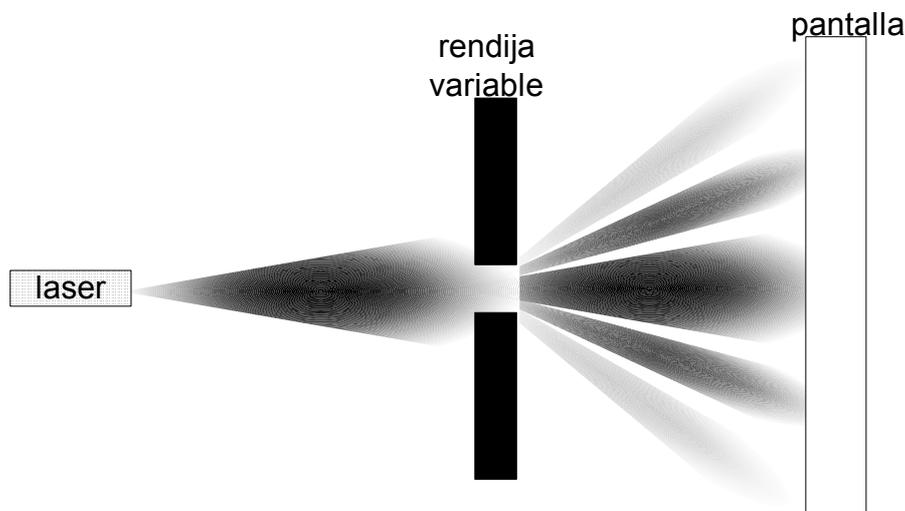


**El análisis es una herramienta exitosa para adaptarnos a nuestro medio ambiente.  
¿Es igualmente válida a toda escala?**

## Capítulo 10 DIFRACCIÓN POR OBJETOS SENCILLOS

### 10.1. Caso de estudio: Atravesando una ranura

Hacemos el siguiente experimento: colocamos una ranura de ancho variable delante de un puntero láser (si se dispone de un puntero verde puede no ser necesario oscurecer la habitación). Colocamos una pantalla a un par de metros de distancia de la ranura. El esquema del experimento se muestra en la figura 10.1.1. Se observa el efecto de ir cerrando la ranura, y a ancho de ranura fija como cambia la forma de la zona iluminada con la distancia entre la ranura y la pantalla. Podemos hacer un predicción de la observación a partir de las aproximaciones realizadas hasta ahora. Lo que estamos haciendo es interrumpir parte del frente de ondas, dejando pasar una porción definida por la ranura. En la descripción de la lente encontramos una situación similar, pues la lente no transmitía todo el frente de ondas, sino que tenía dimensión finita. Lo que supusimos es que la parte transmitida continuaba como si no hubiera habido obstrucción. Así una onda plana se convertía en una onda esférica que convergía hacia un punto llamado foco. Si repetimos este análisis cualitativo esperaríamos que al atravesar la ranura, la porción del frente de ondas no obstruido continúe su viaje, observándose en la pantalla la sombra de la ranura, manteniendo su tamaño.



**Figura 10.1.1:** Esquema del experimento. Una ranura obstruye el haz de un láser y se observa la intensidad en una pantalla.

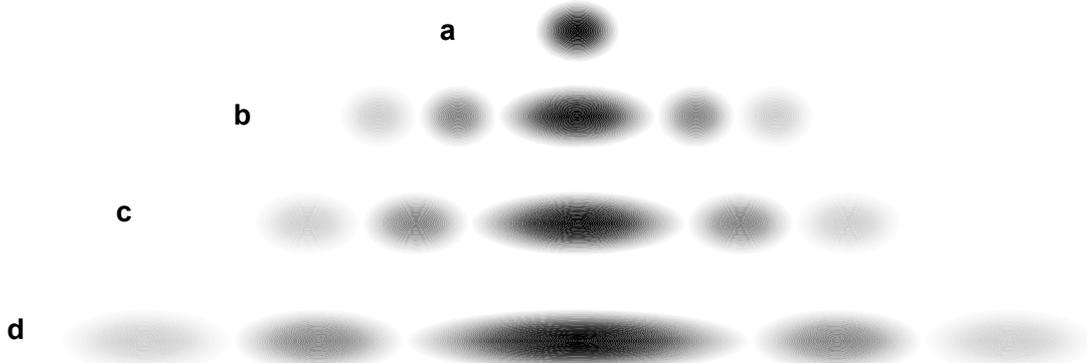
Sin embargo la observación experimental difiere sustantivamente de esta predicción. En la figura 10.1.2 se muestran sucesivas imágenes en la pantalla a medida que se cierra la ranura. Podemos realizar las siguientes observaciones:

Observación 1: A medida que cerramos la ranura la zona iluminada en la pantalla se ensancha (aproximadamente de manera inversamente proporcional). Aparecen zonas oscuras que separan máximos secundarios de menor intensidad.

Observación 2: Si acercamos la pantalla a la ranura vemos que la figura mantiene su forma pero se reduce de tamaño en la dirección  $x$  de manera más o menos lineal con la distancia (similar a lo que ocurre en un experimento de Young).

**Observación 3:** Para una ranura de un ancho de 0,1mm, a unos pocos centímetros de la ranura la figura comienza a cambiar cualitativamente y ya muy cerca (del orden del centímetro o menos) se observa la sombra geométrica de la ranura.

**Observación 4:** Si cerramos muchísimo la ranura, hasta hacer la abertura imperceptible, se observa una iluminación uniforme en la dirección x (este experimento es muy dependiente de la calidad de la ranura y la intensidad del láser).



**Figura 10.1.2:** de arriba hacia abajo las sucesivas imágenes a medida que se va cerrando la ranura. La (a) correspondería a la ranura completamente abierta o sin ranura.

Buscamos entonces hacer un análisis sistemático del problema. Como primer paso buscamos situaciones ya vistas que tengan cierta analogía. Una mancha ancha con máximos secundarios de menor intensidad tiene cierta similitud con la interferencia entre  $N$  fuentes, particularmente si la distancia entre fuentes es tan pequeña que solamente aparece un solo máximo principal. Esto ocurre para

$$\lambda / d > 1 \quad 10.1.1$$

donde  $d$  es la distancia entre fuentes. La expresión para la intensidad en la pantalla (en la aproximación de campo lejano) es:

$$|\psi|^2 = |A|^2 \frac{\text{sen}^2(N\phi/2)}{\text{sen}^2(\phi/2)} \quad 10.1.2$$

con

$$\phi = kdsen\theta \quad 10.1.3$$

que para el caso límite mencionado en 10.1.1:

$$\phi \ll 1 \quad 10.1.4$$

el seno del denominador puede aproximarse por su argumento. Esto corresponde a la distancia entre fuentes mucho menor que la longitud de onda, quedando 10.1.2 como:

$$|\psi|^2 \cong |A|^2 \frac{\text{sen}^2(N\phi/2)}{(\phi/2)^2} = |A|^2 \frac{\text{sen}^2(Ndksen\theta/2)}{(dksen\theta/2)^2} \quad 10.1.5$$

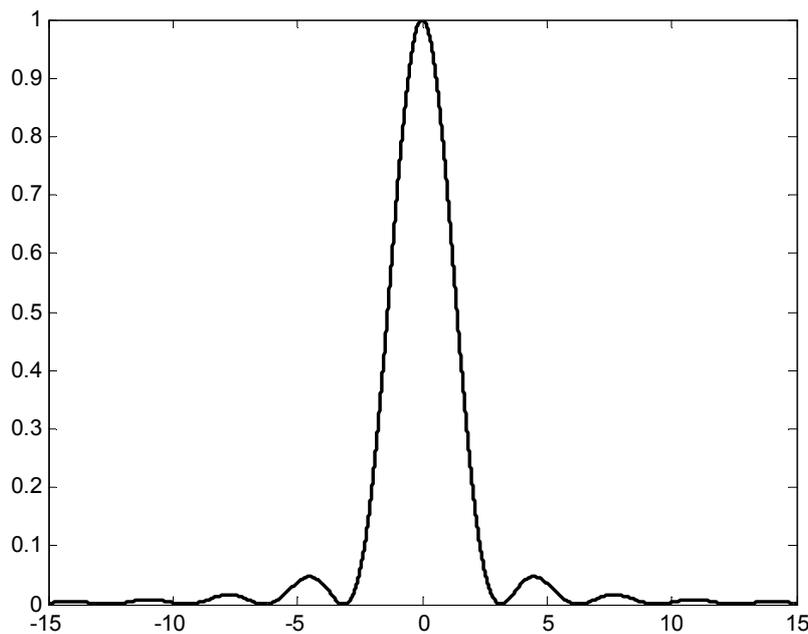
Notemos que el argumento del numerador depende de  $N$  y  $d$  a través de su producto:

$$Nd=D \quad 10.1.6$$

Donde  $D$  es el ancho que ocupan las fuentes (diámetro). Multiplicando y dividiendo por  $N^2$  y reagrupando queda:

$$|\psi|^2 \cong N^2 |A|^2 \frac{\text{sen}^2(Dk\text{sen}\theta/2)}{(Dk\text{sen}\theta/2)^2} \quad 10.1.7$$

Notemos que una vez que se cumple la condición 10.1.4, si agrandamos o achicamos la distancia entre fuentes, manteniendo el tamaño del sistema, no cambia el ancho de la figura en la pantalla. El resultado es graficado en la figura 10.1.3.



**Figura 10.1.3.** Intensidad en función de  $Dk\text{sen}(\theta)/2$  en una pantalla ubicada lejos de una ranura de ancho  $D$ .

Los ceros de la función se corresponden con los valores de  $k\text{sen}\theta$  para los que se anula el seno, o sea:

$$Dk\text{sen}\theta = 2m\pi \quad 10.1.8$$

Que equivale a

$$\text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{D} \quad 10.1.9$$

Vemos que este resultado coincide con la observación 2, las franjas oscuras están ubicadas a ángulo constante independientemente de la distancia de la pantalla. Si achicamos la ranura (menor  $D$ ) aumenta el ángulo (y por lo tanto el ancho del máximo central (observación 1). En el límite en que  $D$  se hace menor que la longitud de onda, las franjas oscuras desaparecen y la iluminación es prácticamente uniforme (observación 4).

Con la observación 3 no podemos hacer comparaciones pues corresponde a irse del rango de validez de la ecuación de partida 10.1.2 (campo lejano), que es:

$$D^2 \ll \lambda L$$

10.1.10

donde  $L$  es la distancia a la pantalla.

Si hacemos una medición cuantitativa de la intensidad en la pantalla, veríamos que la expresión 10.1.7 predice correctamente el perfil de intensidades obtenido. Por otro lado si hubiéramos trabajado con la expresión para la amplitud, en vez de la intensidad, en el límite de la observación 4 ( $D \ll \lambda$ ) obtendríamos una amplitud constante pero con un término de fase correspondiente a la onda esférica.

De estas observaciones y del análisis de la situación análoga de interferencia de  $N$  fuentes podemos extraer la siguiente conclusión: la ranura parece comportarse como una sucesión de fuentes puntuales que emiten ondas esféricas muy próximas entre sí. Esto se ve de manera explícita si la ranura se cierra tanto (menor que la longitud de onda) que se comporta como una única fuente puntual.

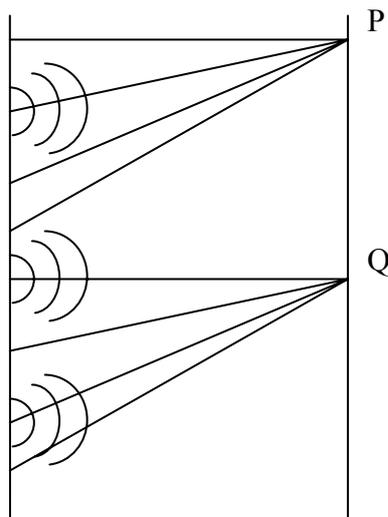
Un experimento similar puede realizarse en una cuba de ondas y esta transición a onda esférica se puede ver de manera más explícita, ya que se visualizan los frentes de onda y además es sencillo hacer aberturas del orden o menor que la longitud de onda.

**Nota:** a este fenómeno de interferencia entre un continuo de fuentes, resultado de haber interpuesto algún obstáculo al frente de ondas se lo denomina **fenómeno de difracción**.

## 10.2. Integral de Kirchhoff

Estas últimas observaciones en las ondas en la superficie del agua llevaron a Huygens (1629-1695) a postular que cada punto del frente de ondas se comporta como una fuente de ondas esféricas hacia adelante, y que es la interferencia entre esas fuentes la que da lugar a los nuevos frentes de ondas.

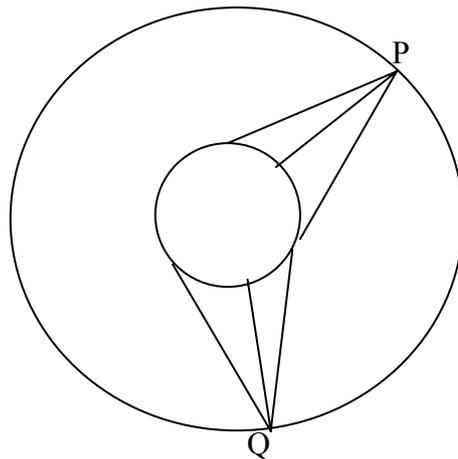
Si analizamos un caso sencillo de una onda plana (figura 10.2.1) y aplicamos el razonamiento anterior, dado un frente plano cualquiera calculamos la superposición de las infinitas fuentes puntuales en dos puntos  $P$  y  $Q$  ubicados a la misma distancia del plano.



**Figura 10.2.1.** Análisis de una onda plana pensada superposición de ondas esféricas emergentes de todos los puntos de un frente de ondas. Por simetría los puntos  $P$  y  $Q$  deben ver lo mismo por lo que están en un nuevo frente.

Al hacer la superposición en P o en Q encontraremos la misma solución dada la simetría del problema. En efecto si trasladamos el origen de coordenadas verticalmente una magnitud igual a la distancia entre P y Q, encontraremos que la nueva expresión para calcular la onda en P es la que antes tuvimos para calcular en Q, por lo que ambas funciones de onda coinciden. Por lo tanto por razonamientos análogos, todos los puntos que se encuentren en el mismo plano paralelo al frente de onda tendrán el mismo valor en amplitud y fase, o sea serán un frente de ondas. La hipótesis de Huygens predice entonces que un frente plano dará lugar a la propagación de una onda plana, consistente con la ecuación de ondas.

