Física Teórica II
Práctica 9: Sistemas Compuestos

1. Comparen los valores medios y los posibles resultados que pueden obtenerse al medir el espín en las tres direcciones cartesianas si se tiene:

   a) 1) Un sistema en el estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$
   2) Un sistema en el estado mixto $\rho = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$

   b) 1) Un sistema en el estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle$
   2) Un sistema en el estado mixto $\rho = \frac{1}{3}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{2}{3}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$

2. *a*) Consideren un estado puro de sistemas de espín 1/2 preparados en forma idéntica. Supongan que los valores de expectación $\langle S_x\rangle$, $\langle S_z\rangle$ y el signo de $\langle S_y\rangle$ son conocidos. Indiquen cómo determinaría el vector de estado. ¿Por qué no es necesario conocer la magnitud de $\langle S_y\rangle$?

   b) Consideren un estado mixto de sistemas de espín 1/2. Supongan que los promedios $[S_x]$, $[S_y]$ y $[S_z]$ son conocidos. Indiquen cómo construir matrices densidad de 2×2 que caractericen el estado.

3. Considere un estado de sistemas de espín 1. La matriz densidad ahora es de 3×3. ¿Cuántos parámetros reales independientes se necesitan ahora para caracterizar la matriz densidad? ¿Qué es necesario conocer además de $[S_x]$, $[S_y]$ y $[S_z]$ para caracterizar al estado completamente?

4. Consideren un sistema compuesto por dos subsistemas de espín 1/2 en el estado singlete. Estamos intresados en conocer los valores medios de las mediciones del espín en la dirección x, y y z para la primer partícula independientemente de lo que pase con la segunda. Comprueben que el resultado obtenido con la fórmula $\langle\psi| I\otimes S_i |\psi\rangle$ es el mismo que utilizando $Tr(S_i\rho_1)$, donde ρ_1 es la matriz densidad reducida $\rho_1 = Tr_2(|\psi\rangle\langle\psi|)$

5. Consideren nuevamente un par sistemas de dimensión 2 (espín del electrón, polarización del fotón, etc.). Consideramos tres casos:

   a) Un sistema en un estado puro no separable $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

   b) Un sistema en un estado puro y separable $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$

   c) Un sistema en el estado mixto $\rho = \frac{1}{2}(|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|)$

   Se mide la primer partícula en la dirección $\hat{n}_1$ y la segunda en la dirección $\hat{n}_2$.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas den como resultado de la medición el autovalor positivo? Es decir, ¿cuánto vale para cada caso la probabilidad conjunta $p(+_{\hat{n}_1}, +_{\hat{n}_2})$? Estudien en particular el caso simplificado $|+_{\hat{n}_i}\rangle = \cos\alpha_i |\uparrow_i\rangle + \sin\alpha_i |\downarrow_i\rangle$.

   b) Para ilustrar sus resultados grafiquen las probabilidades obtenidas $p(+_{\hat{n}_1}, +_{\hat{n}_2})$ como función de $\hat{n}_1$ para $\hat{n}_2 = 0, \pi/2, \pi$.

   c) Calculen también las funciones de correlación $c(+_{\hat{n}_1}, +_{\hat{n}_2}) = p(+_{\hat{n}_1}, +_{\hat{n}_2}) - p(+_{\hat{n}_1})p(+_{\hat{n}_2})$

6. Se define la pureza de un estado ρ como $\mathrm{Tr}(\rho^2)$. Considere el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$.

a) Calcule la pureza del estado $|\psi\rangle$.

b) Si se toma la traza parcial sobre el primer subsistema, calcule la pureza del segundo subsistema.

c) Si se toma la traza parcial sobre el segundo subsistema, calcule la pureza del primer subsistema.

d) Puede escribirse $|\psi\rangle$ como un estado producto?

Repita los puntos anteriores para $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$.

7. *a*) Prueben que la evolución temporal del operador densidad ρ en el esquema de Schrödinger está dada por
$$\rho(t) = U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0)$$
donde $U(t,t_0)$ es el operador de evolución temporal.

   b) A partir de la ecuación de Schrödinger para el operador $U(t,t_0)$, encuentre la ecuación de Schrödinger para el operador densidad. ¿Cuál es la diferencia fundamental con la correspondiente ecuación de Heisenberg?

   c) Supongan que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está prescripta por la ecuación de Schrödinger.

