

Primer Parcial de Física Teórica 1 – 2do Cuatrimestre 2006

Problema 1. Dos cubos dieléctricos de lados L y permitividades ϵ_1 y ϵ_2 se ponen en contacto. Entre las caras de contacto de los dieléctricos y centrado en ellas se coloca un dipolo ideal \mathbf{p}_0 cuya dirección está contenida en ese plano y es paralelo a una de las caras laterales (ver figura). Todo el sistema está encerrado en una caja a potencial cero.

- Escriba las fuentes de los campos \mathbf{D} y \mathbf{E} en *todo* el espacio.
- Encuentre el campo eléctrico \mathbf{E} en todo el espacio.
- ¿Cuánto vale la densidad de carga de polarización y la carga total de polarización en la interfaz de contacto de los materiales dieléctricos?

Problema 2. Dos anillos de radio b y densidad lineal de carga constante λ y $-\lambda$ se colocan paralelos y a una distancia $d = \sqrt{3}b$ del centro de una esfera conductora de radio a ($a < b$), un anillo por encima y otro por debajo de la esfera (ver figura).

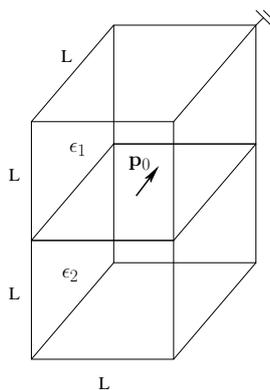
- Elija un sistema de coordenadas y escriba la densidad de carga total.
- Si la esfera conductora está aislada y tiene carga Q , ¿Qué voltaje alcanza?
- Calcule el potencial electrostático en todo punto del espacio usando el método de separación de variables. ¿Cuánto valen el monopolo y el dipolo del potencial?
- Sabiendo que la función de Green para condiciones de Dirichlet para el problema externo de una esfera de radio a es

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

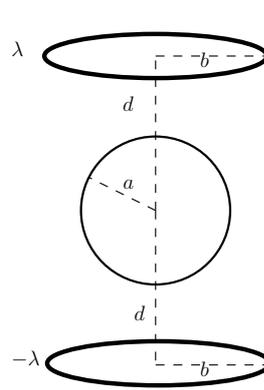
verifique la solución hallada en c).

Problema 3. Se tiene un imán permanente con forma de cilindro finito ahuecado de radio interno a , externo b y longitud L . El cilindro tiene magnetización uniforme \mathbf{M}_0 en la dirección del eje del imán (\hat{z}). (ver figura)

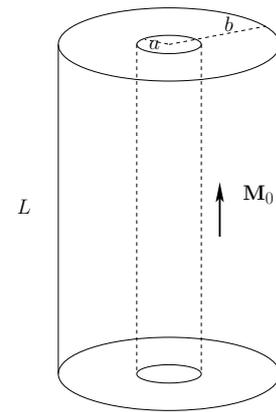
- Identifique las fuentes de los campos \mathbf{H} y \mathbf{B} en *todo* el espacio.
- Calcule la componente \hat{z} del campo \mathbf{B} en todo el espacio.
- Si se sumerge ahora el imán en un medio magnético de permeabilidad uniforme μ . ¿Cuáles son ahora las fuentes de \mathbf{H} en *todo* el espacio? ¿Cambiaron? ¿En cuántas zonas debería separar el problema para resolver por separación de variables?



Problema 1



Problema 2



Problema 3

Fórmulas que pueden ser útiles:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \int_0^\infty x J_\nu(kx) J_\nu(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k-k')$$

Soluciones

Problema 1

a) Las ecuaciones de Maxwell determinan las fuentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{D} . Estas son

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \text{ y } \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{total}} \text{ para el campo eléctrico } \mathbf{E} \text{ o} \\ \nabla \times \mathbf{D} &= 4\pi\nabla \times \mathbf{P}, \text{ y } \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{libre}} \text{ para el campo } \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Empecemos analizando las fuentes de \mathbf{D} . Teniendo en cuenta todo el espacio, las densidades de cargas libres incluyen la densidad de carga del dipolo ideal localizado en la interfaz de contacto de los dieléctricos y las distribuciones de carga en las caras de los cubos puestos a tierra. Estas últimas son las responsables de apantallar el potencial generado por el dipolo de manera que fuera del cubo $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ idénticamente. Además de las cargas libres tenemos que analizar que sucede con el rotor de la polarización. Si bien ambos cubos son dieléctricos con permitividades constantes ϵ_i por lo cual $\nabla \times \mathbf{P}_i = \nabla \times \frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \mathbf{E}_i = \frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{E}_i = 0$ dentro de cada cubo; en las interfaces puede ser, no lo sé *a priori*, que $\mathbf{P} \times \hat{n} \neq 0$ (donde \hat{n} es la normal a la interfaz en cuestión) y por lo tanto tendré otra fuente de \mathbf{D} . El hecho que $\nabla \times \mathbf{D}$ no sea idénticamente cero en todo el espacio implica que no se puede asociar un potencial ϕ_D continuo tal que $\mathbf{D} = -\nabla\phi_D$.