Para el caso de una onda esférica se puede hacer un razonamiento similar. Ahora tomamos un frente de ondas esférico (figura 10.2.2) y dos puntos P y Q a la misma distancia de este frente. De manera análoga si ahora rotamos el sistema de coordenadas de modo que Q pase a ser P llegamos a la conclusión de que ambos puntos deben tener el mismo valor en amplitud y fase de la función de onda. El razonamiento vale para todos los puntos en la misma esfera, obteniéndose un frente esférico, nuevamente consistente con la ecuación de ondas. Cabe notar que en el siglo XVII aún no se conocían las ecuaciones en derivadas parciales, por lo que esta hipótesis era la única manera de encarar el problema que estamos tratando.



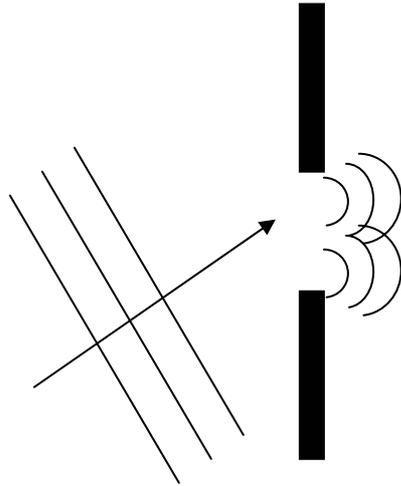
**Figura 10.2.2** Análisis similar al de la figura 10.2.1 para una onda esférica.

Si ahora una onda plana incide sobre una ranura de manera perpendicular a su superficie, cada punto de la superficie de la abertura, por estar en el mismo frente de ondas emite ondas esféricas en fase y de la misma amplitud. La superposición de esas ondas permitirá obtener la distribución de intensidades a una cierta distancia como hicimos en el caso de estudio anterior.

¿Qué ocurre si la onda incide sobre la ranura con un cierto ángulo? El caso es ilustrado en la figura 10.2.3.

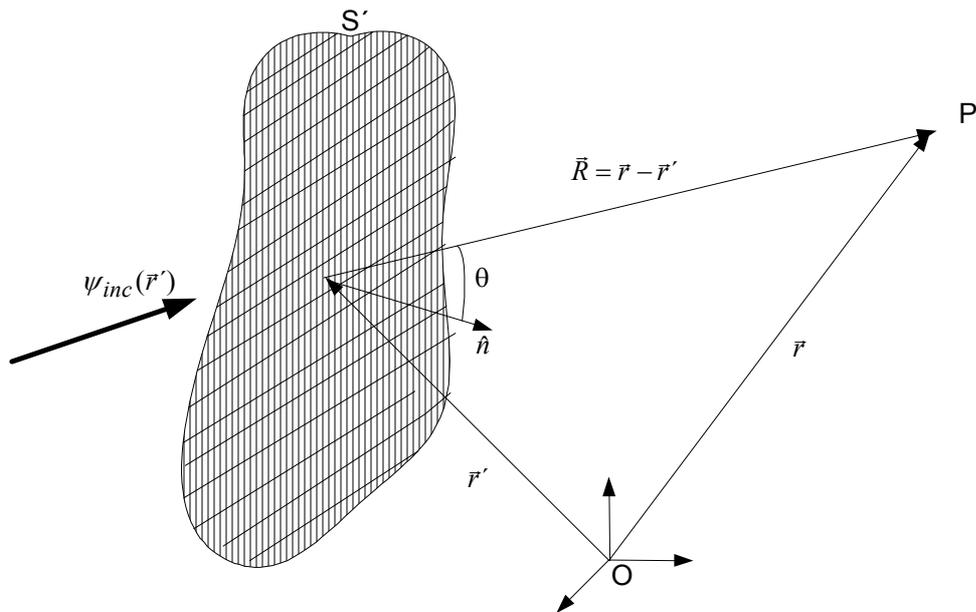
Ahora no tenemos todos los puntos de la superficie de la abertura en un mismo frente de ondas. No podemos aplicar el enunciado de Huygens. Pero notemos que conocemos el valor de la función de onda incidente en todo instante de tiempo y en todo punto de la superficie de la abertura. Aprovechando esta información, Fresnel (1788-1827) generalizó el enunciado de Huygens de la siguiente manera:

“Todo punto de una superficie en la que incide una onda, emite ondas hemiesféricas hacia delante de amplitud proporcional a la onda incidente en dicho punto y en fase con la misma”.



**Figura 10.2.3** Caso de una onda plana incidiendo en ángulo sobre una ranura. Ahora todos los puntos de la ranura no están en fase.

A estas ondas se las denomina ondas secundarias y son utilizadas para construir las ondas transmitidas a partir de su superposición.



**Figura 10.2.4.** La onda incide en la abertura  $S'$  y se calcula el campo en  $P$  referido al sistema de coordenadas centrado en  $O$  sumando la contribución de cada elemento de superficie. El versor  $\hat{n}$  es perpendicular a  $S'$ .

A partir de la figura 10.2.4 podemos construir una expresión matemática a partir de este enunciado. El vector  $\vec{r}$  indica el punto en que se desea calcular la función de onda, el vector  $\vec{r}'$  barre la superficie  $S'$  de la abertura, que dividimos en elementos  $\Delta S'_n$  de centro  $\vec{r}'_n$ .

Para simplificar la notación trabajaremos solamente con la parte de frecuencias positivas de la función de onda, entendiendo que debemos tomar la parte real para tener la solución física válida. La onda incidente se escribe entonces como:

$$\psi(\vec{r}', t) = \psi_{inc}(\vec{r}')e^{i\omega t} \quad 10.2.1$$

La superposición en el punto P será:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n A_n \frac{e^{-ikR_n}}{R_n} e^{i\omega t} \quad 10.2.2$$

con

$$R_n = |\vec{r} - \vec{r}'_n| \quad 10.2.3$$

En la expresión anterior hemos supuesto que todos los puntos dentro de un elemento  $\Delta S'_n$  emiten ondas que llegan en fase a P (interfieren constructivamente) pero pueden llegar con distinta fase respecto de otro elemento  $\Delta S'_m$ . Para garantizar esto basta con tomar el diámetro de cada elemento mucho menor que la longitud de onda. La amplitud  $A_n$  según el enunciado de Fresnel, será proporcional a la onda incidente y también será proporcional al área del elemento  $\Delta S'_n$ :

$$A_n \propto \psi_{inc}(\vec{r}'_n) \Delta S'_n \quad 10.2.4$$

Notemos que el enunciado de Fresnel no nos permite conocer el valor de la constante de proporcionalidad. Introduciendo 10.2.4 en 10.2.2 y tomando el límite cuando  $\Delta S'_n \rightarrow 0$ :

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n \psi_{inc}(\vec{r}'_n) \frac{e^{-ikR_n}}{R_n} e^{i\omega t} \Delta S'_n \rightarrow \iint_{S'} \psi_{inc}(\vec{r}') \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} dS' \quad 10.2.5$$

con

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad \text{y} \quad R = |\vec{R}| \quad 10.2.6$$

Hemos encontrado una expresión analítica basada en el principio de Huygens-Fresnel, que parece ser compatible con la ecuación de ondas, pero que no ha sido deducida a partir de ésta. Para el caso de ondas escalares Kirchhoff (1824-1887) derivó una expresión muy parecida a partir de la ecuación de ondas. La deducción está más allá de las herramientas matemáticas esperables en un curso de este nivel, por lo que nos limitaremos a trabajar con el resultado:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} e^{i\omega t} \iint_{S'} \frac{1 + \cos\theta}{2} \psi(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \quad 10.2.7$$

que nos da ahora sí el valor de la constante de proporcionalidad y difiere de la expresión de Huygens-Fresnel en el término

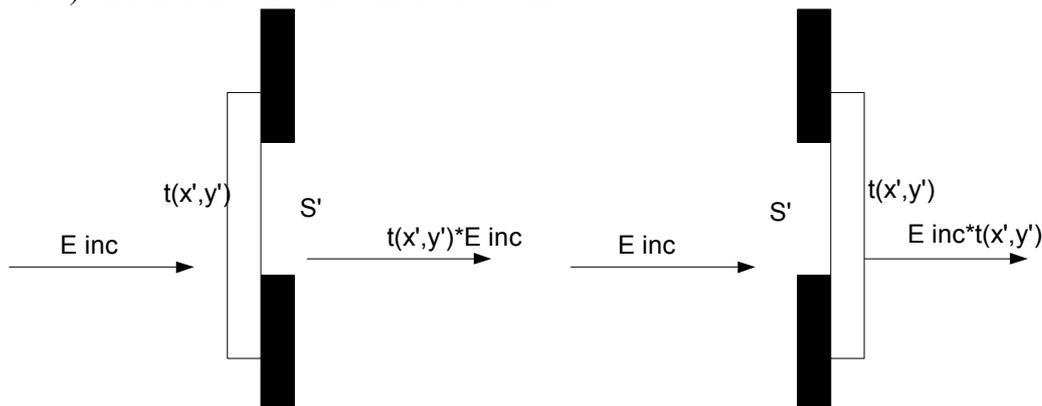
$$\frac{1 + \cos \theta}{2} \approx 1 \quad \text{si} \quad \theta \ll 1 \quad 10.2.8$$

O sea que la expresión de Kirchhoff y la de Huygens-Fresnel coinciden en la aproximación paraxial.

En realidad la expresión de Kirchhoff contiene en el integrando el valor de la función de onda en la superficie de la abertura  $\psi(\vec{r}')$ , y no el valor de la onda incidente  $\psi_{inc}(\vec{r}')$ . Para que coincidan es necesario agregar una **hipótesis fuerte**: la función de onda en la superficie de la abertura es igual a la función de onda incidente en ausencia de la abertura.

En realidad la onda incidente podría estar interactuando con el material de las paredes de la abertura, por ejemplo moviendo cargas libres en el caso de ondas electromagnéticas si la ranura es metálica, y esta interacción a su vez altera el valor de la función de onda en las vecindades. Para aberturas suficientemente grandes (mayores que la longitud de onda) esta hipótesis suele ser válida.

Hay un caso en que la abertura puede alterar en forma sencilla y previsible la función de onda, y para el que podemos escribir la ecuación 10.2.7 de manera útil. Es cuando la abertura está cubierta por un material delgado y semitransparente con un coeficiente de transmisión  $t(\vec{r}')$  complejo conocido. Este coeficiente permite calcular el valor de la función de onda inmediatamente después de la transparencia (ver figura 10.2.5) en función de la onda incidente como:



**Figura 10.2.5.** Caso en que se coloca una transparencia ya sea antes o después de una abertura. La expresión final es idéntica (en la aproximación de transparencia delgada y de respuesta local).

$$\psi(\vec{r}') = t(\vec{r}')\psi_{inc}(\vec{r}') \quad 10.2.9$$

La expresión de Kirchhoff queda ahora:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} e^{i\omega t} \iint_{S'} \frac{1 + \cos \theta}{2} t(\vec{r}')\psi_{inc}(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS' \quad 10.2.10$$

Esta es la expresión que usaremos de ahora en más para los ejemplos que discutiremos. Para el caso de una abertura simple basta con tomar  $t=1$  en la región de la abertura y  $t=0$  en el resto. Así incluso la integral se puede extender hasta el infinito, simplificando la notación si se desea.

Es necesario hacer una breve discusión sobre la validez de la expresión de Kirchhoff. Nos da el valor de la función de onda en un recinto (punto  $r$ ) dado el valor en la frontera ( $S'$ ). ¿Es esto razonable si pensamos en las condiciones de borde que exige la ecuación de ondas? Analicemos primero el caso unidimensional que ya hemos discutido en detalle. Si conozco el valor de la función de onda en un punto para todo tiempo, no puedo deducir la función de onda en otro punto, ya que la misma perturbación la puedo producir con una onda que viaja hacia la izquierda o hacia la derecha, o una superposición de ambas. Esta indeterminación surge de partir de una ecuación de segundo orden, por lo que necesito dos datos de borde. Para resolver el problema necesito además conocer la derivada espacial  $\partial\psi/\partial z$  para todo tiempo. Con estos datos obtengo las amplitudes y fases de las ondas propagándose en ambos sentidos. Si en cambio conozco a priori que solamente hay una onda propagándose en un solo sentido, entonces sí alcanza con solamente dar el valor de la función de onda en un punto y no su derivada espacial, ya que tengo que determinar una sola amplitud. Este razonamiento también vale para la ecuación 10.2.7, que solo es suficiente si conozco a priori que la onda se propaga a través de la superficie en un solo sentido.

### **10.3. Aproximación de campo lejano. Fraunhofer.**

La expresión 10.2.10 es una integral de difícil solución analítica, por lo que es conveniente realizar aproximaciones adecuadas a los casos particulares de estudio que a veces llevan a expresiones integrables. Una de estas aproximaciones, de gran interés práctico, es la aproximación de campo lejano o Fraunhofer, que ya hemos usado en el caso de estudiar interferencia. Corresponde a suponer que el punto de observación es suficientemente lejano como para pensar que los rayos que parten de las distintas fuentes (puntos en  $S'$ ) son paralelos.

Calcularemos solamente el caso en que la superficie  $S'$  es plana, por lo que por simplicidad elegiremos siempre el sistema de coordenadas de modo que el eje  $z$  sea perpendicular a la superficie que estará ubicada en  $z'=0$ . Queda entonces:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2} \quad 10.3.1$$

La aproximación de campo lejano está basada en suponer por un lado que

$$r \gg r' \quad \forall x' \quad 10.3.2$$

con lo que desarrollando a segundo orden en 10.3.1 da:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \cong r - \frac{xx' + yy'}{r} + \frac{x'^2 + y'^2}{2r} \quad 10.3.3$$

la segunda aproximación corresponde a despreciar el último sumando (cuadrático en la variable de integración ( $r'^2$ )). Para ello hay que pedir que su contribución al término de fase  $k|\vec{r} - \vec{r}'|$  sea despreciable para todo valor de  $r'$ , o sea:

$$\frac{k(x'^2 + y'^2)}{2r} \ll \pi \quad 10.3.4$$

condición que será menos restrictiva cuanto mejor centrado esté el origen de coordenadas en la abertura, de modo que

$$x'^2 + y'^2 < D^2 \tag{10.3.5}$$

donde D es el diámetro de la abertura o alguna cota a su dimensión. Queda como condición suficiente para validar la aproximación que:

$$kD^2 \ll 2\pi r \tag{10.3.6}$$

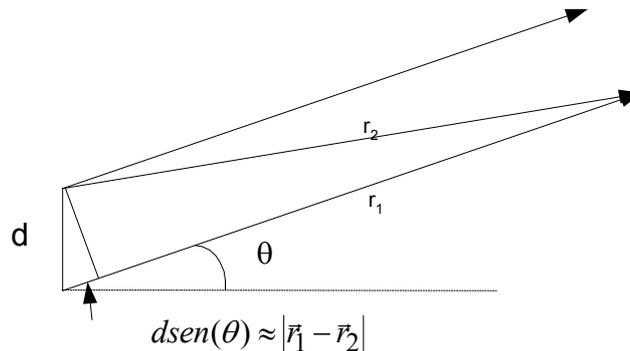
o simplemente

$$D^2 \ll \lambda r \tag{10.3.7}$$

que es la condición de campo lejano o de Fraunhofer que hemos utilizado antes.

