Física Teórica II
Práctica 4: Oscilador Armónico

1. Considere un oscilador armónico en una dimensión.

   a) Usando
$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$
   evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$.

   b) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

2. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,
$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2$$
   ¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

3. Usando el oscilador armónico unidimensional como ejemplo, ilustre la diferencia entre los esquemas de Heisenberg y Schrödinger. Discuta en particular cómo evolucionan en el tiempo en ambos esquemas el valor medio del momento $\langle p\rangle_t$ y la posición $\langle x\rangle_t$ en función de los valores medios iniciales$\langle p\rangle_{t=0}$, $\langle x\rangle_{t=0}$.

   a) En el esquema de Heisenberg deberá calcular la evolución de las variables dinámicas x y p y luego evaluar los valores medios con estados arbitrarios.

   b) En el esquema de Schrödinger deberá considerar la evolución del vector de estado más general luego el calcular los valores medios de los operadores fijos x y p.

   c) Muestre, utilizando el resultado anterior, que si un oscilador armónico se encuentra inicialmente en un autoestado de la posición $|x\rangle$ a medida que evoluciona se va cicla entre autoestados de la posición y el momento de la siguiente forma:
$$|x\rangle \to |p\rangle \to |-x\rangle \to |-p\rangle \to |x\rangle$$
   Encuentren los tiempos para los que esto ocurre.

4. Usando que $a|0\rangle = 0$ y $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$, obtenga las funciones de onda para el estado fundamental $\langle x|0\rangle$ y el primer estado excitado $\langle x|1\rangle$ del oscilador armónico unidimensional.

5. Considere nuevamente un oscilador armónico en una dimensión. Sin trabajar con las funciones de onda:

   a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto anterior. Evalúe el valor de expectación $\langle x \rangle$ y $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ como función del tiempo. (Nota: Los resultados de uno de los puntos anteriores son de gran ayuda.)

6. Deduzca y resuelva las ecuaciones de evolución en la representación de Heisenberg para los operadores a y $a^\dagger$.

7. Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a (note que a es no hermitíco) ,

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \ \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}$$

a) Demuestre que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$$

es un estado coherente normalizado.

b) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza.

c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación $\exp(-i\hat{p}l/\hbar)$ (siendo $\hat{p}$ el operador de momento y l la distancia desplazada) al estado fundamental.

d) Muestre como se compone el operador de desplazamiento generalizado $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ calculando $D(\alpha)D(\beta)$.

e) Calculen el producto escalar $\langle \alpha|\beta \rangle$.

f) Halle la evolución temporal de $|\lambda\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados de H. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor λ varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de λ y muestre como varían $\langle H \rangle$ y $\langle p \rangle$ en el tiempo.

8. Consideren nuevamente un oscilador armónico en un estado coherente $|\lambda\rangle$

a) Si se mide la energía del sistema, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Grafiquen la distribución de probabilidades de energía. Verán que corresponde a una distribución de probabilidades de Poisson.

b) Calculen el valor medio de la distribución de Poisson y el de la energía $\langle H \rangle$.

c) Comparen el resultado del punto anterior $\langle H \rangle$ con el obtenido si calculan $\langle p \rangle$ y $\langle x \rangle$ y usan la relación clásica para la energía $E = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$. ¿En qué limite son iguales?

9. ♣ Considere el estado formado por una superposición de dos estados coherentes;

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N}\left(e^{i\hat{p}L/\hbar} + e^{-i\hat{p}L/\hbar}\right)|0\rangle$$

a) Calcule cuanto vale la normalización N.

b) Calcule y grafique cualitativamente las probabilidades $|\langle x|\psi\rangle|^2$ y $|\langle p|\psi\rangle|^2$.

c) Calcule los valores medios $\langle x \rangle$ y $\langle p \rangle$

10. ♣ Considere una particula que puede moverse en solo una dirección bajo la acción de un potencial $V(x)$.

A t=0 el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$. Donde $|0\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados del Hamiltoniano del oscilador armónico $\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)\,|n\rangle$.

a) Si $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ tendremos un oscilador armónico y $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$. Para este caso:

1) Calcule la evolución temporal de este estado y encuentre el tiempo más corto en el cual el sistema llega a un estado ortogonal al inicial.
2) Calcule las dispersiones $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ y $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ para todo tiempo.

b) Si $V(x) = 0$ el sistema evoluciona libremente y $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. Para este caso:

1) Calcule e integre las ecuaciones de movimiento para los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$.
2) Calcule las dispersiones $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ y $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ para todo tiempo, a partir del mismo estado inicial.