Solución (esquemática) del ejercicio 3

1. Vamos a llamar $|+\rangle = |s = 1/2, m_s = +1/2\rangle$, y $|-\rangle = |s = 1/2, m_s = -1/2\rangle$ a los estados de una partícula.

   El estado de las partículas 1 y 2 de menor autovalor de $\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}$ (menor momento angular total 12) es el singlete:

   $$|\psi_{12}\rangle = |J = 0, M = 0\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle_{12} - |-+\rangle_{12}).$$

   Para lograr proyección total de spin en z positiva ($M > 0$) el tercer spin debe tener $m_s = +1/2$:

   $$\begin{aligned} |\psi_{123}\rangle &= |J = 0, M = 0\rangle_{12} \otimes |+\rangle_3 \\ &= |J = 1/2, M = +1/2\rangle_{123} \quad \text{sumando los } \mathbf{J} \text{ con C-G.} \end{aligned}$$

   Y para escribirlo en la base $|m_1, m_2, m_3\rangle$:

   $$\begin{aligned} |\psi_{123}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle_{12} - |-+\rangle_{12}) \otimes |+\rangle_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+-+\rangle_{123} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-++\rangle_{123}\,. \end{aligned}$$

   El estado es único porque todos los demás estados que obtenemos sumando los spines 1 y 2 pertenecen al triplete de spin y tienen momento angular $J = 1$, que no es mínimo.

2. La matriz densidad del sistema 123 es:

   $$\begin{aligned} \rho_{123} =& |\psi_{123}\rangle \langle\psi_{123}| \\ =& \frac{1}{2}\,|+-+\rangle\langle+-+| - \frac{1}{2}\,|+-+\rangle\langle-++| \\ &- \frac{1}{2}\,|-++\rangle\langle+-+| + \frac{1}{2}\,|-++\rangle\langle-++|\,. \end{aligned}$$

   La matriz reducida del subsistema 12 se obtiene tomando la traza parcial sobre 3:

$$\begin{aligned}\rho_{12} =& \mathrm{tr}_3\, \rho_{123}\\ =& \sum_{m_{s,3}} \langle m_{s,3}| \,\rho_{123}\, |m_{s,3}\rangle\\ =& \langle +_3| \,\rho_{123}\, |+_3\rangle + \langle -_3| \,\rho_{123}\, |-_3\rangle\\ =& \frac{1}{2}(|+-\rangle \langle +-| - |+-\rangle \langle -+| - |-+\rangle \langle +-| + |-+\rangle \langle -+|).\end{aligned}$$

Y para calcular la pureza:

$$\rho_{12}^2 = \frac{1}{2}(|+-\rangle \langle +-| + |+-\rangle \langle -+| + |-+\rangle \langle +-| + |-+\rangle \langle -+|).$$

Entonces la pureza es:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\, \rho_{12}^2 =& \langle ++| \,\rho_{12}^2\, |++\rangle + \langle +-| \,\rho_{12}^2\, |+-\rangle +\\ & \langle -+| \,\rho_{12}^2\, |-+\rangle + \langle --| \,\rho_{12}^2\, |--\rangle\\ =& 1,\end{aligned}$$

es decir, el sistema es puro.

Para calcular la matriz reducida correspondiente a 23 tomamos la traza parcial sobre 1:

$$\begin{aligned}\rho_{23} =& \mathrm{tr}_1\, \rho_{123}\\ =& \frac{1}{2}\, |-+\rangle \langle -+| + \frac{1}{2}\, |++\rangle \langle ++|\\ \rho_{23}^2 =& \frac{1}{4}\, |-+\rangle \langle -+| + \frac{1}{4}\, |++\rangle \langle ++|\\ \mathrm{tr}\, \rho_{23}^2 =& \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

entonces el subsistema 23 es mixto.

El subsistema 12 es un singlete puro, entonces siempre que midamos, por ejemplo, $(\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2})^2$ vamos a obtener 0. El subsistema 23 es una mezcla estadística de $|-+\rangle$ y $|++\rangle$, entonces si, por ejemplo, medimos $(\mathbf{S_2}+\mathbf{S_3})_z$, no siempre obtendremos el mismo valor.

3. Para $S_{z2} \otimes S_{z3}$:

$$|\psi_{123}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, |+-+\rangle_{123} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, |-++\rangle_{123}\, .$$

Los valores posibles para $S_{z2} \otimes S_{z3}$ son:

- $-\hbar^2/4$, con proyector: $P_- = \mathbf{1}_1 \otimes (|-+\rangle \langle -+| + |+-\rangle \langle +-|)$

- $+\hbar^2/4$, con proyector: $P_+ = \mathbf{1}_1 \otimes (\left|--\right\rangle \left\langle --\right| + \left|++\right\rangle \left\langle ++\right|)$

La probabilidad de medir $-\hbar^2/4$ es:

$$\mathrm{tr}\,(P_- \rho) = 1/2,$$

y el estado resultante es:

$$P_- \left|\psi_{123}\right\rangle \propto \left|+-+\right\rangle \ \textit{(proyectar y luego normalizar)},$$

entonces la partícula 1 tiene estado $\left|+\right\rangle$.

Las mismas cuentas para el caso $+\hbar^2/4$.

Análogamente se hace el cálculo para $S_{x2} \otimes S_{x3}$, pero conviene escribir $\left|\psi_{123}\right\rangle$ en la base de los autoestados de S_x.

4. El estado total del sistema es:

$$\left|\psi\right\rangle = \left|\psi_{\text{espacial}}\right\rangle \otimes \left|\psi_{\text{spin}}\right\rangle .$$

Este estado debe ser antisimétrico frente al intercambio de partículas si las mismas son indistinguibles, porque las partículas de spin 1/2 son fermiones. Entonces si la parte espacial del estado es antisimétrica, la parte de spin debe ser simétrica para que la función total sea antisimétrica.

Todos los estados simétricos de spin pueden calcularse planteando estados con distinto número de spines up y down y simetrizándolos (aplicándoles el operador de simetrización S, cuyo efecto es sumar todas las permutaciones posibles y luego normalizar el estado resultante):

a) $S\left|+++\right\rangle = \left|+++\right\rangle$

b) $S\left|++-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\left|++-\right\rangle + \left|+-+\right\rangle + \left|-++\right\rangle)$

c) $S\left|+--\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\left|+--\right\rangle + \left|-+-\right\rangle + \left|--+\right\rangle)$

d) $S\left|---\right\rangle = \left|---\right\rangle$

Aplicando los operadores $(S_1 + S_2 + S_3)^2$ y $(S_1 + S_2 + S_3)_z$ vemos que los estados a y b son autoestados de ambos; los estados c y d no lo son. Entonces los estados que buscamos, con spin bien definido y compatibles con la simetría de la función de onda son los $\left|+++\right\rangle$ y $\left|---\right\rangle$.