Con el mismo criterio con que hicimos el desarrollo al hacer la aproximación paraxial para la onda esférica, desarrollamos el término de amplitud inversamente proporcional a la distancia a orden cero y el de fase a primer orden en la variable de integración en la ecuación 10.2.10, quedando:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \iint_{S'} t(\vec{r}') \psi_{inc}(\vec{r}') e^{ik \frac{(xx' + yy')}{r}} dx' dy' \tag{10.3.8}$$



**Figura 10.3.1:** aproximación de campo lejano resulta equivalente a suponer que  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son paralelos.

Si notamos que

$$\frac{xx' + yy'}{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \tag{10.3.9}$$

podemos ver que hemos retenido en la diferencia de caminos  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  la componente de  $\vec{r}'$  en la dirección de  $\vec{r}$ , como se ilustra en la figura 10.3.1. Esto equivale a suponer que los rayos que parten hacia  $r$  desde los distintos puntos de  $S'$  son paralelos.

Debe notarse que la integral en 10.3.8 no depende de  $r$  sino tan solo de la dirección, o sea de los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ , ya que en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \text{sen}\theta \cos\phi \\ \frac{y}{r} &= \text{sen}\theta \text{sen}\phi \end{aligned} \tag{10.3.10}$$

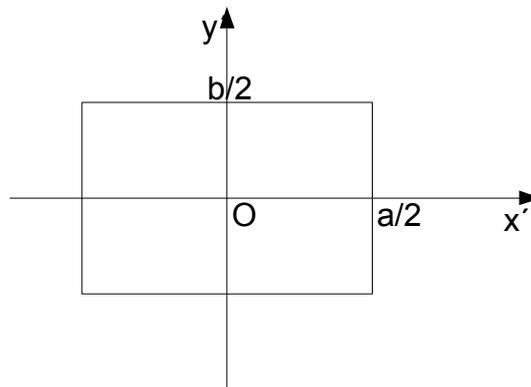
Con lo que la expresión 10.3.8 queda como el producto de una onda esférica por una función solamente de  $\theta$  y  $\phi$ :

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} S(\theta, \phi) \tag{10.3.11}$$

siendo

$$S(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos\theta)}{2} \iint_{S'} t(\vec{r}') \psi_{inc}(\vec{r}') e^{ik(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \text{sen}\phi)} dx' dy' \tag{10.3.12}$$

Cabe notar que la integral para obtener S es similar a la expresión que se utiliza para obtener los coeficientes de Fourier de la función  $t\psi$  pero ahora en dos dimensiones.



**Figura 10.3.2:** Abertura en forma de ranura rectangular. Se indica la manera de centrar el sistema de coordenadas.

Apliquemos el resultado al ejemplo de la abertura rectangular (ranura) presentado en el caso de estudio inicial e ilustrado en la figura 10.3.2. La ranura tiene ancho  $a$  y alto  $b$ . El coeficiente de transmisión es  $t=1$ , y la onda incidente es plana:

$$\psi_{inc}(\vec{r}') = A e^{-i\vec{k}_o \cdot \vec{r}'} = A e^{-i(k_{ox}' + k_{oy}y')} \tag{10.3.13}$$

(cabe recordar que tomamos  $z'=0$  en la ranura)

Queda en 10.3.12:

$$S(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos\theta)}{2} A \iint_{S'} e^{-i(k_{ox}' + k_{oy}y')} e^{ik(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \text{sen}\phi)} dx' dy' \tag{10.3.14}$$

y como es posible separar las dos variables de integración, queda el producto de dos integrales similares:

$$S(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} A \int_{-a/2}^{a/2} e^{ix'(ksen\theta \cos \phi - k_{ox})} dx' \int_{-b/2}^{b/2} e^{iy'(ksen\theta \sin \phi - k_{oy})} dy' \quad 10.3.15$$

ambas integrales son sencillas y ya las hemos resuelto con anterioridad, quedando:

$$S(\theta, \phi) = A' ab \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \frac{\text{sen}[(ksen\theta \cos \phi - k_{ox})a/2]}{(ksen\theta \cos \phi - k_{ox})a/2} \frac{\text{sen}[(ksen\theta \sin \phi - k_{oy})b/2]}{(ksen\theta \sin \phi - k_{oy})b/2} \quad 10.3.16$$

Para comparar este resultado con la estimación obtenida antes (10.1.7) como interferencia de N fuentes en el límite  $N \rightarrow \infty$ , tomamos en 10.3.16 incidencia normal, o sea  $k_{ox}=k_{oy}=0$  y evaluamos en  $\phi=0$ :

$$S(\theta, \phi) = A' ab \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \frac{\text{sen}[(ksen\theta)a/2]}{ksen(\theta)a/2} \quad 10.3.17$$

vemos que ambas expresiones coinciden a menos del término en  $1+\cos\theta$ , que es precisamente la diferencia entre la formulación de Huygens-Fresnel y la integral de Kirchhoff.

En la figura 10.3.3 se ilustra  $|\psi(\vec{r})|^2$  en función de los ángulos de observación para el caso  $b=2a$  y  $k_{ox}=k_{oy}=0$ . Se observa que la amplitud de los máximos secundarios decaen muy rápidamente. En efecto los máximos ocurren aproximadamente cuando el seno vale uno, o sea:

$$\frac{a}{2} ksen\theta \cos \phi = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad 10.3.18$$

Con lo que el denominador en 10.3.16 o 10.3.17 decrece linealmente con  $m$ .

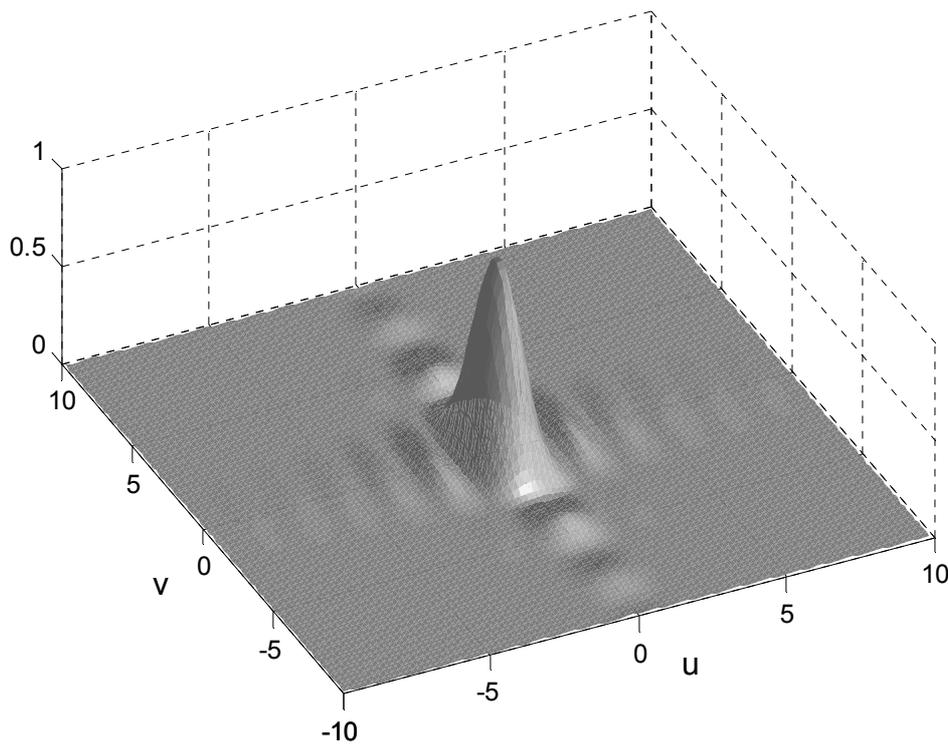
La expresión 10.3.16 puede ser escrita como:

$$S(\theta, \phi) = A' ab \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \frac{\text{sen}[\frac{ak}{2r}(x - x_o)]}{\frac{ak}{2r}(x - x_o)} \frac{\text{sen}[\frac{bk}{2r}(y - y_o)]}{\frac{bk}{2r}(y - y_o)} \quad 10.3.19$$

donde

$$\begin{aligned} x_o &= r \text{sen} \theta_o \cos \phi_o \\ y_o &= r \text{sen} \theta_o \text{sen} \phi_o \end{aligned} \quad 10.3.20$$

siendo  $(x_o, y_o)$  el centro del haz si la ranura no hubiera estado presente. Es decir, la figura de difracción, debido a la incidencia en ángulo simplemente se corre de modo de quedar centrada con el haz.



**Figura 10.3.3:** Gráfico de la intensidad difractada por una ranura ( $|S(\theta, \phi)|^2$ ) para una ranura con una lado el doble del otro (¿cuál?). Los ejes son  $u = (k \cos \theta \cos \phi - k_{ox})/2$  y  $v = (k \cos \theta \sin \phi - k_{oy})/2$

**Nota curiosa:** la expresión final obtenida para  $S(\theta, \phi)$  (10.3.12) no depende del origen de coordenadas, siempre que valga la aproximación de campo lejano. Por lo tanto pequeños desplazamientos laterales del objeto difractor no produce cambios en la distribución angular de la intensidad. Sí cambia el origen de la onda esférica en 10.3.11, lo que significa que un desplazamiento del objeto, solamente cambia la fase de la onda emergente.

#### 10.4. Aproximación paraxial

Cuando analizamos la focalización de una onda plana o la formación de una imagen por medio de una lente obtuvimos una solución que no dependía del tamaño de la lente. Esta lente está recortando el frente de onda, de modo que la onda transmitida es solo aproximadamente una onda esférica. A medida que achicamos el diámetro de la lente (o la obturamos con un diafragma), debemos encontrar que la calidad de la imagen empeora por efecto de la difracción en la abertura. Por lo tanto un paso más en la calidad de la descripción de los efectos de una lente es incluir los efectos de difracción. Si por ejemplo queremos analizar que ocurre en el foco de una lente de  $f=10\text{cm}$  y  $D=1\text{cm}$ , vemos que no satisface la condición 10.3.7 de campo lejano:  $D^2=1\text{cm}^2 \gg \lambda f=0,5 \cdot 10^{-4}\text{cm} \cdot 10\text{cm}=5 \cdot 10^{-4}\text{cm}^2$ .

Por otro lado, sí es válida la aproximación paraxial, ya que:

$$D \ll f \quad 10.4.1$$

Para este análisis entonces cambiamos la aproximación en la integral de Kirchhoff y desarrollamos 10.3.1 como:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \cong z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} \quad 10.4.2$$

donde hay que recordar que por la definición del origen de coordenadas y la dirección de incidencia es  $z > 0$ . En esta aproximación es

$$\frac{1 + \cos \theta}{2} \approx 1 \quad 10.4.3$$

con lo que 10.2.10 queda

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kz)}}{z} e^{-ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \iint_{S'} t(\vec{r}') \psi_{inc}(\vec{r}') e^{ik\frac{(xx'+yy')}{z}} e^{-ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}} dx' dy' \quad 10.4.4$$

Nos queda nuevamente una onda esférica (ahora expresada en la aproximación paraxial) que multiplica una integral que debemos evaluar. Veamos algunos ejemplos de interés práctico.

Focalización con una lente

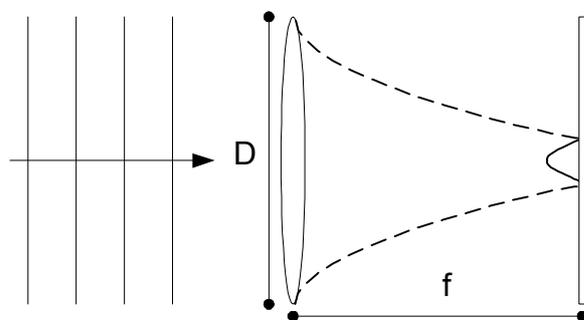
En la figura 10.4.1 se ilustra el caso de una onda plana incidiendo sobre una lente convergente. Deseamos evaluar la función de onda en el plano focal y ver cuan puntual resulta el foco.

La onda incidente en  $z'=0$  es:

$$\psi_{inc}(\vec{r}') = A \quad 10.4.5$$

y la transparencia es un filtro de fase cuadrático en  $\rho'$ :

$$t(\vec{r}') = e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2f}} \quad 10.4.6$$



**Figura 10.4.1.** Una onda plana incide sobre una lente de diámetro D y se colecta la luz en una pantalla ubicada en el foco, donde se observa una mancha de diámetro finito.

Introduciendo 10.4.5 y 10.4.6 en 10.4.4 para  $z=f$  queda:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-A}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kz)}}{f} e^{-ik\frac{(x^2+y^2)}{2f}} \iint_{S'} e^{ik\frac{(xx'+yy')}{z}} dx' dy' \quad 10.4.7$$

donde los términos cuadráticos en  $\rho'$  provenientes del desarrollo paraxial de la fase se cancelaron con los de la lente. Esta cancelación exacta hace innecesaria la aproximación de campo lejano que se utilizaba precisamente para poder eliminar dicho término cuadrático.

