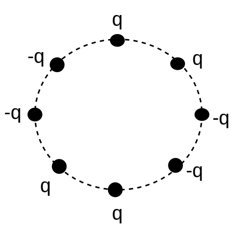
FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre 2009

Guía 2: desarrollo multipolar y medios materiales

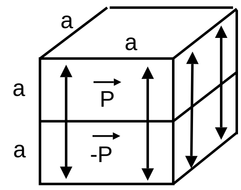
Desarrollo multipolar

1. (a) Probar que todos los momentos multipolares de una distribución de carga esféricamente simétrica son nulos salvo el monopolar.
   (b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. Generalizar este resultado para los momentos de orden superior al dipolar.
   (c) Dado el desarrollo multipolar de dos distribuciones de carga $\rho_1(\mathbf{r})$ y $\rho_2(\mathbf{r})$, ¿cómo es el desarrollo multipolar de la distribución total $\rho_1 + \rho_2$. ¿Y si son tres? Generalizar.

2. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga, y en el caso de tener momento cuadrupolar determinar sus ejes principales:
   (a) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
   (b) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error porcentual si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual a distancias del orden de 1 m de su centro.
   (c) Una distribución plana constituída por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternativamente en los vértices de un cuadrado de lado s. Considerar el límite $s \to 0$ con $q\,s^2 =$ cte. ¿Qué pasa con los momentos superiores al cuadrupolar?
   (d) Cargas puntuales distribuídas sobre un círculo como muestra la figura (a).
   (e) Dos cubos con polarización uniforme unidos como muestra la figura (b).

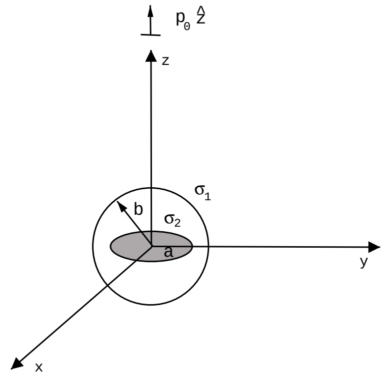


(a)



(b)

3. Una cáscara esférica de radio b posee una distribución de carga permanente $\sigma_1 = \sigma_0 \cos\theta$. En el interior de la cáscara, perpendicular al eje z y centrado en el origen, se encuentra un disco de radio a, cuya distribución de carga es $\sigma_2 = \left(\frac{r}{a} - c\right)\sigma_0$. Sobre el eje z, a una distancia d del origen, hay un dipolo puntual de intensidad $\mathbf{p} = p_0\hat{z}$. Encontrar los valores de c y p_0 para que el primer momento multipolar no nulo de la distribución sea el cuadrupolar, y calcular, en ese caso, el potencial para puntos lejanos.



4. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio a con una densidad superficial de momento dipolar $\mathbf{P}$, perpendicular al disco. Obtener expresiones límite para puntos muy cercanos y muy lejanos al centro del disco. Graficar e interpretar los resultados.

5. La distribución de carga $\rho(\mathbf{r})$ de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del orden de 10^{-13} cm. En primera aproximación, suele asumirse que los núcleos son esféricamente simétricos y que su potencial es entonces de la forma $\phi = Ze/r$. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar Q distinto de cero.

   (a) Para simplificar, considere $\rho(\mathbf{r})$ uniforme en un elipsoide de revolución de semiejes a y b, donde b está asociado al eje de simetría. Calcule el momento cuadrupolar Q respecto de ejes apropiados, usando que la carga total es $q = Ze$ (*Sugerencia*: si usa z como el eje de simetría del elipsoide, note que el cambio de variables: $u = x/b$, $v = y/b$, $w = z/a$, convierte el dominio de integración en la esfera de radio 1).

   (b) ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de Q_{zz}?

   (c) Ponga números: para $Z = 63$, $Q_{zz}/e = 2.5 \times 10^{-24}$ cm^2. Suponiendo que el radio medio es $R = \frac{a+b}{2} = 7 \times 10^{-13}$cm, determinar la diferencia $(a-b)/R$.

   (d) Un núcleo de los descriptos en (a) está en el origen, con su eje de simetría alineado según el eje z. Además, hay un campo eléctrico externo con simetría cilíndrica y con una variación espacial caracterizada por $\partial E_z/\partial z \neq 0$. Muestre que la energía de interacción entre el núcleo y el campo es

$$W = -\frac{Q_{zz}}{4} \left.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_0 . \qquad (1)$$

   Preste atención al factor 1/4.

Medios materiales

6. **Imán esférico**: Este problema es muy importante, pues permite entender analogías y diferencias con el caso eléctrico y aprender a pensar en términos de “cargas magnéticas”.

   (a) Se tiene una esfera de radio a uniformemente magnetizada en volumen con densidad de magnetización $M_0\hat{z}$.

      i. Calcular el momento dipolar de la esfera por estos tres métodos: 1) integrando directamente la densidad de magnetización, 2) calculando el momento dipolar de las cargas magnéticas, 3) calculando el momento dipolar magnético de las corrientes de magnetización.

      Demuestre la equivalencia de los tres métodos para el caso general de una magnetización $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ definida en todo el espacio. ¿Es necesario imponer alguna condición sobre el comportamiento de $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ cuando $r \to \infty$?

      ii. Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el campo en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo puntual de valor igual al momento dipolar total de la esfera. Observe que esto da un cuarto método para calcular el momento dipolar una vez conocidos los campos en el exterior de la esfera.

      iii. Calcular el potencial vectorial a partir de la corriente total.