8. Vamos a reconsiderar el experimento de Stern-Gerlach agregándole grados de libertad. Hasta ahora solo consideramos cuantitativamente que pasa con el espín pero hablamos de la posición de modo cualitativo. Vamos a remediar un poco esta situación.

   a) Frente a un campo inhomogeneo en la dirección z un espín 1/2 siente una fuerza $\mu\sigma_z\partial B/\partial z$. Si el gradiente del campo es constante $\partial B/\partial z = cte$ entonces el Hamiltoniano de interacción estará dado por:
$$H_{int} = \mu\sigma_z\frac{\partial B}{\partial z}z$$
Calculen la evolución temporal bajo la acción de este Hamiltoniano por un dado tiempo t. Escriba la matriz densidad final. Consideren estados iniciales que son el producto entre un estado coherente de mínima incerteza $|0\rangle$ en la dirección z dado por $\langle z|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{z_0}}e^{-z^2/2z_0^2}$ y un estado de espín tal que:

      1) Inicialmente el espín apunta $+z$; $|\psi(0)\rangle = |0\rangle\,|\uparrow\rangle$.
      2) Inicialmente el espín apunta $-z$; $|\psi(0)\rangle = |0\rangle\,|\downarrow\rangle$.
      3) Inicialmente el espín apunta $+x$; $|\psi(0)\rangle = |0\rangle\,(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$.
      4) Sabemos que el espín es preparado la mitad de las veces en la dirección $+z$ y la otra mitad en $-z$; $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|\,(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)/2$.

   b) Si una vez que la partícula interactúa con el campo magnético ésta viaja bastante hasta los detectores, que van a determinar si la partícula se corrió hacia $+z$ o $-z$, es muy posible que en el camino interactúe con su entorno (el tubo por que que viajan, otras partículas en el camino, otros grados de libertad de la misma partícula, etc.). Esta interacción será distinta dependiendo de si la partícula fue por el camino superior o el inferior. Consideremos esta evolución si el estado de entrada era el del punto c). En este caso, luego del campo magnético, la partícula estará en el estado

$|\psi(t_1)\rangle = (|{+\alpha}, \uparrow\rangle + |{-\alpha}, \downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. Si al avanzar hacia los detectores se acopla con su entorno evolucionará al estado:

$$|\psi(t_1)\rangle \rightarrow |\psi(t_2)\rangle = \frac{|e_1, +\alpha, \uparrow\rangle + |e_2, -\alpha, \downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Donde $|e_1\rangle$ y $|e_2\rangle$ representan los estado del entorno. Que tan parcecida es la interacción para cada camino vienen dada por $\epsilon = |\langle e_1|e_2\rangle|^2$. Con $\epsilon = 0$ las interacciones son completamente distintas y con $\epsilon = 1$ son iguales. Como los detectores no registran este nuevo grado de libertad debemos ignorarlo al estudiar los posibles valores y valores medios que se pueden medir trazando sobre estos grados de libertad. Caculen entonces la matriz densidad reducida del sistema $\rho_s = Tr_e(\rho)$ luego de interacturar con el medio ambiente. Estudien como depende del parámetro ϵ que caracteriza que tan parecida es la interacción con el medio ambiente por ambos caminos.

c) Comprueben que una evolución como la del punto anterior puede darse con un Hamiltoniando del tipo $H = g\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$ con $|\leftarrow\rangle = (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. Encuentren el tiempo en el que la evolución transforma los estados de la siguente manera:

$$|\uparrow\uparrow\rangle \rightarrow |\uparrow\downarrow\rangle \quad ; \quad |\uparrow\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$|\downarrow\uparrow\rangle \rightarrow |\downarrow\uparrow\rangle \quad ; \quad |\downarrow\downarrow\rangle \rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle$$

Ésta evolución lleva el nombre de CNOT (controlled-not), y actúa cambiando el estado de la segunda partícula condicionado al estado de la primera. Escriban el operador unitario que representa esta evolución.

9. Consideren la acción de una evolución CNOT en los siguientes estados:

a) $|\uparrow\uparrow\rangle$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

Digan cuales de esos estados son inicialmente estados producto (separables) y si luego de la compuerta cambiaron o no. Calcule la pureza de cada subsistema antes y después de la evolución, en cada caso.