La integral para una lente rectangular es idéntica a la ya realizada para una ranura en el punto anterior. Si la lente es circular de radio  $D/2$  queda (pasando a coordenadas polares)

$$\iint_{S'} e^{ik\frac{(xx'+yy')}{z}} dx' dy' = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} e^{i\frac{k}{f}\rho\rho'\cos(\phi-\phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad 10.4.8$$

donde

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi & x' &= \rho' \cos \phi' \\ y &= \rho \sin \phi & y' &= \rho' \sin \phi' \end{aligned} \quad 10.4.9$$

y se usó:

$$\cos \phi' \cos \phi + \sin \phi' \sin \phi = \cos(\phi - \phi') \quad 10.4.10$$

La integral queda:

$$\int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} e^{i\frac{k}{f}\rho\rho'\cos(\phi-\phi')} \rho' d\rho' d\phi' = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{J_1\left(\frac{Dk\rho}{2f}\right)}{\left(\frac{Dk\rho}{2f}\right)} \quad 10.4.11$$

donde  $J_1$  es la función de Bessel de orden 1, siendo en general:

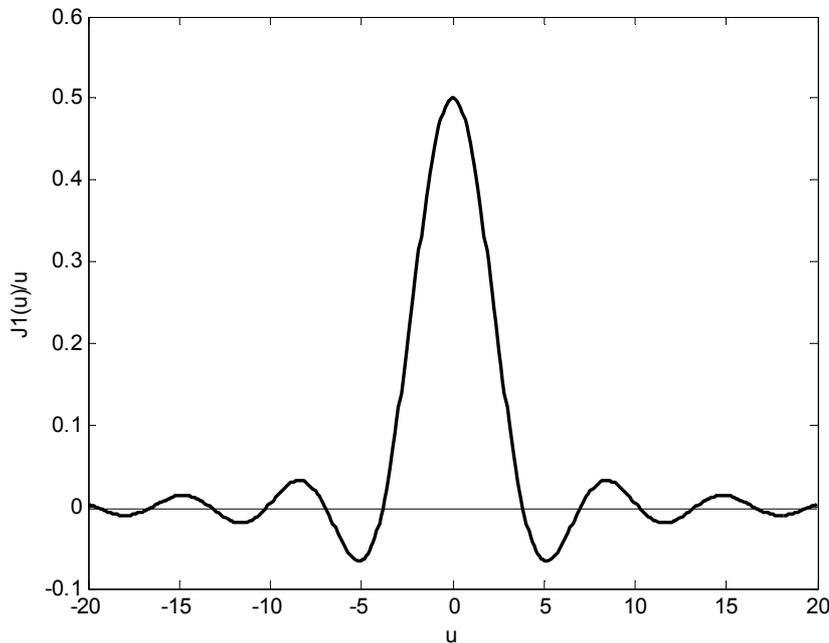
$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\phi - n\phi)} d\phi \quad 10.4.12$$

para  $n$  entero, y para el caso  $n=1$  que nos interesa se puede desarrollar como:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \quad 10.4.13$$

Como era esperable la solución 10.4.5 tiene simetría de revolución (no depende de  $\phi$ ). En la figura 10.4.2 se graficó  $J_1(u)/u$  y puede observarse que consiste en una mancha central y anillos brillantes oscuros y claros alternados de amplitud decreciente con  $\rho$  y no equiespaciados. La primera franja oscura (primer cero) está en  $u=3,83$ . Este mínimo corresponde a:

$$\frac{kD\rho}{2f} = 3,83 \Rightarrow \rho = 1,22 \frac{\lambda f}{D} \quad 10.4.14$$



**Figura 10.4.2:** Gráfico de la función que resulta de la difracción en una abertura circular en campo lejano o de una lente en el foco.

La ecuación 10.4.14 solo difiere de la 10.1.9 (ranura) en el factor 1,22. La dependencia con la longitud de onda, la distancia o el diámetro es cuantitativamente similar, difiriendo en un prefactor del orden de la unidad que depende de la forma específica de la abertura. El resultado conceptual más importante es que cuanto mayor es el ángulo sustentado por la lente desde el foco (mayor  $D/f$ ), menor es el truncamiento del frente de onda y por ende más puntual es el foco.

El otro resultado importante es que cuanto menor es la longitud de onda, más pequeña es la mancha focal, denominada círculo de confusión. Dos ondas planas incidentes con distinto ángulo podrán distinguirse si se enfocan a distancias mayores que este círculo. Veamos cuantitativamente esto que significa. Si una segunda onda incide con un ángulo  $\theta_o$ , se enfoca en  $x=f\theta_o$  y se la distingue si:

$$x_o = f\theta_o > 1,22 \frac{\lambda f}{D} \quad 10.4.15$$

o sea que la lente resuelve ondas que inciden con separación angular mayor que  $\lambda/D$ .

Si usamos una lente para leer información digital en un disco (CD), los puntos con información (bit) deben estar separados por una distancia mayor que el diámetro del círculo de confusión. Es por ello que es importante trabajar con óptica de gran abertura angular ( $D/f$  grande) y con luz de longitud de onda lo más corta posible. Si observan el interior de una lectora de CD verán que la lente prácticamente toca la superficie del disco. El paso siguiente para achicar el tamaño del bit es disminuir la longitud de onda, es así que se pasó de  $\lambda=780\text{nm}$  para las lectoras de disco compacto (CD) a  $\lambda=640\text{nm}$  para la norma de DVD y se sigue bajando.

Situaciones similares se encuentran en el diseño de microscopios, donde el factor de mérito primario de un objetivo no es el aumento sino la abertura numérica definida como el seno del ángulo que subtende la lente desde el objeto (multiplicada por el índice de refracción si no trabaja en aire).

#### Formación de imagen:

Otro caso en que se cancela exactamente el término cuadrático en la aproximación paraxial es el de formación de imágenes con lentes. Si tenemos una fuente puntual en  $z=z_s$ , una lente de distancia focal  $f$  en  $z=0$  y calculamos en el plano imagen  $z=z_s'$ , vemos que el término cuadrático en la variable de integración se cancela nuevamente. Esta es precisamente la misma cancelación con la que dedujimos la posición de la imagen. La diferencia es que ahora en el plano imagen no queda una onda esférica pura enfocándose a un punto, sino una expresión muy similar a 10.4.7, con solución de la integral similar a 10.4.11.

### **10.5. Haz Gaussiano. Más allá de la aproximación de Fraunhofer.**

Los cálculos realizados hasta ahora solo permiten predecir lo que ocurre en el campo lejano o en planos particulares. No nos dice nada sobre la observación 3 en 10.1 referida a la transición en función de la distancia. Tampoco nos dice nada sobre que ocurre si uno no ubica la pantalla exactamente en el plano focal o imagen, o con que precisión debemos realizar dicha ubicación (problema conocido en fotografía como profundada de foco). Por otro lado vimos que la forma exacta de la abertura (por ejemplo circular o cuadrada) no cambia el comportamiento general de la figura de difracción ni su dependencia con los parámetros relevantes como tamaño, distancia y longitud de onda.

Para contestar estas preguntas entonces elegiremos una forma transversal del haz que permite realizar la integral de difracción en la aproximación paraxial para cualquier distancia, y así estudiar cómo es esa transición de muy lejos a muy cerca. La función de onda elegida tendrá una dependencia espacial siguiendo la curva de Gauss o gaussiana:

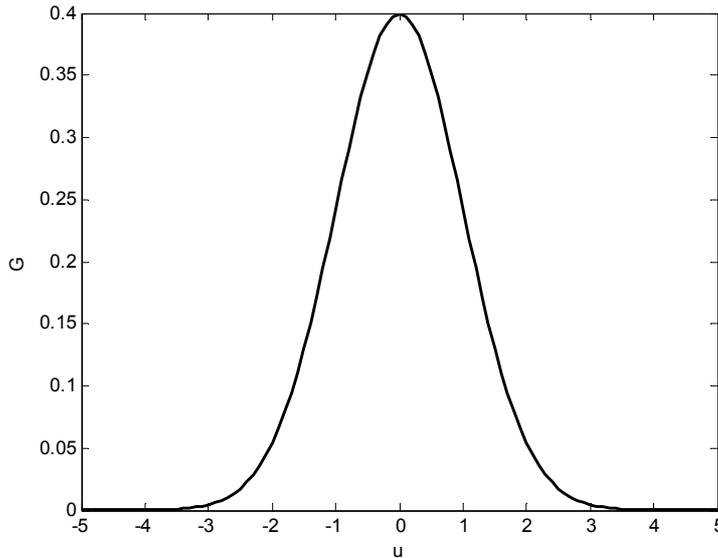
$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad 10.5.1$$

que es ilustrada en la figura 10.5.1. Cabe notar su rápida convergencia a cero para valores grandes del argumento.

Esta rápida convergencia a cero permite integrar la función en toda la recta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 \quad 10.5.2$$

Con esta función se consigue agrupar el término cuadrático del desarrollo paraxial con el de la función de onda incidente gaussiana, llevar la integral a la forma 10.5.2 y resolver el problema de la difracción en forma analítica para toda distancia  $z$  del plano de origen (dentro de la aproximación paraxial). Como veremos enseguida el resultado luego de propagarse es que la función de onda sigue siendo gaussiana. Esto hace esta solución particularmente interesante, pues si uno busca los modos normales de una cavidad tipo Fabry-Perot (que son las cavidades con que se fabrican los láseres), lo que se postula es que el la función de onda luego de un tránsito de ida y vuelta debe repetirse a si misma. Y la gaussiana satisface precisamente esta condición. En otras palabras los láseres en general emiten en modos transversales de perfil gaussiano.



**Figura 10.5.1:** Gráfico de la función Gaussiana definida en 10.5.1

Supongamos pues que tenemos una función de onda en un plano  $z'=0$  de la forma:

$$\psi_{inc}(\vec{r}') = e^{-\frac{\rho'^2}{2\sigma^2}} \tag{10.5.3}$$

Usando 10.4.4 podemos calcular la función de onda en  $z \neq 0$  como:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kz)}}{z} e^{-ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \iint_{S'} e^{-\frac{(x'^2+y'^2)}{2\sigma^2}} e^{ik\frac{(xx'+yy')}{z}} e^{-ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2z}} dx' dy' \tag{10.5.4}$$

donde la región de integración  $S'$  ahora es todo el plano y queda separada en dos integrales idénticas:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kz)}}{z} e^{-ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} e^{ik\frac{xx'}{z}} e^{-ik\frac{x'^2}{2z}} dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y'^2}{2\sigma^2}} e^{ik\frac{yy'}{z}} e^{-ik\frac{y'^2}{2z}} dy' \tag{10.5.5}$$

Calculemos una de esas integrales llevándola a la forma 10.5.2:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} e^{ik\frac{xx'}{z}} e^{-ik\frac{x'^2}{2z}} dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x'^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{ik}{z}\right) + i\frac{kxx'}{z}\right] dx' \tag{10.5.6}$$

Para resolverla buscamos completar cuadrados, es decir escribir el polinomio de segundo grado del exponente como un binomio cuadrado más una constante:

$$\left[-\frac{x'^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{ik}{z}\right) + i\frac{kxx'}{z}\right] = -(\alpha(x' - x'_o)^2 + \beta) = -\alpha x'^2 + 2\alpha x'_o x' - \alpha x'_o{}^2 - \beta \tag{10.5.7}$$

Para satisfacer la igualdad entre polinomios en  $x'$  deben ser iguales todos los coeficientes:

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{ik}{z}\right) = 2\alpha \quad 10.5.8$$

$$\left[i\frac{kx'}{z}\right] = 2\alpha x'_o \quad 10.5.9$$

$$-\alpha x'_o{}^2 - \beta = 0 \quad 10.5.10$$

De 10.5.8 obtenemos el valor de  $\alpha$ , de 10.5.9 y 5.8 se obtiene  $x'_o$ , y luego de 10.5.10 el valor de  $\beta$ .

La integral 10.5.6 queda:

$$I(x) = e^{-\beta} \int e^{-\alpha(x'-x'_o)^2} dx' \quad 10.5.11$$

y hacemos un cambio de variables para llevarlo a la forma 10.5.2:

$$\frac{u^2}{2} = \alpha(x'-x'_o)^2 \quad 10.5.12$$

o equivalentemente

$$u = \sqrt{2\alpha}(x'-x'_o) \quad 10.5.13$$

quedando:

$$I(x) = \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{2\alpha}} \int e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta} \quad 10.5.14$$

Ahora es solo un pesado ejercicio de álgebra que queda como ejercicio reinsertar esta solución junto con 10.5.8-10 en 10.5.5 para obtener:

$$\psi(x, y) = \frac{-1}{\left(\frac{\lambda}{\sigma^2} + i\frac{2\pi}{z}\right)} e^{i(\omega t - kz)} e^{-i\frac{k(x^2+y^2)}{2q}} \quad 10.5.15$$

con:

$$q = z + ik\sigma^2 \quad 10.5.15$$

Para analizar el resultado conviene separar el término de fase cuadrático en parte real e imaginaria.

$$\frac{ik}{q} = ik \frac{z}{z^2 + k^2 \sigma^4} + \frac{k^2 \sigma^2}{z^2 + k^2 \sigma^4} = \frac{ik}{R_z} + \frac{1}{\sigma_z^2} \tag{10.5.16}$$

siendo  $R_z$  el radio de curvatura del frente de onda y  $\sigma_z$  el nuevo diámetro del haz.

Que se puede separar como:

$$R_z = z \left( 1 + \frac{k^2 \sigma^4}{z^2} \right) \tag{10.5.17}$$

y

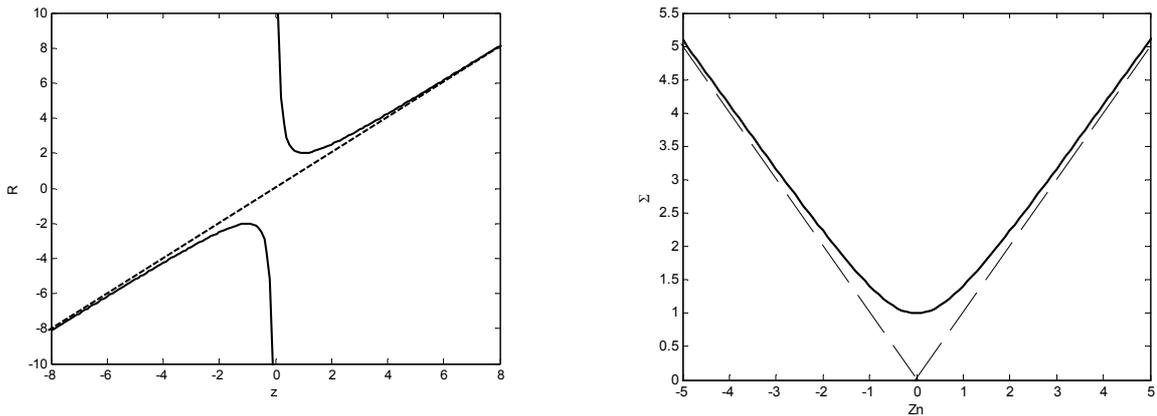
$$\sigma_z^2 = \sigma^2 \left( 1 + \frac{z^2}{k^2 \sigma^4} \right) \tag{10.5.17}$$

Estas dos funciones se grafican en la figura 10.5.2. donde puede observarse (al igual que haciendo el límite en las expresiones) que para  $z$  grande el radio se aproxima al valor de  $z$  (se parece a una onda esférica centrada en  $z=0$ ) y cerca de  $z=0$  el radio es infinito, se parece a una onda plana. Para el diámetro del haz, se observa que permanece sin mayores variaciones para

$$z < k\sigma^2 = z_R \tag{10.5.18}$$

y crece linealmente para  $z \gg z_R$ . A este parámetro  $z_R$  se lo denomina parámetro de Rayleigh o parámetro confocal.