   (b) Se tiene ahora la misma esfera inmersa en un medio de permeabilidad μ constante.

      i. Discutir cuidadosamente por qué los métodos utilizados en (ii) y (iii) no sirven para hallar $\mathbf{B}$ en este caso. Utilizar entonces el método de separación de variables para calcular $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{M}$ en todo el espacio. Verificar que si $\mu = 1$ se recupera el resultado anterior.

      ii. Hallar el momento dipolar total $\mathbf{m}$ inducido en el medio exterior. De los métodos enunciados en el punto (a-i), ¿cuáles son válidos en este caso?

      iii. Suponga ahora que el medio de permeabilidad μ se extiende hasta un radio b, concéntrico con la esfera. Calcule los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio y encuentre el momento magnético total $\mathbf{m}$ inducido en el medio. Verifique que para $\mu = 1$ obtiene los resultados de (a). Estudie el límite en que $b \to \infty$ y compare con los resultados para $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{m}$ de los puntos (b-i) y (b-ii). ¿Qué sucede con $\mathbf{m}$?

   (c) Probar que una esfera hueca cargada con densidad superficial σ y que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\hat{z}$ es equivalente a una esfera con magnetización uniforme. Deducir de los resultados anteriores, por simple identificación, el momento magnético de la esfera rotante y los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio.

7. Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo punto del espacio producidos por:

   (a) Un imán cilíndrico, finito y permanente, caracterizado por una densidad de magnetización uniforme $\mathbf{M}$ paralela al eje del cilindro.

   (b) Un solenoide de las mismas dimensiones por el que circula una corriente I, y que tiene n espiras por unidad de longitud. *Sugerencia.* Usar el resultado del ítem anterior.

8. Por un cable rectilíneo de radio a y permeabilidad $\mu = 1$, circula una corriente I distribuída uniformemente. Concéntrico con el cable hay un cilindro de hierro dulce ($\mu = 1000$) de radio interior $b > a$ y exterior c.

   (a) Calcular y graficar $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{M}$ en todo punto del espacio.

   (b) ¿Es efectivo el cilindro de hierro dulce para apantallar el campo magnético en la zona $r > c$?

   (c) Encontrar la densidad de corriente de magnetización en volumen y en superficie y las cargas de magnetización.

   (d) Explicar la relación entre cada campo y sus fuentes.

9. Considere una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ε_1 sumergida en otro medio de permitividad ε_2. A una distancia $d < a$ del centro de la esfera hay una carga q.

   (a) Halle el potencial electrostático en todo punto del espacio.

   (b) Halle las densidades de carga de polarización en volumen y superficie.

10. Se tiene una esfera homogénea de permitividad ε y radio b, concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ y radio $a > b$. El conjunto se halla sumergido en un campo eléctrico uniforme al infinito $\mathbf{E} = E_0\hat{z}$.

    (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio.

    (b) Hallar la distribución de cargas inducidas en $r = b$.

11. (a) En un medio de constante dieléctrica ε se sumerge una esfera conductora de radio a cargada con una carga total Q. Hallar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en todo punto del espacio, y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.

    (b) Lo mismo que antes pero ahora con la esfera conductora conectada a potencial V. Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, se manifiesta una diferencia esencial entre ellos: la forma de dependencia de los campos con ε. Explicar las causas de esta diferencia.

12. Un medio dieléctrico de permitividad ε ocupa el semiespacio con $z \leq 0$. A una altura $d > 0$ sobre el dieléctrico hay una carga q.

    (a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio: (i) usando separación de variables en coordenadas cartesianas, y (ii) usando separación de variables en coordenadas cilíndricas.

    (b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a) identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga q. Es decir, escriba $\phi = \phi_q + \phi_r$, donde ϕ_q es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial, ϕ_r?

    (c) Inspirándose en el resultado anterior, vuelva a resolver el problema usando el método de imágenes.

    (d) ¿A qué se reduce la solución cuando $\varepsilon \to \infty$? ¿Puede dar alguna interpretación física de este resultado?

    (e) Sin hacer ningún otro cálculo, proponga una función de Green que sirva para encontrar el potencial en todo el espacio para una distribución arbitraria de carga ubicada siempre en $z > 0$, en el semiespacio no ocupado por el dieléctrico.

Preguntas Molestas

1. (a) ¿Cuál es el cuadrupolo de un dipolo ideal?

(b) ¿Cuál es el dipolo de una carga puntual? ¿Y el cuadrupolo?

(c) ¿De qué dependen las respuestas a las preguntas anteriores?

2. Al resolver un problema interno usando el método de imágenes, ¿cuál es la contribución de las cargas imágenes a los momentos multipolares?

3. ¿Cuáles son los momentos multipolares no nulos de las siguientes configuraciones?

   (a) Una carga puntual en el exterior de una esfera conductora a tierra.

   (b) Un dipolo en la dirección z rodeado por una cáscara esférica conductora conectada a tierra no concéntrica con él.

4. En el caso de un cuerpo con densidad de magnetización permanente $\mathbf{M}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}.$$

Como $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, tenemos que

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\mathbf{B},$$

o sea que $\mathbf{M}$, que es constante, es proporcional a $\mathbf{B}$, que en principio puede ser arbitrario, y siempre con la misma constante de proporcionalidad. ¿Cuál es el error en este razonamiento?

5. Encontrar el campo magnético en todo punto del espacio producido por un toro de sección arbitraria con una magnetización uniforme de la forma $\mathbf{M} = M_0\hat{\phi}$. ¿Cómo cambian los resultados si el toro está sumergido en un medio de permeabilidad μ?

6. ¿Cuál es el menor número de regiones en que puede dividirse el problema de la figura, para calcular el potencial por el método de separación de variables?