Problema Función de Green

a)

Dividimos el espacio en dos regiones libres de carga zona 1: z>z' y zona 2: z<z'

El problema en cada región se resuelve usando la base de funciones:

$\phi_n(x)=\sin(k_n x)$; $\phi_m(y)=\sin(k_m y)$; $Z(z)=e^{-\gamma_{mn}|z-z'|}$

Estas funciones satisfacen Laplace y las condiciones de contorno: se anulan en x=0, x=a, y=0, y=a, $z\longrightarrow\pm\infty$, donde:

$k_n=n\pi/a$ $\gamma_{mn}=\sqrt{k_n^2+k_m^2}$, n,m : enteros positivos

Nótese que hemos introducido constantes en Z(z) de modo de hacer mas simple la condición de continuidad en z' .

La función en la zona superior es:

$G_1(x,y,z,x',y',z')=\sum\sum A_{mn}\,\phi_n(x)\,\phi_m(y)e^{-\gamma_{mn}|z-z'|}$

en la zona inferior es:

$G_2(x,y,z,x',y',z')=\sum\sum B_{mn}\,\phi_n(x)\,\phi_m(y)e^{-\gamma_{mn}|z-z'|}$

Por continuidad en z=z' se tiene que: $A_{mn}=B_{mn}$

Ahora planteamos la discontinuidad de la componente normal del campo eléctrico al pasar z=z' .

$(-\frac{\partial G_1}{\partial z})\big|_{z=z'}-(-\frac{\partial G_2}{\partial z})\big|_{z=z'}=4\pi\sigma(x,y)$, donde: $\sigma(x,y)=\delta(x-x')\delta(y-y')$ operando se tiene:

$\sum\sum 2A_{mn}\,\gamma_{mn}\,\phi_n(x)\,\phi_m(y)e^{-\gamma_{mn}|z-z'|}=4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')$

Multiplicamos por: $\phi_{n'}(x)\,\phi_{m'}(y)$ e integramos en x e y, entre 0 y a, usando la ortogonalidad:

$$\int_0^a \phi_{n'}(x)\,\phi_n(x)dx=\frac{a}{2}\delta_{n'n}$$

Obtenemos finalmente:

$$A_{mn}=-\frac{8\pi}{a^2\gamma_{mn}}\,\phi_n(x')\,\phi_m(y')$$

$$G(x,y,z,x',y',z')=\frac{8\pi}{a^2}\sum\sum\frac{1}{\gamma_{mn}}\,\phi_n(x')\,\phi_m(y')\,\phi_n(x)\,\phi_m(y)e^{-\gamma_{mn}|z-z'|}$$

Claramente esta función de Green es simétrica ante intercambio x' por x,....

b) y c) se calculan empleando la expresión que da el potencial en términos de la función de Green dentro de un volumen dados la densidad de carga

y la condición de contormo del potencial en la superficie que encierra ese volumen.

$$\Phi(x,y,z)=\int\rho(x',y',z')G(x,y,z,x',y',z')dV'+\frac{1}{4\pi}\int\Phi(x',y',z')\nabla'G(x,y,z,x',y',z')\cdot\hat{n}dS'$$

b) En este item el potencial en la superficie es cero y sólo se tiene una densidad de carga:

$\rho(x',y',z')=q\delta(x-x0)\delta(y-y0)\delta(z-z0+d)-q\delta(x-y0)\delta(y-x0)\delta(z-z0-d)$, luego:

$\Phi(x,y,z)=qG(x,y,z,x0,y0,z0-d)-qG(x,y,z,y0,x0,z0+d)$

c) En este item no se tiene densidad de carga, pero hay una condición de contorno no nula en una de las caras (x=0).

$$\nabla' G(x,y,z,x',y',z')\cdot\hat{n} = -\frac{8\pi}{a^2}\sum\sum\frac{1}{\gamma_{mn}}\; k_n\; \phi_m(y')\,\phi_n(x)\,\phi_m(y)e^{-\gamma_{mn}|z-z'|},$$

la integral sobre z' es: $\frac{2}{\gamma_{mn}}$, y la integral sobre y' es: $-\frac{1}{k_m}(\cos(m\pi)-1)$, luego:

$$\Phi(x,y,z) = -\frac{4V}{a^2}\sum\sum\frac{k_n}{\gamma_{mn}^2 k_m}(\cos(m\pi)-1)\;\phi_n(x)\,\phi_m(y)$$

La suma sobre m es sobre los m impares pues: $\cos(m\pi)-1=-2$ para m impar y cero para m par, luego:

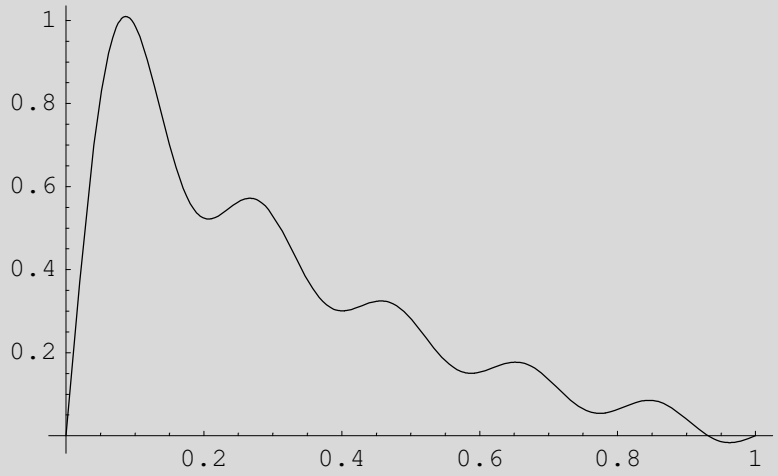
$$\Phi(x,y,z) = \frac{8V}{a^2}\sum\sum\frac{k_n}{\gamma_{mn}^2 k_m}\;\phi_n(x)\,\phi_m(y)$$

No depende de z (simetría de traslación). Nótese que no es trivial que esta solución satisface la condición de contorno $\Phi(0,y,z)=V$,
pues sustituyendo directamente daría un valor nulo.

