Física Teórica II
Práctica 1: Sistemas de dimensión 2
Parte I: Cuántica de fotones

El estado de polarización de un fotón se puede describir por un vector en un espacio vectorial complejo de dimensión 2. En el se pueden definir las bases $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, correspondientes a polarización lineal en x e y, polarización lineal en x' e y' y polarización circular. Los productos de dichas bases estan en la siguiente tabla:

	x	y	x'	y'	R	L
x	1	0	$\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y		1	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$
x'			1	0	$\frac{\exp(-i\theta)}{\sqrt{2}}$	$\frac{\exp(i\theta)}{\sqrt{2}}$
y'				1	$-\frac{i\exp(-i\theta)}{\sqrt{2}}$	$\frac{i\exp(i\theta)}{\sqrt{2}}$
R					1	0
L						1

1. Sea el estado $|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2}|R\rangle + \frac{(1-i)}{2}|L\rangle$

   a) ¿Está polarizado circularmente? Si es así, ¿es ésta polarización R o L?

   b) ¿Está polarizado linealmente? ¿En qué eje?

   Ayuda:

   a) Multiplique por $\langle x'|$ y encuentre para qué valor de θ, $\langle x'|\psi\rangle = 1$.

   b) Utilizando la matriz cambio de base, escriba $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

2. A partir de la relación de completitud de la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, verifique la de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y la de $\{|R\rangle, |L\rangle\}$.

3. Definimos el operador rotación como $|x'\rangle = \hat{R}(\theta)|x\rangle$ y $|y'\rangle = \hat{R}(\theta)|y\rangle$

   a) Escriba la representación matricial de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}, \{|R\rangle, |L\rangle\}$, y $\hat{R}(\theta)$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

   b) Encuentre los autoestados y autovalores de $\hat{R}(\theta)$.

   c) Aplicando $\hat{R}(\pi/2)$ sobre $|x'\rangle$ muestre que obtiene $|y'\rangle$.

4. Para un estado arbitrario $|\psi\rangle$, diga cuáles de las siguientes propiedades son ciertas siempre, a veces o nunca. Además, diga cuáles dependen de cómo se elige el factor arbitrario de fase.

   a) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle y|\psi\rangle|^2 = 1$.

   b) $\langle x|\psi\rangle$ es real.

   c) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle x'|\psi\rangle$ son reales.

   d) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle R|\psi\rangle$ son reales.

   e) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle\phi|\psi\rangle = 0$.

f) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle R|\psi\rangle|^2 = 1$.

g) Si $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\langle y|\psi\rangle|^2$, entonces $|\langle x'|\psi\rangle|^2 = 1/2$ para todo θ.

Interprete los que pueda en término de los experimentos de polarización y cristales birrefringentes.

5. Sea x' un eje orientado en $\theta = 30$ respecto a x, y un haz de fotones orientados en un estado de polarización ψ tal que $|\langle y|\psi\rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

   a) Se hace pasar el haz por los siguientes 3 proyectores:

   $$Detector \ \leftarrow y' \ \leftarrow R \ \leftarrow y \ \leftarrow \psi$$

   Calcular la probabilidad de transmisión.

   b) Repetir el cálculo si se invierten las direcciones:

   $$Detector \ \leftarrow y \ \leftarrow R \ \leftarrow y' \ \leftarrow \psi$$

   c) Repetir los cálculos si se reemplazan los polarizadores R por polarizadores L.

6. Sea un haz de N fotones por segundo descriptos por el siguiente estado de polarización:

   $$|\psi\rangle = c(3\,|x\rangle + 4i\,|y\rangle)$$

   a) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador y?

   b) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador x' (orientado en un ángulo θ respecto a x)?

   c) Cuando un fotón está polarizado en R lleva un momento angular $\hbar$ respecto de su dirección de movimiento. Si su polarización es L ejerce el mismo momento angular, pero orientado en la dirección opuesta. Si el haz descripto por el estado ψ es absorbido totalmente por una superficie, ¿qué torque se ejercerá sobre la misma?

   d) ¿Qué se observa cuando se envía un solo fotón y éste es absorbido por la superficie (suponiendo que tiene un instrumento suficientemente delicado para medirlo)?

Parte II - Stern Gerlach y generalizaciones.

7. *a*) ¿Por qué se dice que el espacio vectorial de estados necesario para describir los estados de espín de un átomo de plata que atraviesa un dispositivo tipo Stern Gerlach es de dimensión dos?

   b) ¿Por qué se trata de un espacio vectorial?

   c) ¿Por qué es necesario que sea complejo?

8. Sea $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal abstracta. Para las siguientes propiedades, diga cuáles son suficientes para asegurar ortonormalidad, cuáles son necesarias pero no suficientes y cuales irrelevantes a la cuestión de la ortonormalidad:

   a) $\langle 1|2\rangle = 0$.

b) $|\langle 1|x\rangle|^2 + |\langle 2|x\rangle|^2 = 1$.

c) $|\langle 1|\phi\rangle|^2 + |\langle 2|\phi\rangle|^2 = 1$ para todo $|\phi\rangle$.

d) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle 1|\phi\rangle = 0$ y $\langle 2|\phi\rangle = 0$.

e) Para todo $|\phi\rangle$ existen constantes a y b tal que $|\phi\rangle = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle$

f) Al menos uno de $\langle 1|R\rangle$ y $\langle 2|R\rangle$ es complejo.

9. Usando la ortonormalidad de los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ (*i.e.* $\langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0$ y $\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1$), verifique la acción de los operadores S_x, S_y y S_z sobre dichos estados, donde

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \\ S_y &= \frac{i\hbar}{2}\left[-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right] \end{aligned}$$

y pruebe que

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k \qquad \{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$$

10. En un espacio vectorial de dimension 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli.*

a) Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} det(\sigma_k) &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= I \\ \sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk}\ , \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi–Civita y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

c) ¿Cuál es la relación de las matrices de Pauli con los operadores S_i del ejercicio anterior?

11. El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

donde a es un número con dimensiones de energía. Encuentre los autovalores de energía y los correspondientes autoestados como una combinación lineal de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

12. Construya $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ tal que

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ forma un ángulo β con el eje z y su proyección sobre el plano xy forma un ángulo α con el eje x. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Interprete este estado geométricamente.
Nota 1: la respuesta es

$$\cos(\beta/2)|+\rangle + \sin(\beta/2)e^{i\alpha}|-\rangle.$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores.

13. Un sistema de espín 1/2 está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

    a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?

    b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\left\langle (S_x - \langle S_x\rangle)^2 \right\rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0$, $\pi/2$ y π.

    Nuevamente interprete los resultados geométricamente y recuerde que los kets son vectores en un espacio de Hilbert.

14. Un haz de átomos de espín 1/2 es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern-Gerlach en la siguiente manera:

    a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

    b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

    c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

    ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primera medición está normalizado a uno? ¿Cómo se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?