Con este caso particular encontramos el comportamiento del haz en la región de transición, cerca y lejos de la superficie inicial. Tenemos así una idea para cualquier haz de cuan preciso debe ser la determinación de la posición del foco en un experimento a partir de 10.5.18. Vemos que cuanto menor es  $k$  (mayor la longitud de onda) o menor es el tamaño del haz, más restrictiva es la condición. Por ejemplo si enfoco a  $\sigma=100\mu\text{m}$ , con  $\lambda=0,5 \mu\text{m}$ , debe ser  $z < 125\text{mm}$ . En cambio si enfoco a  $\sigma=1\mu\text{m}$ , debe ser  $z < 12,5 \mu\text{m}$ .



**Figura 10.5.2:** A la izquierda, Radio de curvatura del frente de onda en función de la distancia (normalizada respecto a  $z_R$ ). A la derecha diámetro del haz normalizado  $\Sigma = \sigma_z / \sigma$  en función de la distancia normalizada respecto de  $z_R$ . Las asíntotas corresponden a la divergencia lineal a grandes distancias.

**Guía 10**

1) Una ranura de ancho  $D$  es iluminada por una onda plana incidente perpendicularmente al plano de la ranura, observándose la figura de difracción en una pantalla ubicada a una distancia  $L$ .

- ¿A qué distancia debe ubicarse la pantalla para que valga la aproximación de Fraunhofer?
- Estime dichas distancias para ranuras de ancho  $10\mu\text{m}$ ,  $100\mu\text{m}$  y  $1\text{mm}$ , para luz visible.
- ¿Para qué ranuras y distancias se cumplen condiciones equivalentes con ondas de sonido?
- Para alguno de los casos anteriores calcule y grafique como cambia la distribución de intensidades si la onda incide con un ángulo de  $10^\circ$  respecto de la normal al plano de la ranura.
- Idem d, si la ranura se ilumina con una fuente puntual ubicada a una distancia  $L'$ .

2) Delante de la ranura del problema anterior se ubica una lente de distancia focal  $f$ .

- Calcule el perfil de intensidad en una pantalla plana ubicada en el plano focal de la lente.
- Lo mismo si la onda incide con un ángulo de  $10^\circ$ .
- Si inciden ambas ondas (a y b) ¿qué condiciones debe cumplir la lente para que las manchas respectivas queden nítidamente separadas?
- ¿Con qué precisión debe ubicarse la pantalla en el plano focal para que valgan los resultados de los puntos anteriores?

3) Una fuente puntual está ubicada a una distancia  $s$  de una lente de distancia focal  $f$ .

- Calcule la función de onda en el plano imagen.
- calcule el perfil de intensidad. ¿Qué información se perdió al medir la intensidad?

4) Se tiene una onda monocromática de perfil Gaussiano que en  $z=0$  tiene la forma:

$$\psi(x, y, t) = A e^{i\omega t} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

- Calcular en la aproximación paraxial (integral de Kirchhoff) la función de onda en un plano  $z=\text{cte}$  cualquiera.
- Calcular el perfil de intensidad en dicho plano. ¿Qué información se pierde al medir la intensidad?
- Con el dato de la función de onda en el plano  $z$ , calcule nuevamente la función de onda en un plano  $z'$  posterior. Notar como se recupera el ya calculado originalmente para todo  $z$ . ¿Porqué no puedo calcularlo si conozco solamente el perfil de intensidades?

5) En el plano  $z$  del problema anterior se ubica una lente.

- Calcular la función de onda ahora en un plano a una distancia  $z'$  de la lente. Escriba la expresión integral y resuelva suponiendo la lente de diámetro mucho mayor que el haz Gaussiano. Discuta como cambia según la ubicación de la lente. ¿Como es el perfil de intensidades en el foco de la lente? ¿Para qué valor de  $z$  dicho perfil es mas angosto?
- Para el problema anterior, encuentre la nueva cintura del haz (el plano de mínimo ancho espacial).
- Discuta el caso particular en que  $z=f$  (lente ubicada con el foco en la cintura del haz)
- ¿Como cambia el punto a si la lente tiene diámetro mucho menor que el diámetro característico del haz.

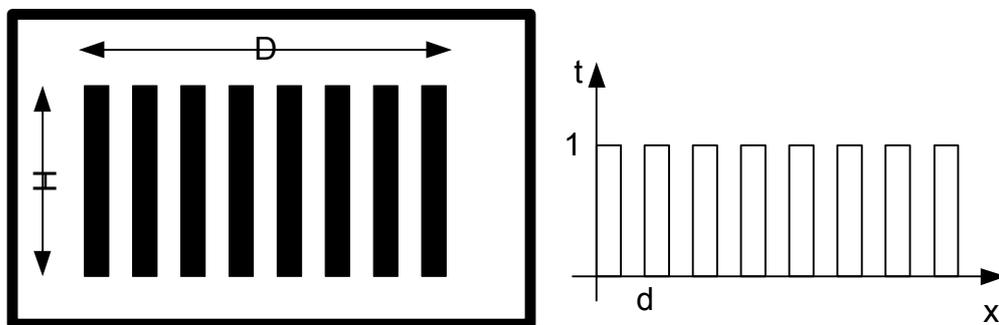


**¿Cuántas predicciones incorrectas necesito para perder la confianza en una teoría?**

## Capítulo 11 DIFRACCIÓN POR OBJETOS PERIÓDICOS

### 11.1. Caso de estudio: Atravesando una diapositiva rayada

El experimento en este caso es similar al realizado al principio del capítulo anterior, pero esta vez en lugar de una ranura, colocamos interceptando al haz del láser una transparencia rayada con franjas paralelas opacas equiespaciadas. En la figura 11.1 se muestra el aspecto de la transparencia ampliada y un gráfico del coeficiente de transmisión  $t(x')$ . El valor de  $d$  (período de las rayas) conveniente es entre 0,01mm y 0,1mm.



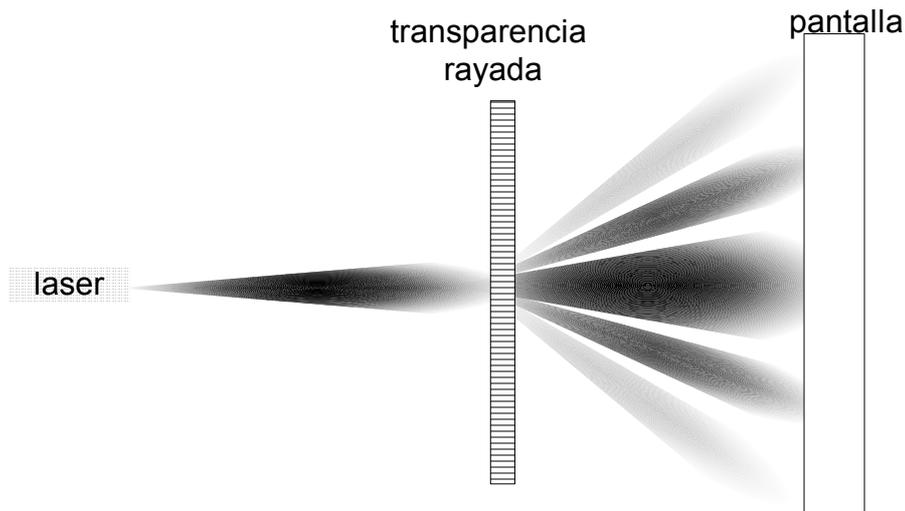
**Figura 11.1.1:** A la izquierda aspecto ampliado de la transparencia conformada por rayas negras paralelas equiespaciadas de ancho total  $D$  y altura  $H$ . A la derecha: gráfico del coeficiente de transmisión de la transparencia en función de la coordenada  $x'$  en la dirección de la periodicidad.  $d$ : período de las rayas.

Si observamos en una pantalla a un par de metros de distancia observamos una serie de máximos de intensidad equiespaciados. Si disponemos de otra transparencia con otro espaciado  $d'$ , veremos que el espaciado de los máximos en la pantalla es inversamente proporcional al espaciado en la transparencia. Un primer análisis cualitativo lo podemos hacer pensando en la similitud entre este resultado y el de la interferencia entre  $N$  fuentes puntuales observadas en la dirección perpendicular a la recta que une las fuentes. Sólo que en este caso no tenemos fuentes puntuales sino que cada ranura actuaría como una fuente, y estaríamos observando la interferencia entre ellas. Si lo queremos analizar en forma cuantitativa comenzamos por considerar el caso de observación en campo lejano (ec. 10.3.7):

$$D^2 \ll \lambda r$$

11.1.1

condición marginalmente válida en nuestro ejemplo, con  $D \cong 0,5\text{mm}$ ,  $\lambda \cong 0,7\mu\text{m}$  y  $r \cong 2\text{m}$ .



**Figura 11.1.2:** Esquema del experimento. Una transparencia rayada obstruye el haz de un láser y se observa la intensidad en una pantalla.

Con lo que la onda difractada queda como el producto de una onda esférica por una función solamente de  $\theta$  y  $\phi$  (ec. 10.3.11):

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} S(\theta, \phi) \quad 11.1.2$$

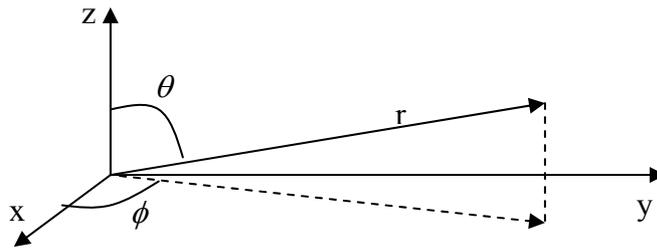
siendo

$$S(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \iint_{S'} t(\vec{r}') \psi_{inc}(\vec{r}') e^{ik(x' \text{sen} \theta \cos \phi + y' \text{sen} \theta \text{sen} \phi)} dx' dy' \quad 11.1.3$$

Con (ver figura 11.1.3):

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \text{sen} \theta \cos \phi \\ \frac{y}{r} &= \text{sen} \theta \text{sen} \phi \end{aligned} \quad 11.1.4$$

En lo sucesivo escribiremos las funciones como dependientes de  $(x, y)$  o  $(\theta, \phi)$  según convenga o simplifique la notación.



**Figura 11.3.1:**  $r$  indica la dirección de observación. La transparencia se encuentra en el plano  $x,y$ .

En el caso de nuestro experimento estaríamos iluminando con una onda Gaussiana ( $\psi_{inc}$ ). Para hacer un análisis más simple al menos como primera aproximación, supongamos que iluminamos las rayas con una onda plana monocromática que incide normalmente a la superficie de la transparencia:

$$\psi_{inc}(\vec{r}') = A \tag{11.1.5}$$

y la transmisión es:

$$t(\vec{r}') = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x' < d/2 \\ 0 & \text{si } d/2 \leq x' < d \end{cases} \tag{11.1.6}$$

y

$$t(x'+d) = t(x') \tag{11.1.7}$$

la integral 11.1.3 queda

$$S(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} A \int_0^H e^{ik(y' \text{sen} \theta \text{sen} \phi)} dy' \int_0^D t(x') e^{ik(x' \text{sen} \theta \cos \phi)} dx' \tag{11.1.8}$$

donde hemos separado explícitamente la integral en  $x'$  e  $y'$ . La integral en  $y'$  es la misma que encontramos en la difracción por una rendija rectangular, y es la integral en  $x'$  la que contiene la información sobre la estructura periódica de la transparencia. Escribamos 11.1.8 entonces como:

$$S(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \frac{AH}{2} e^{\frac{ikHy}{2r}} \frac{\text{sen}(\frac{kHy}{2r})}{\frac{kHy}{2r}} I(x) \tag{11.1.9}$$

donde

$$I(x) = \int_0^D t(x') e^{ikxx'/r} dx' \tag{11.1.10}$$

En 11.1.9 se reconoce el término de la forma  $\text{sen}(uy)/uy$  correspondiente a la difracción de una ranura que limita en la coordenada  $y'$ . Hay un término de fase adicional  $(kHy/2r)$  debido a que no centramos la ranura en  $y'=0$ , sino que está desplazada en  $H/2$ . La integral 11.1.10 contiene toda la información sobre la periodicidad en  $x'$ . Si  $N$  es el

número de rayas iluminadas en el ancho  $D$ , se puede partir esta integral en  $N$  integrales similares cuya suma dará la forma a la interferencia entre  $N$  fuentes (no puntuales en este caso):

$$I(x) = \int_0^d t(x') e^{ikxx'/r} dx' + \int_d^{2d} t(x') e^{ikxx'/r} dx' + \dots + \int_{(N-1)d}^{Nd} t(x') e^{ikxx'/r} dx' = \sum_{p=0}^{N-1} I_p(x) \quad 11.1.11$$

con

$$I_p(x) = \int_{pd}^{(p+1)d} t(x') e^{ikxx'/r} dx' = \int_{pd}^{(p+1)d} t(x'-pd) e^{ikxx'/r} dx' \quad 11.1.12$$

donde hemos utilizado 11.1.7  $p$  veces en el último paso. Cambiamos el origen de coordenadas en la integración de modo que todas las integrales comiencen en 0:

$$u = x' - pd \quad 11.1.13$$

quedando

$$I_p(x) = \int_0^d t(u) e^{ikx(u+pd)/r} du = e^{ikxpd/r} I_0(x) \quad 11.1.14$$

donde  $I_0(x)$  es el término para  $p=0$ , correspondiente a la difracción por una rendija de ancho  $d/2$ :

$$I_0(x) = \frac{d}{2} e^{\frac{ikdx}{4r}} \frac{\text{sen}\left(\frac{kdx}{4r}\right)}{\frac{kdx}{4r}} \quad 11.1.15$$

y reemplazando 11.1.14 y 11.1.15 en 11.1.11, la sumatoria resulta idéntica a la que aparece en la interferencia de  $N$  fuentes puntuales (ec. 9.8.3 y 9.8.5):