Sin embargo la serie de Fourier en x , lo que representa para todo valor de y, es una función que para x cerca a 1 es casi 1 aunque estrictamente en x=0 sea nulo. Ver abajo. A medida que uno usa más términos de la serie de Fourier el potencial en función de x para un valor fijo de y=a/2 se alisa
y parece decaer monótonamente desde el valor V hasta cero en x=a.

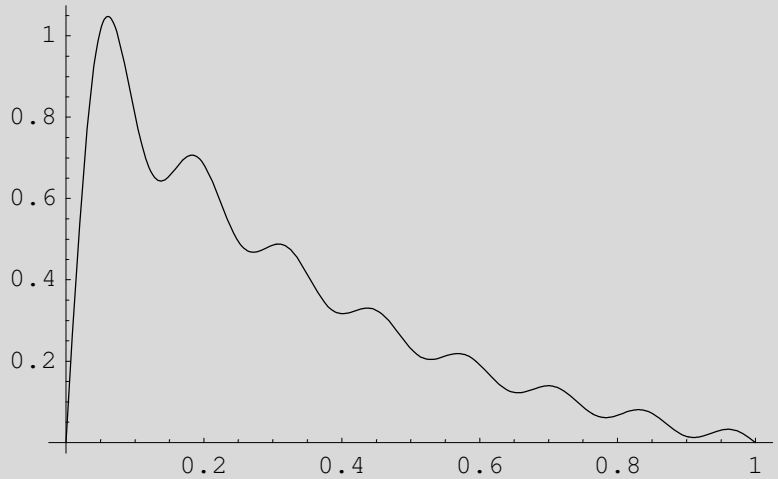
```
k[n_] := n * Pi / a; gama[n_, m_] := Sqrt[k[n] ^2 + k[m] ^2];
phi[n_, x_] := Sin[k[n] * x];
nmax := 10; mmax = 10;

Phi[x_, y_] :=
  (8 * V / a ^2) * Sum[Sum[(k[n] / (k[m] * gama[n, m] ^2)) *
      phi[n, x] * phi[m, y], {n, 1, nmax}], {m, 1, mmax, 2}];
a := 1; y = a / 2; V := 1;
Plot[Phi[x, y], {x, 0, a}]
```



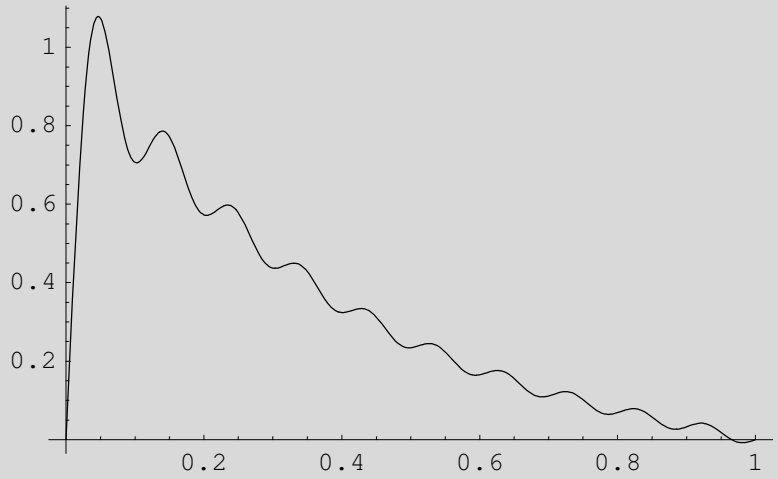
- Graphics -

```
nmax := 15; mmax := 15;
Plot[Phi[x, y], {x, 0, a}]
```



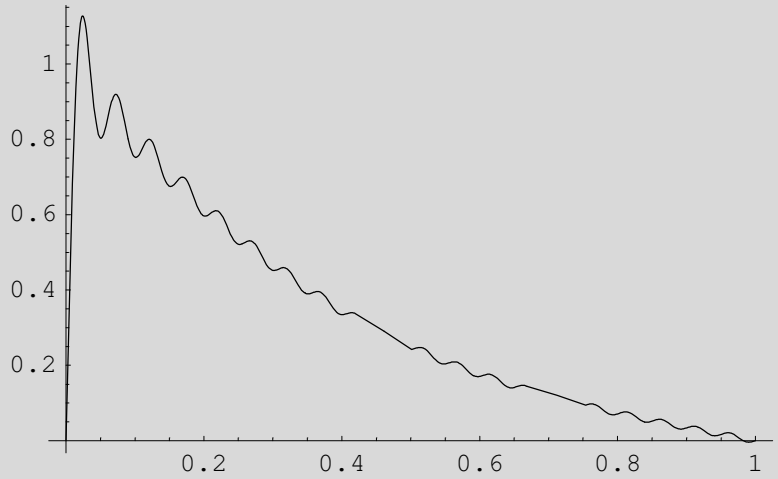
- Graphics -

```
nmax := 20; mmax := 20;
Plot[Phi[x, y], {x, 0, a}]
```



- Graphics -

```
nmax := 40; mmax := 40;
Plot[Phi[x, y], {x, 0, a}]
```



- Graphics -