Las fuentes de \mathbf{E} son análogas a las de \mathbf{D} , en este caso $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ en *todo* el espacio lo que sí permite definir en general un potencial continuo¹ ϕ tal que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Entonces en este caso las únicas fuentes que quedan son las cargas, sean libres, de polarización e inducidas en las caras de la caja a $V = 0$. Además, puesto que dentro de cada cubo $\nabla \cdot \mathbf{E}_i = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{D}_i}{\epsilon_i} \right) = \frac{1}{\epsilon_i} \nabla \cdot \mathbf{D}_i = 0$, sólo tengo cargas libres en las superficies.

Vale la pena recordar que \mathbf{E} , \mathbf{D} y \mathbf{P} no son independientes sino que $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$.

b) Para resolver el problema recordamos que las fuentes de \mathbf{E} se encuentran sobre superficies, por lo tanto dentro de los cubos y fuera de ellos vale la ecuación de Laplace para el potencial electrostático: $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0$. Voy a dividir el espacio en tres zonas, a saber:²

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zona I} \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < L, \quad -L < z < 0 \\ \text{zona II} \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < L, \quad 0 < z < L \\ \text{zona III} \quad \text{en otros lados} \end{array} \right.$$

La zona III está delimitada por las cajas a potencial $V = 0$ y el infinito que también podemos tomar como cero. Entonces, por unicidad de la solución de la ecuación de Laplace tenemos $\phi^{\text{III}}(\mathbf{r}) = 0$ y por lo tanto $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$ en esta zona.

Puesto que las condiciones de contorno están dadas en las superficies de cubos es conveniente trabajar en coordenadas cartesianas. Así en cada zona propongo separar variables $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, obteniendo las soluciones generales

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad Y(y) = A'e^{i\alpha y} + B'e^{-i\alpha y}, \quad \text{y} \quad Z(z) = A''e^{\gamma z} + B''e^{-\gamma z}$$

con $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. De las condiciones de contorno sobre la caja veo simplemente que la solución la puedo escribir

$$\begin{aligned} \phi^{\text{I}}(x, y, z) &= \sum_{nm} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh(\gamma_{nm}(z + L)) & \text{zona I} \\ \phi^{\text{II}}(x, y, z) &= \sum_{nm} B_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh(\gamma_{nm}(L - z)) & \text{zona II} \end{aligned}$$

¹Recordar que esto no es así cuando hay una distribución de dipolos perpendiculares a la superficie que se atraviesa.

²Atención: estoy usando un eje \hat{z} que crece hacia abajo en el dibujo.

con $\gamma_{nm} = \frac{\pi}{L} \sqrt{n^2 + m^2}$.

Lo que hace falta ahora es solamente determinar los coeficientes A_{nm} y B_{nm} . En el plano $z = 0$ tenemos que la componente tangencial de \mathbf{E} es continua y que la componente normal \mathbf{D} cambia debido a la densidad de cargas *libres*. Matemáticamente

$$(\mathbf{E}^{\text{II}} - \mathbf{E}^{\text{I}})|_{z=0} \times \hat{z} = 0 \quad (1)$$

es la continuidad tangencial de \mathbf{E} , y se traduce en $\phi^{\text{I}}(z = 0) = \phi^{\text{II}}(z = 0)$.³ El salto de la componente normal de \mathbf{D} se escribe

$$(\mathbf{D}^{\text{II}} - \mathbf{D}^{\text{I}})|_{z=0} \cdot \hat{z} = 4\pi\sigma_{\text{libre}} \quad (\text{en } z = 0)$$

donde $\sigma_{\text{libre}} = \sigma_{\text{dipolo}} = -p_0\delta'(x - L/2)\delta(y - L/2)$ colocando el dipolo $\mathbf{p} = p_0\hat{x}$ en la posición $\mathbf{r} = L/2(\hat{x} + \hat{y})$.