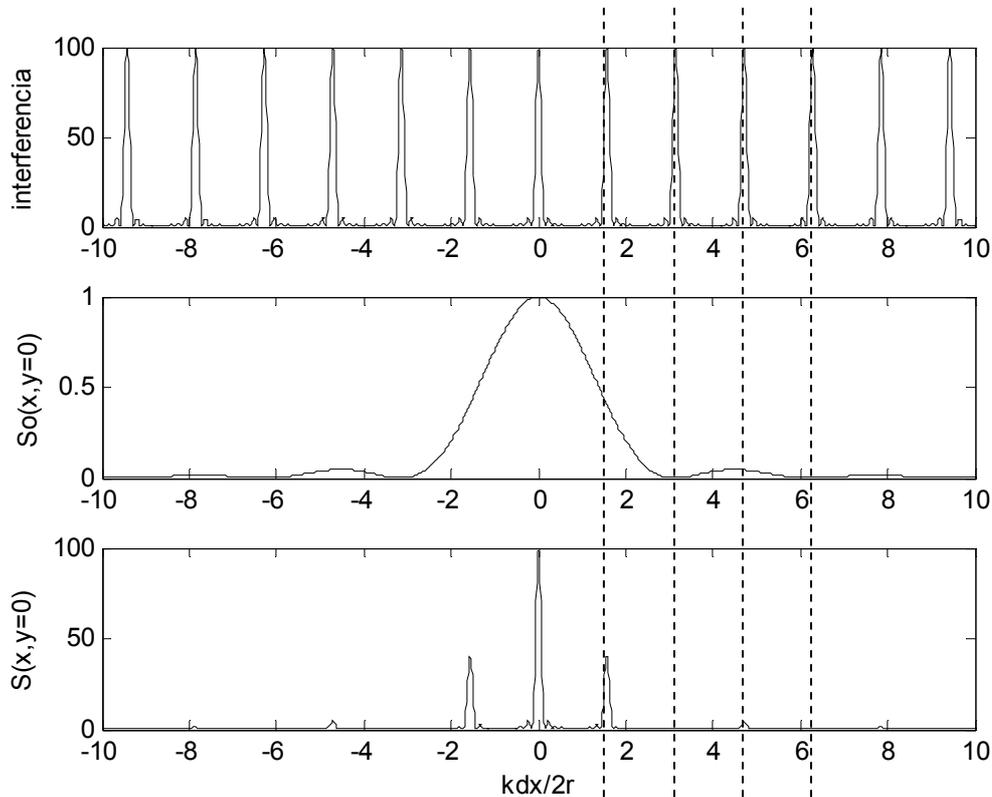
$$I(x) = I_0(x) \sum_{p=0}^{N-1} e^{i(xd/r)p} = I_0(x) e^{i\left(\frac{xd}{2r}\right)N} \frac{\text{sen}\left(\frac{xd}{2r} N\right)}{\text{sen}\left(\frac{xd}{2r}\right)} \quad 11.1.16$$

y la función de onda resulta de 11.1.16, 11.1.2 y 11.1.9

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} S_0(\theta, \phi) e^{i\left(\frac{xd}{2r}\right)N} \frac{\text{sen}\left(\frac{xd}{2r} N\right)}{\text{sen}\left(\frac{xd}{2r}\right)} \quad 11.1.17$$

donde  $S_0$  es el término de la difracción de un rendija de ancho  $d/2$  y alto  $H$ , que queda multiplicado por el término de interferencia de  $N$  fuentes espaciadas en  $d$ .

En la figura 11.1.4 se ilustra la intensidad resultante para el caso  $N=10$  a lo largo del eje  $y=0$ . Se observa que es el término de interferencia el que determina la posición y el ancho de los máximos, ya que el término de difracción lo modula suavemente. Por otro lado es el término de difracción el determinante de la amplitud relativa de los máximos, y en este caso particular ocurre que los máximos pares de interferencia coinciden con ceros de difracción y desaparecen (salvo el de orden cero).



**Figura 11.1.4:** Gráfico de la intensidad resultante con una transparencia de 10 rayas de ancho igual a la mitad del período. Superior: término de interferencia. Medio: término de difracción de una rendija de ancho  $d/2$ . Inferior: resultado de la difracción, producto de las otras dos funciones. Las líneas partidas son para guiar el ojo al comparar los gráficos.

**11.2.Sistemas periódicos iluminados uniformemente**

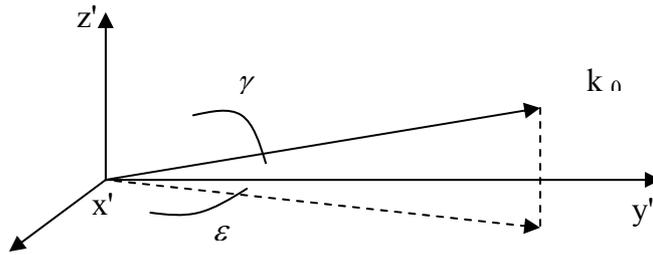
El sistema analizado en el punto anterior tiene aspectos que serán comunes a otros sistemas periódicos, como por ejemplo la posición de los máximos de interferencia, y aspectos que son propios de dicho sistema particular. Analicemos entonces una situación un poco más general en que iluminamos con una onda plana incidiendo en un ángulo arbitrario sobre una transparencia periódica en  $x'$  y factorizable en las dos variables, de modo que:

$$\psi_{inc}(\vec{r}') = Ae^{-i\vec{k}_o \cdot \vec{r}'} = Ae^{-i(k_{ox}x' + k_{oy}y')} = Ae^{-ik[(sen\gamma \cos\epsilon)x' + (sen\gamma \sen\epsilon)y']} \tag{11.2.1}$$

$$t(\vec{r}') = t_y(y')t_x(x') \tag{11.2.2}$$

$$t_x(x'+d) = t_x(x')$$

Con  $\gamma$  y  $\varepsilon$  dados en la figura 11.2.1



**Figura 11.2.1.** Definición de los ángulos polares utilizados.

Si repetimos el análisis anterior en la aproximación de campo lejano vale 11.1.2 y 11.1.3, que con 11.2.1 y 11.2.2 queda:

$$S(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} A \int_0^H t_y(y') e^{iy'[k(\text{sen} \theta \text{sen} \phi) - k_{0y}]} dy' \int_0^D t_x(x') e^{ix'[k(\text{sen} \theta \cos \phi) - k_{0x}]} dx' \quad 11.2.3$$

Ahora debemos repetir el truco de dividir la integral sobre  $x'$  en suma sobre cada período de la transparencia como en 11.1.11 y luego hacer el cambio de variables en cada una dado por 11.1.13 resultando:

$$I(\theta, \phi) = \int_0^D t_x(x') e^{ix'[k(\text{sen} \theta \cos \phi) - k_{0x}]} dx' = \sum_{p=0}^{N-1} \int_{pd}^{(p+1)d} t_x(x') e^{ix'[k(\text{sen} \theta \cos \phi) - k_{0x}]} dx' \quad 11.2.4$$

Y cambiando de origen de integración en cada tramo tomando  $x' = u + pd$ :

$$I(\theta, \phi) = \int_0^d t_x(u) e^{iu[k(\text{sen} \theta \cos \phi) - k_{0x}]} du \sum_{p=0}^{N-1} e^{id[k(\text{sen} \theta \cos \phi) - k_{0x}]p} \quad 11.2.5$$

Esta última sumatoria es el término de interferencia de  $N$  fuentes y la integral corresponde a la parte de difracción de un objeto descrito por un período de la transparencia. Insertando este resultado en 11.1.2

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{-(\omega t - kr)}}{r} S_0(\theta, \phi) e^{id[k(\text{sen} \theta \cos \phi) - k_{0x}]N/2} \frac{\text{sen}(d(k \text{sen} \theta \cos \phi - k_{0x})N/2)}{\text{sen}(d(k \text{sen} \theta \cos \phi - k_{0x})/2)} \quad 11.2.6$$

donde  $S_0$  es el término correspondiente a la difracción por un período, o sea

$$S_0(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \iint_{\text{un periodo}} t(\vec{r}') \psi_{inc}(\vec{r}') e^{i[x'(k \text{sen} \theta \cos \phi - k_{0x}) + ky' \text{sen} \theta \text{sen} \phi]} dx' dy' \quad 11.2.7$$

La expresión 11.2.6 nos indica nuevamente que tenemos una función resultante de la interferencia de fuentes paralelas multiplicada por la expresión de la difracción por un único objeto cuya repetición periódica da lugar a la transparencia objeto de este estudio. De manera similar al caso graficado en la figura 11.2.4 tendremos una sucesión de picos de interferencia con máximos cuando:

$$\frac{d[k \operatorname{sen} \theta \cos \phi - k_{0x}]}{2} = m\pi \quad 11.2.8$$

cuya amplitud depende de la amplitud con que cada objeto difracta en esa dirección y esta dada por la ecuación 11.2.7. Cabe notar que también la fase del máximo depende de la fase que introduce  $S_0(\theta, \phi)$ .

Reagrupando en 11.2.8 y usando los ángulos indicados en la figura 11.2.1, es:

$$k_{0x} = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \gamma \cos \varepsilon \quad 11.2.9$$

Y entonces los máximos ocurren para ángulos  $\theta_m, \phi_m$  tales que:

$$\operatorname{sen} \theta_m \cos \phi_m - \operatorname{sen} \gamma \cos \varepsilon = \frac{m\lambda}{d} \quad 11.2.10$$

Notemos que la ecuación 11.2.10 no es suficiente para determinar las dos magnitudes  $\theta_m, \phi_m$ . Es que solamente hemos dado la posición en la dirección  $x$ , faltaría dar su posición según  $y$ . Sin embargo no apareció ningún término de interferencia en esa dirección por no ser la transparencia  $t(y')$  periódica en esa variable. Una manera de analizar esta situación es pensar que según  $y'$  el periodo es infinito (no se repite) con lo que se obtendría una ecuación similar a 11.2.10 en el límite  $d \rightarrow \infty$ :

$$\operatorname{sen} \theta_m \operatorname{sen} \phi_m - \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \varepsilon = 0 \quad 11.2.11$$

Donde los cosenos en  $\phi$  y en  $\varepsilon$  fueron reemplazados por senos por haber proyectado en la otra dirección. Esta última ecuación equivale a pedir que la componente  $k_y$  de la onda difractada no cambie respecto de la incidente:

$$k_y = k_{0y} \quad 11.2.12$$

Lo cual es cierto si  $t(y')$  es constante o no introduce ningún desfase. Si  $t(y')$  desvía el máximo en la dirección  $y$ , esto aparecerá en la expresión de  $S_0$  y el razonamiento sigue siendo válido.

En el caso particular de incidencia en el plano  $(x', z')$ , o sea para  $\varepsilon=0$  vale (de 11.2.10):

$$\operatorname{sen} \theta_m - \operatorname{sen} \gamma = \frac{m\lambda}{d} \quad 11.2.13$$

Cabe notar que de la ecuación 11.2.7 el máximo de  $S_0$  está en  $\theta=\gamma$ . El máximo de orden cero ( $m=0$ ) ocurre también cuando  $\theta=\gamma$ , o sea en la dirección en que seguiría el haz de no encontrar un obstáculo.

También cabe notar que ni 11.2.10 ni 11.2.13 tienen solución para todo valor de  $m$ . En el caso de 11.2.13 se debe satisfacer que:

$$1 > \text{sen} \theta_m = \frac{m\lambda}{d} + \text{sen} \gamma > -1 \quad 12.2.14$$

Los dispositivos ópticos diseñados con estructura periódica con el objeto de medir la frecuencia de la onda incidente se los denomina **redes de difracción**. Si uno desea utilizar una red de difracción para medir la longitud de onda de una radiación incidente conviene que la mayor amplitud no esté en el orden cero (que no separa las distintas frecuencias) sino en algún otro orden. Para lograr esto conviene que el máximo de  $S_0$  sea en la dirección del máximo del orden en que se desea medir (observar esto en los problemas)

Volviendo a analizar las expresiones 11.2.6 y 11.2.7, vemos que la figura resultante de la difracción por una red cuando es iluminada con una onda plana tiene aspectos característicos que dependen básicamente de tres aspectos de la misma. Un parámetro central es la periodicidad, que determina la posición de los máximos a través de 11.2.13 o en el caso de incidencia más general por 11.2.10. El ángulo de incidencia también afecta la posición de dichos máximos. El otro parámetro importante de la red es el ancho de los máximos de interferencia, ya que como se discutió en el capítulo 9.8, determina la resolución espectral del sistema. Al igual que al analizar la interferencia de  $N$  fuentes, el ancho de cada pico está determinado por el tamaño de la red (o sea el producto  $Nd$ ). La resolución espectral nuevamente queda determinada por la relación 9.8.16 o alternativamente la más universal 9.8.18. La forma particular del objeto que se repite periódicamente entra solamente en el cálculo de  $S_0$ , y es crucial en el momento de definir la eficiencia con que la red envía la radiación en la dirección del máximo que utilizamos para medir, evitando perder energía en órdenes que no son utilizados.

### **11.3. Sistemas periódicos, cuando la iluminación no es uniforme**

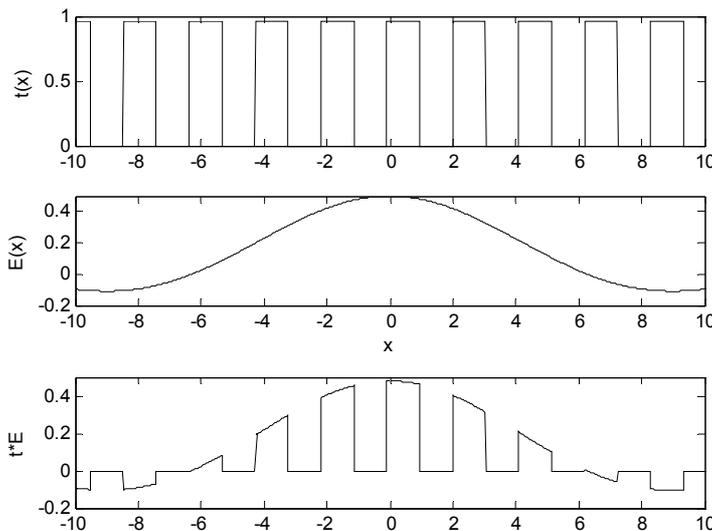
Vimos que ocurre cuando una transparencia periódica es iluminada por una onda plana. El cálculo se dividía en la suma de  $N$  sistemas que a lo sumo diferían en una fase. Pero la iluminación uniforme no es una situación práctica y para realizarla con una aproximación razonable hay que ensanchar el haz de iluminación a dimensiones mucho mayores que la red. Esto dará como resultado indeseado que la mayor parte de la luz se pierde por afuera de la misma. La pregunta es como se puede encarar el problema de apariencia más compleja de una red iluminada por un haz limitado en el espacio. La primera respuesta es escribir dicho haz como superposición de ondas planas (descomposición espacial por Fourier), calcular luego el resultado para cada onda plana y volver a componer la onda resultante como suma de la difracción de cada una de esas ondas. Con esto el problema queda resuelto.

