

Física Teórica II

Práctica 5: Momento angular y Rotaciones

Parte I: Rotaciones.

1. Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje z ,

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle$$

- a) Calcule $\langle S_x \rangle_R$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle S_x \rangle$ y $\langle S_y \rangle$ en el sistema original.
- b) Muestre que para una rotación de 2π en φ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1053 (1975) o *Phys. Today* Dic. 1980, pag. 24.

- c) Muestre que no pasa lo mismo con la rotación de en \mathbb{R}^3
2. a) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son dos vectores complejos en tres dimensiones.

Recuerde que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k$.

- b) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I} \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\phi}{2}$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad.

- c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$.
- d) Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el versor definido por los ángulos polares. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle$, que representa un espín orientado según $\hat{\mathbf{n}}$.
3. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín 1/2 representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}}, \beta)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \gamma)$$

- a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ . Encuentre θ y la dirección de dicho eje.
4. Muestre que las matrices de 3×3 G_i ($i = 1, 2, 3$) cuyos elementos están dados por $(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$, donde j y k son índices de fila y de columna, satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular. ¿Cuál es el significado físico (o geométrico) de la transformación matricial que conecta a G_i con las representaciones de 3×3 más usuales del operador de momento angular J_i , con J_z diagonal? Relacione su resultado con la transformación

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}} \delta\phi \times \mathbf{V}$$

bajo rotaciones infinitesimales.

Nota: La siguiente identidad puede ser útil: $\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}$.

Parte II: Momento Angular.

5. Sea \mathbf{J} un operador de momento angular cualquiera, es decir que sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.

- a) Se definen los operadores de subida y bajada en la forma $J_+ = J_x + iJ_y$ y $J_- = J_x - iJ_y$. Demostrar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z, & [J_z, J_+] &= \hbar J_+, & [J_z, J_-] &= -\hbar J_- \\ J_+ J_- &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\ J_{\pm}|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle \\ J_{\pm}|j, \pm j\rangle &= 0. \end{aligned}$$

- b) Mostrar que cualquier estado de J_z satisface $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$, y que si en cierto estado $|\psi\rangle$ se satisface $J_z|\psi\rangle = \hbar m|\psi\rangle$, entonces sobre ese estado el valor medio de la proyección del impulso angular \mathbf{J} sobre una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ que forma un ángulo θ con el eje z es $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \hbar m \cos \theta$. Interprete el resultado.
6. Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores L^2 , L_x , L_y , y L_z en el subespacio generado por la base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_z . Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.

- a) Encuentre la base $\{|l, m_y\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|l, m\rangle$.
- b) Sea un estado descripto por el vector

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle)$$

Si se mide L_x , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y .

- c) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene \hbar , e inmediatamente después se mide L_y . ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

7. Un autoestado de momento angular $|j, j\rangle$ se rota en un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje y . Obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden ϵ^2 .
8. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3z) f(r)$$

- a) ¿Es Ψ autofunción de L^2 ? Si es así, ¿cuál es el valor de l ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?
- b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?
- c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E . Indique cómo puede hallarse $V(r)$.
9. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l , por ejemplo $1/2$, para el impulso angular orbital. A partir de

$$L_+ Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \phi) = 0$$

podemos deducir, como de costumbre

$$Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2} \sqrt{\sin \theta}.$$

Intente construir entonces $Y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \phi)$ de dos maneras diferentes:

- a) aplicando L_- a $Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \phi)$,
- b) usando que $L_- Y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \phi) = 0$.
Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).
10. Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje y . Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en $m = 0, \pm 1, \pm 2$. (Los armónicos esféricos pueden serle útiles).
11. La parte angular de la función de onda de un rotor rígido con un Hamiltoniano $H = \mathbf{L}^2/2I$ esta dada por

$$\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(0) \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \sin \phi \quad (1)$$

- a) Halle $\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(t) \rangle$. *Sugerencia:* exprese la función de onda en términos de los $Y_{l,m}$.
- b) Si se mide L_z . ¿Qué valores pueden obtenerse y con que probabilidad?
- c) ¿Cuál es el valor de $\langle L_x \rangle$?
- d) Si ahora se mide L_x . ¿Qué resultados pueden obtenerse y con que probabilidad?
12. Consideren un oscilador armónico tridimensional descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m [\omega_{\perp}^2 x_3^2 + \omega_{\parallel}^2 (x_1^2 + x_2^2)]$$

Muestre que L_3 conmuta con H y por ende es una constante de movimiento, sin embargo no es así para L_1 y L_2 . ¿Qué puede decir de L^2 ?