1 Problemas

1) Un plano infinito posee una densidad superficial de carga $\sigma = \sigma_0\, e^{-\alpha\rho}$, siendo ρ la coordenada radial en coordenadas cilíndricas.Esta carga superficial separa al vacio de un medio material de constante dieléctrica ϵ.

1. Calcular el desarrollo multipolar del potencial generado por las cargas libres hasta el término cuadrupolar inclusive.
2. Hallar el potencial ϕ en todo el espacio separando en las coordenadas apropiadas.

Ayuda:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\rho} J_0(k\rho)\rho\, d\rho = \frac{\alpha}{(\alpha^2+k^2)^{3/2}}$$
$$\int_0^\infty e^{-\alpha\rho} J_0(k\rho)\rho\, d\rho = \frac{\alpha}{(\alpha^2+k^2)^{3/2}}$$
$$\int_0^\infty e^{-\alpha\rho} J_0(k\rho)\rho\, d\rho = \frac{\alpha}{(\alpha^2+k^2)^{3/2}}$$

2) Una esfera compuesta de un material lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad magnética μ, se encuentra en un campo magnético uniforme $\vec{H} = H_0\hat{z}$.

1. Calcular el potencial magnético ϕ_H en todo el espacio.
2. A partir del potencial obtenido, hallar los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en todo el espacio.
3. Obtener la corriente de magnetización a partir de los campos hallados.
4. Usando la corriente del punto anterior y, teniendo en cuenta que el campo magnético uniforme puede generarse a partir de una placa infinita con corriente superficial, calcular el potencial vector.

2 Soluciones

1)

1. Los momentos multipolares son de la forma

$$Q = \int_S \sigma(\vec{x})\, d^2x, \quad P_i = \int_S \sigma(\vec{x}) x_i\, d^2x, \quad Q_{ij} = \int_S \sigma(\vec{x})(3x_ix_j - |\vec{x}|^2\delta_{ij})\, d^2x,$$

donde S es la superficie donde hay carga y $\sigma = \sigma_0\, e^{-\alpha\rho}$. Para el momento monopolar se obtiene

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \sigma_0\, e^{-\alpha\rho}\rho\, d\rho d\theta = 2\pi\sigma_0 \int_0^\infty e^{-\alpha\rho}\rho\, d\rho = \frac{2\pi\sigma_0}{\alpha^2}, \qquad (1)$$

mientras que el dipolar se anula debido a la simetría azimutal. Por la misma razón, las componentes fuera de la diagonal del tensor cuadrupolar son nulas mientras que

$$\begin{aligned} Q_{yy} = Q_{xx} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \sigma_0\, e^{-\alpha\rho}(3\cos^2(\theta)-1)\rho^3\, d\rho d\theta \\ &= \sigma_0 \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha\rho}\rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}(3\cos^2(\theta)-1)\, d\theta\right) \\ &= \sigma_0 \frac{6}{\alpha^4}\pi. \end{aligned} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que es un tensor de traza nula

$$Q_{zz} = -\left(Q_{xx}+Q_{yy}\right) = \frac{-12\pi\sigma_0}{\alpha^4}.$$

Por lo tanto, el desrrollo multipolar hasta segundo orden es

$$\begin{aligned} \phi &\sim \frac{Q}{r} + \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{\sum_{i,j} Q_{ij} r_i r_j}{2r^5} \\ &\sim \frac{2\pi\sigma_0}{\alpha^2}\left(\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} + \frac{3}{2\alpha^2}\frac{\rho^2-2z^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

2. Se resuelve separando la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} &\phi_2 \xrightarrow[z\to\infty]{} 0, \qquad \phi_1 \xrightarrow[z\to-\infty]{} 0, \\ &\phi_2\rfloor_{z=0} = \phi_1\rfloor_{z=0}, \quad -\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z} - \frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = 4\pi\sigma_0\, e^{-\alpha\rho}, \end{aligned}$$

Aplicando estas condiciones salvo la última, se llega a que

$$\phi = \int_0^{\infty} A(k) e^{-k|z|} J_0(k\rho) k\, dk. \tag{4}$$

Metiendo (4) en la última condición se obtiene

$$\int_0^{\infty} (1+\epsilon) k A(k) J_0(k\rho) k\, dk = 4\pi\sigma_0\, e^{-\alpha\rho}.$$