Un primer caso de iluminación no uniforme que nos permite ganar intuición sobre lo que ocurre es el que se obtiene si la onda plana está truncada y su parte espacial es:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0 & 0 < x < D, 0 < y < H \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \quad 11.3.1$$

El resultado es el mismo ya resuelto, solo que cambiamos la interpretación de lo que vemos. Ahora el número de líneas  $N$  no viene dado por el tamaño de la red, sino por el tamaño del haz. Y en el resultado de la difracción este tamaño entraba en el ancho de los picos de interferencia. O sea que limitar el tamaño del haz tendrá que tener como efecto el mismo que reducir el tamaño de la red.

Si bien no esperamos pues resultados muy distintos, los cálculos se complican si pretendemos seguir el mismo procedimiento. Veamos el ejemplo ilustrado en la figura 11.3.1. La transparencia es periódica al igual que antes, pero la parte espacial de la onda incidente depende de la posición. Es así que el producto de ambas, que es el núcleo del integrando en la ecuación 11.1.3, no resulta igual en cada periodo de la red y por lo tanto no se puede escribir como suma de integrales similares.



**Figura 11.3.1.** Ejemplo de difracción con iluminación no uniforme. Superior: transparencia periódica de la red. Medio: perfil espacial de la onda incidente. Inferior: producto de ambas componentes que entran en la integral de difracción.

Veremos que hay un camino alternativo para tratar este problema. Aprovechamos la periodicidad de  $t(x)$  que podemos suponer infinita ya que una vez que es mayor que el haz incidente físicamente no es relevante esta extensión. En ese caso podemos desarrollar la transparencia  $t(x')$  en serie de Fourier compleja (ver sección 6.4). Usando el desarrollo 6.4.14 (que vale aun si  $t(x')$  no es real) y cambiando  $t$  por  $x'$  queda:

$$t(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iK_0 n x'} \tag{11.3.2}$$

Con  $K_0$  la frecuencia espacial fundamental dada a partir del periodo espacial  $d$  por:

$$K_0 = \frac{2\pi}{d} \tag{11.3.3}$$

Con lo que en 11.1.3 ahora queda, usando que la integral de la suma es la suma de las integrales y sacando de la integral los términos constantes:

$$S(\theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \iint_{S'} e^{iK_0 n x'} \psi_{inc}(\vec{r}') e^{ik(x' \text{sen} \theta \cos \phi + y \text{sen} \theta \text{sen} \phi)} dx' dy' \quad 11.3.4$$

Con lo que podemos introducir la notación:

$$S(\theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n S_n(\theta, \phi) \quad 11.3.5$$

Siendo

$$S_n(\theta, \phi) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \iint_{S'} e^{iK_0 n x'} \psi_{inc}(x', y') e^{ik(x' \text{sen} \theta \cos \phi + y \text{sen} \theta \text{sen} \phi)} dx' dy' \quad 11.3.6$$

Que nos indica que cada orden de difracción, o sea para cada valor de  $n$ , se obtiene la difracción a orden cero de una onda incidente desviada por el término de fase lineal con  $x'$  de valor  $K_0 n x'$ , dada por:

$$\psi_n(x', y') = e^{iK_0 n x'} \psi_{inc}(x', y') \quad 11.3.7$$

Que para  $n=0$  da la difracción del haz incidente cuando no hay obstáculo, y coincide con el pico de difracción para el orden cero. Para los otros órdenes el haz incidente es desviado un ángulo  $\theta_n$  dado por:

$$k \text{sen} \theta_n = K_0 n = \frac{2\pi}{d} n \quad 11.3.8$$

Lo que vemos entonces en cada orden es la difracción del haz incidente desviado en ese ángulo. Si el haz no incide perpendicular a la red, podemos expresarlo como un haz que se propaga según  $z$  de función de onda espacial  $\Psi_0(x', y')$  desviado por un término similar al 11.3.8 en un ángulo de incidencia  $\gamma$ :

$$\psi_{inc}(x', y') = e^{-ik \text{sen} \gamma x'} \psi_0(x', y') \quad 11.3.9$$

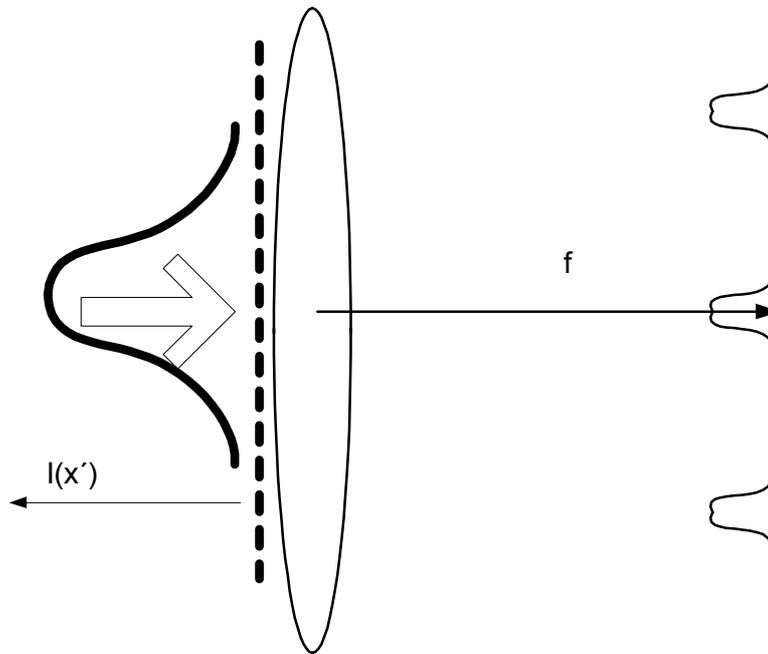
Y ahora introducimos esta expresión en 11.3.7

$$\psi_n(x', y') = e^{iK_0 n x'} \psi_{inc}(x', y') = e^{i(K_0 n - k \text{sen} \gamma) x'} \psi_0(x', y') \quad 11.3.10$$

Y los máximos vuelven a aparecer en las mismas posiciones que las obtenidas para la iluminación uniforme (11.2.13):

$$\text{sen} \theta_m - \text{sen} \gamma = \frac{m\lambda}{d} \quad 11.3.11$$

Para afirmar estos conceptos con un ejemplo, veamos la difracción por una red de un haz Gaussiano en la aproximación paraxial, agregando el truco de la lente para observar en el plano focal en vez de irnos hasta el infinito (o sea en vez de analizar en función del ángulo). La situación es ilustrada en la figura 11.3.2.



**Figura 11.3.2.** Esquema para el estudio de un haz Gaussiano incidiendo en una red de difracción y observando en una pantalla ubicada en el plano focal de la lente.

Supondremos el haz incidente con la cintura en la red, o sea dado por la expresión 10.5.3:

$$\psi_{inc}(x', y') = \psi_0 e^{-\frac{(x'^2 + y'^2)}{2\sigma^2}} \quad 11.3.12$$

Que introducimos en 11.3.6 haciendo las aproximaciones indicadas e incluyendo el término de la lente (10.4.6):

$$S_n(x, y) = \iint_{S'} e^{iK_0 nx'} e^{\frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2f}} \psi_0 e^{-\frac{(x'^2 + y'^2)}{2\sigma^2}} e^{ik\frac{(x'x + y'y)}{f}} dx' dy' \quad 11.3.13$$

Que es fácilmente factorizable en dos integrales:

$$S_n(x, y) = \psi_0 \int e^{iK_0 nx'} e^{\frac{ikx'^2}{2f}} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} e^{ik\frac{x'x}{f}} dx' \int e^{\frac{iky'^2}{2f}} e^{-\frac{y'^2}{2\sigma^2}} e^{ik\frac{y'y}{f}} dy' = \psi_0 I_1(x) I_2(y) \quad 11.3.14$$

Donde las integrales  $I_1(x)$  e  $I_2(y)$  son muy similares a  $I(x)$  de 10.5.6. Resolviéndola siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$I_p = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta_p} \quad \text{con } p=1 \text{ o } 2 \quad 11.3.15$$

y

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma^2} + \frac{ik}{f} \right) \quad 11.3.16$$

$$\beta_1(x) = \frac{\left( \frac{kx}{f} + K_0 n \right)^2}{4 \left( \frac{1}{\sigma^2} + \frac{ik}{f} \right)} = \frac{k^2}{4f^2} \left( x + \frac{fK_0}{k} n \right)^2 \frac{\left( \frac{1}{\sigma^2} - \frac{ik}{f} \right)}{\left( \frac{1}{\sigma^4} + \frac{k^2}{f^2} \right)}$$

11.3.17

$$\beta_2(y) = \frac{\left( \frac{ky}{f} \right)^2}{4 \left( \frac{1}{\sigma^2} + \frac{ik}{f} \right)} = \frac{k^2}{4f^2} (y)^2 \frac{\left( \frac{1}{\sigma^2} - \frac{ik}{f} \right)}{\left( \frac{1}{\sigma^4} + \frac{k^2}{f^2} \right)}$$

11.3.18

La parte dependiente de  $y$  no presenta mayor interés (no depende de  $n$ , es igual en todos los órdenes), por lo que analizaremos en detalle la parte dependiente de  $x$  en que aparecen los picos debidos a los distintos órdenes de difracción. Si deseamos calcular la intensidad media y no la amplitud de la onda debemos multiplicar 11.3.15 por su conjugado, quedando para la dependencia en  $x$ :

$$|I_1|^2 = \frac{\pi}{|\alpha^2|} e^{-(\beta_1 + \beta_1^*)} = \frac{\pi}{|\alpha^2|} e^{-\frac{1}{2} \left( x + \frac{fK_0}{k} n \right)^2 \frac{1}{\left( \frac{f^2}{k^2 \sigma^2} + 1 \right)}} \cong \frac{\pi}{|\alpha^2|} e^{-\left( x + \frac{fK_0}{k} n \right)^2 \frac{k^2 \sigma^2}{2f^2}}$$

11.3.19

Donde en el último paso utilizamos la aproximación de campo lejano:

$$k\sigma \ll f \quad 11.3.20$$

Vemos cada orden da una Gaussiana de ancho:

$$\sigma' = \frac{\lambda f}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad 11.3.21$$

Centrada en:

$$x_n = \frac{\lambda f}{d} n \quad 11.3.22$$

Que son los mismos centros que se obtienen en el caso de iluminación uniforme aplicando la aproximación paraxial a 11.2.13. Vemos también como se esperaba que el tamaño de cada pico (11.3.21) es inversamente proporcional al tamaño del haz incidente (al tamaño de la red que es iluminado).

### 11.4. Sistemas periódicos en más dimensiones

Hasta ahora hemos analizado la difracción en sistemas periódicos en una dada dirección. Hemos visto que aparecen máximos de interferencia en la dirección en el espacio en la que todos los centros interfieren constructivamente. Son máximos de interferencia cuyo ancho esta dado por la difracción en cada objeto. Analizaremos ahora la posición de esos máximos si el objeto tiene periodicidad en más direcciones. Para ello consideraremos que incidimos sobre el sistema con una onda plana y evaluaremos la onda difractada en una dirección dada. Cada dirección de observación  $(\theta, \phi)$  define una onda plana que compone la onda difractada con vector de onda:

$$\vec{k} = k(\text{sen}\theta \cos\phi \hat{x} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}) \quad 11.4.1$$

Entonces si incidimos sobre el sistema con una onda plana de vector de onda

$$\vec{k}_{inc} = k(\text{sen}\gamma \cos\varepsilon \hat{x} + \text{sen}\gamma \text{sen}\varepsilon \hat{y} + \cos\gamma \hat{z}) \quad 11.4.2$$

Buscamos la dirección del espacio en que todas las ondas difractadas en los centros difractares interfieren constructivamente, y ello nos dará la dirección de los máximos.

**Hipótesis fuerte:** la onda difractada en un centro no vuela a difractarse en otro. En la jerga se dice que no hay dispersiones múltiples. Esto es una aproximación que tiene mayor validez cuanto más débil sea la dispersión en cada centro. Es decir al interactuar la onda incidente con el centro dispersor, la mayor parte de la energía continúa en la onda sin perturbarse y por lo tanto podemos despreocupar dispersiones sucesivas. A esta aproximación se la denomina difracción cinemática, en contraposición a la difracción dinámica en la que sí se tienen en cuenta las dispersiones múltiples.

Partiremos entonces de la ecuación 11.1.2, y escribiremos la onda dispersada como la suma de las ondas dispersadas por cada centro:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} S(\theta, \phi, \gamma, \varepsilon) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \sum_n S_n(\theta, \phi, \gamma, \varepsilon) \quad 11.4.3$$

Donde hemos incluido explícitamente que el término de dispersión depende del ángulo de la onda incidente. La suma es sobre los distintos objetos dispersores, cada uno contribuyendo con  $S_n$ , que solamente difieren en la posición en que están ubicados. Supondremos conocida la difracción cuando se tiene un solo objeto ubicado en el centro de coordenadas:

$$S(\theta, \phi, \gamma, \varepsilon) = S_0(\theta, \phi, \gamma, \varepsilon) \quad 11.4.4$$

Donde  $S_0$  es complejo e indica la amplitud y la fase de la onda difractada en la dirección  $(\theta, \varphi)$  si la onda incidente es plana y en la dirección  $(\gamma, \varepsilon)$ .

Según las dimensiones en que se repita periódicamente la estructura difractante, la manera en que convendrá agrupar los términos de la sumatoria. En la figura 11.4.1 se ilustran sistemas periódicos en una, dos y tres dimensiones. En el caso de una dimensión, los centros de cada objeto se contienen como múltiplos de un vector  $\vec{a}$  dirigido en la dirección de la periodicidad y de longitud igual al espaciado entre los objetos contiguos:

$$\vec{r}_m = m\vec{a} = \vec{r}_{m+1} - \vec{r}_m \quad 1 \leq m \leq M \quad 11.4.5$$

Donde hemos dispuesto  $M$  objetos en esa red.