De la continuidad de ϕ sale que $A_{nm} = B_{nm}$ y usando que los medios tienen permitividades ϵ_i , y por lo tanto $\mathbf{D}_i = \epsilon_i \mathbf{E}_i$, el salto de \mathbf{D} se puede reescribir como

$$-\epsilon_2 \frac{\partial\phi^{\text{II}}}{\partial z}\Big|_{z=0} - \left(-\epsilon_1 \frac{\partial\phi^{\text{I}}}{\partial z}\Big|_{z=0}\right) = -4\pi p_0 \delta'(x - L/2) \delta(y - L/2)$$

Que en términos de lo que ya encontramos nos da:

$$\begin{aligned} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \sum_{nm} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \gamma_{nm} \cosh(\gamma_{nm}L) \\ = -4\pi p_0 \delta'(x - L/2) \delta(y - L/2) \end{aligned}$$

Para encontrar los coeficientes A_{nm} multiplicamos la igualdad por elementos de la base con la cual expandimos, en este caso $\sin(n'\pi x/L)\sin(m'\pi y/L)$ e integramos de 0 a L en x e y . Usando que

$$\int_0^L \sin(n\pi x/L) \sin(n'\pi x/L) dx = \delta_{nn'} \frac{L}{2}$$

y que $\int f(x)\delta'(x - x_0)dx = -f'(x_0)$ (si x_0 está en el dominio de integración). Se obtiene

$$A_{nm} = \frac{16\pi p_0 \cos(n\pi/2) \sin(m\pi/2) n\pi}{\gamma_{nm} \cosh(\gamma_{nm}L)(\epsilon_1 + \epsilon_2) L^3}.$$

De aquí es fácil encontrar el campo eléctrico como $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, obteniéndose

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = - \sum_{nm} A_{nm} \frac{\pi}{L} \left[n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh(\gamma_{nm}(L - |z|)) \hat{x} \right. \\ + m \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh(\gamma_{nm}(L - |z|)) \hat{y} \\ \left. + \sqrt{n^2 + m^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \cosh(\gamma_{nm}(L - |z|)) \text{signo}(z) \hat{z} \right], \end{aligned}$$

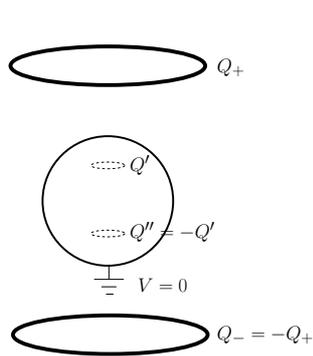
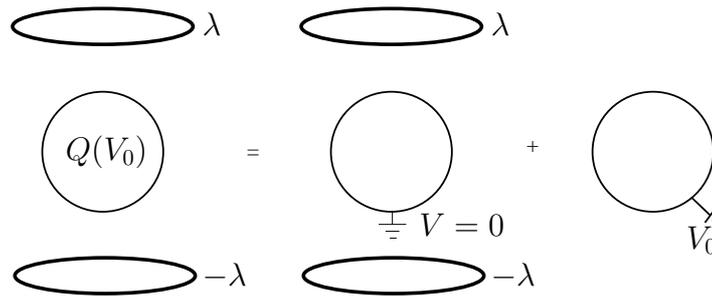
donde para simplificar usé que la dependencia en z en cada zona se puede escribir con $|z|$.

³Notar que si se elige calcular el potencial para \mathbf{D} , i.e. ϕ_D tal que $\mathbf{D} = -\nabla\phi_D$ la condición (1), siempre válida en electrostática, da lugar a un ϕ_D *discontinuo*.

que también puede escribirse

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4b \sin \theta} \delta(r - 2b) \left(\delta(\theta - \theta_0) - \delta(\theta - \pi + \theta_0) \right).$$

- b) La esfera conductora tendrá un voltaje constante V_0 que por ahora no conozco. Sin embargo, el problema es equivalente a la superposición de un problema con los anillos y el conductor conectado a tierra y otro problema con el mismo conductor solo con potencial V_0 .