Haciendo uso de la ortogonalidad de las funciones de Bessel

$$\int_0^{\infty} J_0(k\rho) J_0(k'\rho)\rho\, d\rho = \frac{\delta(k-k')}{k},$$

se llega a que los coeficientes $A(k)$ son de la forma

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{4\pi\sigma_0}{(1+\epsilon)k}\int_0^\infty e^{-\alpha\rho}J_0(k\rho)\rho\,d\rho \\ &= \frac{4\pi\sigma_0}{(1+\epsilon)k}\frac{\alpha}{(\alpha^2+k^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{5}$$

de lo que se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^\infty \frac{4\pi\sigma_0\,\alpha e^{-k|z|}J_0(k\rho)}{(1+\epsilon))(\alpha^2+k^2)^{3/2}}dk \\ &= \frac{2\pi\sigma_0}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{e^{-k|z|}J_0(k\rho)}{(1+\epsilon))(1+(k/\alpha)^2)^{3/2}}dk \end{aligned} \tag{6}$$

2)

1. La zona fuera de la esfera la llamo *1* y la zona dentro de la esfera *2*. En ambas, al no haber carga libre, el campo magnético satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla\cdot\vec{H}_{1,2} & =0 \\ \nabla\times\vec{H}_{1,2} & =0 \end{array} \right. \tag{7}$$

de lo que se obtiene que el campo magnético en ambas zonas se puede calcular a través del gradiente de un potencial ϕ que satisface la ecuación de Laplace en ambas zonas. Este potencial debe cumplir las siguientes condiciones de contorno:

$$\phi_2 \xrightarrow[r\to\infty]{} H_0 r\cos(\theta,) \qquad \phi_1 \xrightarrow[r\to 0]{} 0, \tag{8}$$

$$\phi_2\rfloor_{r=a} = \phi_1\rfloor_{r=a}, \qquad \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial r} - \mu\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = 0. \tag{9}$$

Aplicando las 2 primeras condiciones a las soluciones en esféricas, se tiene que

$$\phi_1 = \sum_{l\geqslant 0}\sum_{m=-l}^{l} A^1_{l,m} r^l Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{10}$$

$$\phi_2 = H_0 r\cos(\theta) + \sum_{l\geqslant 0}\sum_{m=-l}^{l} B^2_{l,m} r^{-(l+1)} Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{11}$$

mientras que, aplicando las dos últimas (teniendo en cuenta que $\cos(\theta) = \sqrt{4\pi/3}Y_{1,0}(\theta,\varphi)$) se llega a que los únicos coeficiente no nulos son

$$\begin{aligned} A^1_{1,0} &= H_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, \\ B^2_{1,0} &= \frac{1-\mu}{2}a^3 A_{1,0}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\phi_1 = H_0 r\cos(\theta) \quad (12)$$

$$\phi_2 = H_0 r\cos(\theta)\left(1+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right) \quad (13)$$

2. aplicando gradiente de ϕ, se obtiene para la zona *1*:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -H_0\hat{z}\\ \vec{B} &= \mu\vec{H}\end{aligned}$$

mientras que para la zona *2*

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_0\left(\left(1+(\mu-1)\left(\frac{a}{r}\right)^3\right)\cos(\theta)\hat{r}+\left(1+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right)\sin(\theta)\hat{\theta}\right)\\ \vec{B} &= \vec{H}\end{aligned}$$

3.

$$\vec{M}=\frac{\vec{B}-\vec{H}}{4\pi}=\begin{cases}0 & \text{afuera}\\ \frac{\mu-1}{4\pi}\hat{z} & \text{adentro}\end{cases}$$

Como es constante, no tengo corriente de magnetización en volumen sino en superficie

$$\vec{g}_M = c\hat{n}\times\vec{M} = c\frac{\mu-1}{4\pi}\hat{n}\times\hat{z}.$$

teniendo en cuenta que

$$\hat{n}\times\hat{z} = -\sin(\theta)\hat{\varphi},$$

se obtiene finalmente

$$\frac{4\pi}{c}\vec{g}_M = (1-\mu)\sin(\theta)\hat{\varphi}$$