Para el caso de dos dimensiones, cada punto de la red se puede indicar por sus coordenadas en la base de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  como:

$$\vec{r}_{mp} = m\vec{a} + p\vec{b} \quad 1 \leq m \leq M \quad 1 \leq p \leq P \quad 11.4.6$$

Habiendo en este caso  $M \times P$  objetos. Y para el caso en tres dimensiones, la base tendrá tres elementos y distribuyendo  $M \times P \times Q$  objetos queda:

$$\vec{r}_{mpq} = m\vec{a} + p\vec{b} \quad 1 \leq m \leq M \quad 1 \leq p \leq P \quad 1 \leq q \leq Q \quad 11.4.7$$

De modo que barriendo los índices  $m, p$  y  $q$  según el caso se podrá sumar sobre todos los objetos. El problema es entonces escribir la difracción de un objeto que se encuentra desplazado respecto del origen de coordenadas en función de dicho desplazamiento. Para ello supondremos un objeto desplazado en  $\vec{r}_0$ , calcularemos la onda incidente en el sistema de coordenadas desplazado en  $\vec{r}_0$ , aplicaremos la expresión de la difracción 11.4.3 aplicada a un solo objeto centrado (11.4.4) y luego volveremos al centro de coordenadas original desplazándonos en  $-\vec{r}_0$ . En la figura 11.4.2 se ilustran los dos sistemas de coordenadas y la notación en uso. El origen de coordenadas es  $O$ , el sistema centrado en el objeto tiene un sistema fijo a él con centro  $O'$  desplazado en  $\vec{r}_0$ . El punto de observación es  $R$  de coordenada  $\vec{r}$  en el sistema  $O$  y coordenada  $\vec{r}'$  en el sistema  $O'$ . Trabajaremos en la aproximación de campo lejano:

$$r \approx r' \quad 11.4.8$$

$\vec{r}$  paralelo a  $\vec{r}'$  o sea  $\theta = \theta'$  y  $\phi = \phi'$

Y la onda incidente con vector de onda dado por 11.4.2 es en cada sistema:

$$\psi_{inc} = Ae^{i(\omega t - \vec{k}_{inc} \cdot \vec{r})} = Ae^{i(\omega t - \vec{k}_{inc} \cdot (\vec{r}' + \vec{r}_0))} = Ae^{-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}_0} e^{i(\omega t - \vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}')} \quad 11.4.9$$

Donde cabe notar que al cambiar de origen simplemente se introduce una fase dada por el producto escalar del vector de onda por el vector desplazamiento.

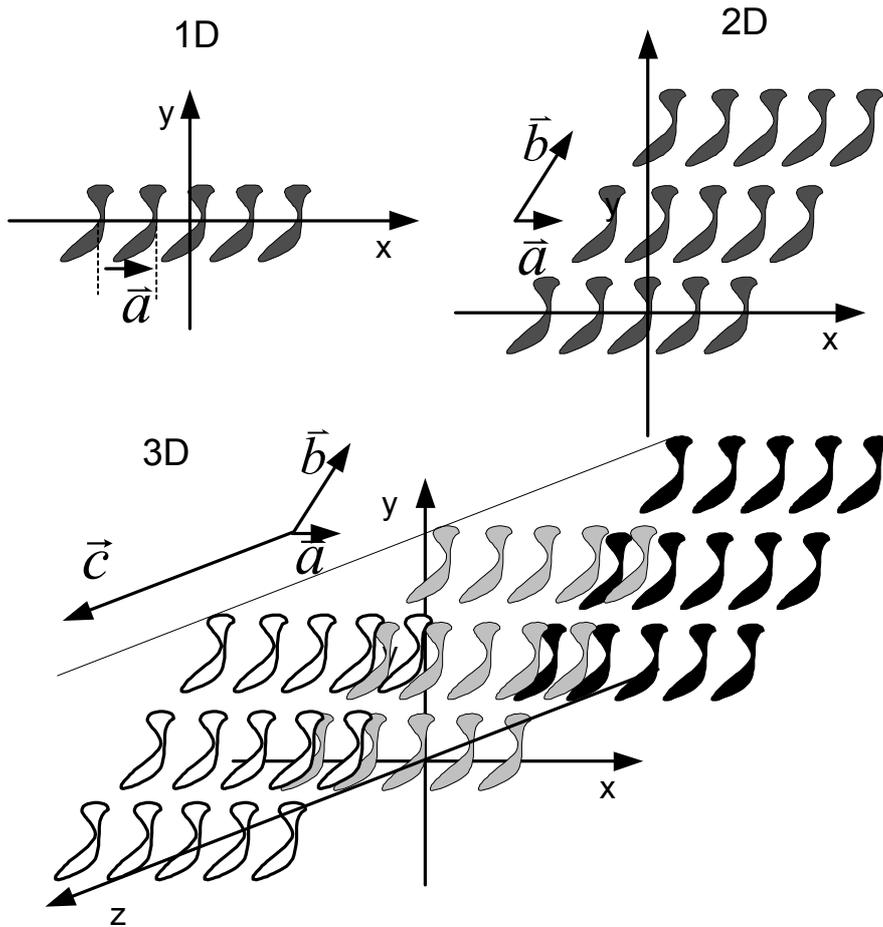


Figura 11.4.1. Sistemas periodicos en 1, 2 y 3 dimensiones.

La onda difractada en el sistema  $O'$  se obtiene de 11.4.3, 11.4.4, 11.4.8 y 11.4.9 :

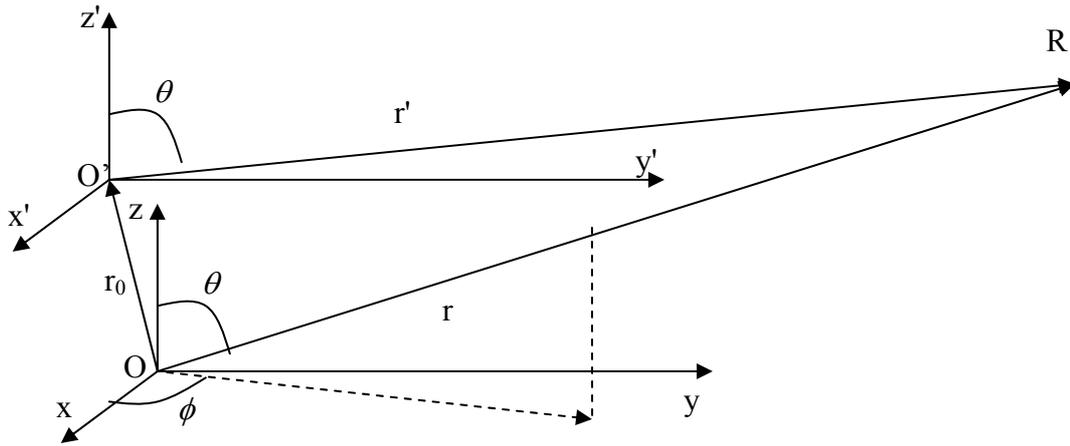
$$\psi(\vec{r}', t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr')}}{r'} e^{-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}_0} S_0(\theta, \phi, \gamma, \epsilon) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}')}}{r'} e^{-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}_0} S_0(\theta, \phi, \gamma, \epsilon) \tag{11.4.10}$$

Y al volver al origen  $O$ , por estar en campo lejano (11.4.8) cambiamos  $r'$  por  $r$  en la amplitud y

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = kr - \vec{k} \cdot \vec{r}_0 \tag{11.4.11}$$

Por ser  $\vec{k}$  y  $\vec{r}$  paralelos. Con lo que

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} e^{-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}_0} S_0(\theta, \phi, \gamma, \epsilon) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}{r} e^{i(\vec{k} - \vec{k}_{inc}) \cdot \vec{r}_0} S_0(\theta, \phi, \gamma, \epsilon) \tag{11.4.12}$$



**Figura 11.4.2:** Cambio de origen de coordenadas.  $r$  indica la dirección de observación. El objeto está centrado en  $O'$ , y en la aproximación de campo

Vemos pues que al desplazar el centro dispersor solamente introducimos un término de fase que depende de la posición del centro, y la diferencia entre el vector de onda incidente y el dispersado (dirección de observación). Poniendo explícitamente la posición de cada centro  $\vec{r}_n$  en vez de  $\vec{r}_0$  para cada sumando de la expresión 11.4.3 queda :

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \sum_n S_n(\theta, \phi, \gamma, \varepsilon) = \frac{-1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} S_0(\theta, \phi, \gamma, \varepsilon) \sum_n e^{i(\vec{k} - \vec{k}_{inc}) \cdot \vec{r}_n} \tag{11.4.13}$$

Ahora solo queda evaluar la sumatoria de los términos de fase para cada uno de los ejemplos de la figura 11.4.1.

**Caso unidimensional:**

La posición de los centros está dada por 11.4.5, con lo que:

$$\sum_n e^{i(\vec{k} - \vec{k}_{inc}) \cdot \vec{r}_n} = \sum_{m=1}^M e^{im(\vec{k} - \vec{k}_{inc}) \cdot \vec{a}} \tag{11.4.14}$$

Esta expresión es la suma de números complejos de módulo unitario y toma el valor máximo cuando todos los sumandos valen 1, en que la suma valdrá  $M$ . Esto ocurre cuando las fases son múltiplos enteros de  $2\pi$ :

$$(\vec{k} - \vec{k}_{inc}) \cdot \vec{a} = 2n\pi \tag{11.4.15}$$

Que utilizando 11.4.1 y 11.4.2 conduce a

$$\text{sen}\theta_n \cos\phi_n - \text{sen}\gamma \cos\varepsilon = \frac{n\lambda}{a} \tag{11.4.16}$$

Que coincide como era de esperarse con 11.2.10

**Caso bidimensional:**

De manera similar queda ahora una suma sobre  $m$  y  $p$  al usar 11.4.6 se obtiene:

$$\sum_n e^{i(\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot\vec{r}_n} = \sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^M e^{i(\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot(m\vec{a}+p\vec{b})} \quad 11.4.17$$

Y los máximos ocurren cuando

$$\begin{aligned} (\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot\vec{a} &= 2n_1\pi \\ (\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot\vec{b} &= 2n_2\pi \end{aligned} \quad 11.4.18$$

que impone dos condiciones sobre el vector emergente  $\vec{k}$ . Si el objeto está recostado sobre el plano  $xy$ , las condiciones determinan las proyecciones  $k_x$  y  $k_y$ . Si agregamos la condición fijada por la velocidad de fase:

$$|\vec{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{v_f} \quad 11.4.19$$

con esta tercera ecuación determinamos el valor de la proyección restante  $k_z$ . Como 11.4.19 admite dos soluciones, una positiva y otra negativa, habrá una solución transmitida y otra reflejada.

**Caso tridimensional:**

En forma completamente análoga al anterior:

$$\sum_n e^{i(\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot\vec{r}_n} = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^M e^{i(\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot(m\vec{a}+p\vec{b}+q\vec{c})} \quad 11.4.20$$

para la que los máximos ocurren cuando:

$$\begin{aligned} (\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot\vec{a} &= 2n_1\pi \\ (\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot\vec{b} &= 2n_2\pi \\ (\vec{k}-\vec{k}_{inc})\cdot\vec{c} &= 2n_3\pi \end{aligned} \quad 11.4.21$$

que da tres ecuaciones a la que hay que sumarle la condición impuesta por la velocidad de fase (11.4.19, con lo que se tiene un sistema sobre especificado. Solamente habrá solución si o bien nos permitimos dejar libre la frecuencia o bien rotamos la orientación del objeto o la onda incidente hasta encontrar una coincidencia en que se satisfacen las cuatro ecuaciones.

Un caso de uso muy frecuente de la difracción en objetos periódicos es la determinación de la estructura cristalina por medio de rayos X. La idea es determinar la posición ordenada de los átomos en un cristal observando la figura de difracción. Se utilizan rayos X de longitud de onda del orden de la periodicidad de la red, de modo que los máximos aparezcan a ángulos grandes. Hay dos maneras de variar la orientación del cristal, una es moliendo la muestra en pequeñas cristalitas que queden orientadas al azar (o aprovechar que el cristal ya está constituido por tal mezcla), la otra es rotando la muestra según dos ejes y observando la difracción para cada orientación.

**Guía 11**

1) En una rendija de ancho  $D$  se ubican sucesivamente distintas diapositivas de transmisión  $t(x,y)$ . Calcular para cada caso el perfil de intensidades en un plano ubicado suficientemente lejos como para que valga la aproximación de Fraunhofer. Discutir cualitativamente los resultados. Proponga para cada caso como construir las.

a)  $t(x,y) = \cos(\alpha x)$

b)  $t(x,y) = \cos^2(\alpha x)$

c)  $t(x,y) = e^{i\alpha x}$

d)  $t(x,y) = \exp(-x^2/d^2)$  con  $d \ll D$

2) Con una onda plana se ilumina en forma normal una diapositiva de estructura periódica. Si se iluminan  $N$  períodos, calcular en la aproximación de Fraunhofer la amplitud y la intensidad en una pantalla ubicada a una distancia  $L$  de la diapositiva, para cada una de las siguientes transmisiones de las mismas:

a)  $t(x) = \cos(K_0 x)$

b)  $t(x) = 1 + \cos(K_0 x)$

c)  $t(x) = 1 + \sin(K_0 x)$

d)  $t(x) = 1 + \cos(K_0 x) + \sin(2K_0 x)$

Discutir las similitudes, diferencias y algún sistema sencillo para generarlas.

3)  $N$  ranuras de ancho  $a$  y separación  $b$  son iluminadas uniformemente. Calcular la figura de difracción en el campo lejano. Discutir como cambia el patrón de intensidades si se cambia el ángulo con que se incide sobre la red. ¿Qué pasa si inciden dos longitudes de onda distintas, y en qué casos se distinguen los dos máximos?

4) Para los dos ejercicios anteriores de ejemplos alternativos de redes que den el mismo patrón de intensidad.

5) ¿Como cambian las figuras de difracción si en los ejercicios 2 y 3 se ilumina con un haz Gaussiano?

¿Qué es propio de la forma de iluminar, qué de la periodicidad de la transparencia y qué de la forma particular que se repite periódicamente?

6) Repita los ejercicios anteriores (2-5) para el caso en que se intercala una lente después de la red. ¿Y si se intercala antes?

7) Un espejo tiene una superficie ondulada de modo que la fase de la onda reflejada varía según  $\phi = \delta \cos(K_0 x)$ . Si  $\delta \ll 1$ , calcule la onda difractada en la reflexión.

8) Se tiene una estructura periódica con una transmisión

$$t(x,y) = [1 + \cos(K_1 x)] \{1 + \cos(K_2 y)\}$$

calcular el perfil de intensidades difractado en la aproximación de campo lejano.

9) Calcular la dirección en que aparecen los máximos en una estructura bidimensional

en que  $\vec{a} = \frac{\lambda}{3} \hat{x}$  y  $\vec{b} = \frac{\lambda}{5} \hat{y}$ .