La carga total del conductor será la suma de las cargas del conductor en ambos problemas. Usando el teorema de Gauss es fácil ver que el conductor a potencial V_0 tiene una carga total $Q_0 = V_0 a$. Mientras que para conocer la carga del conductor en el otro problema de la superposición con el conductor a tierra recurrimos al método de imágenes. El anillo superior tendrá así una distribución de cargas imagen con carga total Q' , que en particular será otro anillo. De la misma manera el anillo inferior tendrá una distribución imagen con carga total Q'' . Ahora, puesto que ambos anillos tiene densidades lineales opuestas y están ubicados simetricamente respecto del centro del conductor $Q' = -Q''$ y por lo tanto la carga total inducida en el conductor en esta parte de la superposición será cero. De aquí se concluye por superposición que la carga total del conductor es $Q_0 = Q = V_0 a$ y que por lo tanto el conductor alcanza un voltaje $V_0 = Q/a$.

- c) Dentro del conductor el potencial es constante y por lo tanto por continuidad debe ser $\phi = Q/a$ allí. Para resolver el problema externo a la esfera me doy cuenta que toda la densidad de carga de los dos anillos se encuentra localizada a una distancia $2b$ como se ve claramente de la expresión de las densidades de carga que calculé en el punto a). Así tenemos solo dos zonas más para calcular $\phi(\mathbf{r})$

$$\begin{cases} \text{zona I} & a < r < 2b \\ \text{zona II} & r > 2b \end{cases}$$

Dentro de cada una de esta zonas no tenemos cargas y por lo tanto el potencial satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$. Puesto que estamos en una situación con simetría azimutal (no hay dependencia en φ) propongo soluciones generales en

cada zona de la forma

$$\phi^I(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad y$$

$$\phi^{II}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A'_l r^l + \frac{B'_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

La zona II llega hasta el infinito y como las cargas están localizadas el potencial puede tomarse cero, por lo tanto $A'_l = 0 \forall l$. Ahora comienzo a imponer la otras condiciones de contorno:

- Potencial constante Q/a en $r = a$, o sea

$$\phi^I(r = a, \theta) = Q/a = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l a^l + B_l/a^{l+1} \right) P_l(\cos \theta).$$

Para encontrar una relación entre los A_l y B_l usamos la ortogonalidad de los P_l , obteniéndose que

$$\frac{Q}{a} = A_0 + \frac{B_0}{a} \longrightarrow B_0 = Q - A_0 a \quad \text{si } l = 0$$

$$0 = A_l + \frac{B_l}{a} \longrightarrow B_l = -A_l a^{2l+1} \quad \text{si } l \neq 0$$

Entonces, separando explícitamente la contribución de Q

$$\phi^I(r, \theta) = \frac{Q}{r} + \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

En esta expresión vemos claramente la superposición discutida en el punto a).

- *Continuidad de la \mathbf{E} tangencial:* El potencial electrostático es continuo al atravesar una densidad superficial de carga, o sea, $\phi^I(r = 2b) = \phi^{II}(r = 2b)$. En términos de las constantes A_l y B'_l esto se traduce en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Q}{2b} + A_0 \left(1 - \frac{a}{2b} \right) = \frac{B'_0}{2b} \rightarrow B'_0 = Q + A_0 (2b - a) \quad \text{si } l = 0 \\ A_l \left(1 - \left(\frac{a}{2b} \right)^{2l+1} \right) = \frac{B'_l}{(2b)^{2l+1}} \rightarrow B'_l = A_l \left[(2b)^{2l+1} - a^{2l+1} \right] \quad \text{si } l \neq 0 \end{array} \right.$$

Con lo cual los potenciales en cada zona los podemos reescribir como

$$\phi^I(r, \theta) = \frac{Q}{r} + \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left[r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta) \quad y$$

$$\phi^{II}(r, \theta) = \frac{Q}{r} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} \left[(2b)^{2l+1} - a^{2l+1} \right] P_l(\cos \theta).$$

- *Salto de la \mathbf{E} normal:* Puesto que en el borde entre la dos zonas hay carga, la componente normal de \mathbf{E} no es continua, sino que satisface

$$(\mathbf{E}^{II} - \mathbf{E}^I) \Big|_{r=2b} \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma \quad \text{con } \hat{n} = \hat{r} \quad (4)$$

donde σ es la densidad de carga en la superficie $r = 2b$. Esta proviene de los anillos, ya que la densidad de carga en volumen es

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4b} \delta(r - 2b) [\delta(\cos \theta - \cos \theta_0) - \delta(\cos \theta + \cos \theta_0)]$$

podemos escribir simplemente⁴

$$\sigma = \frac{\lambda}{4b} [\delta(\cos \theta - \cos \theta_0) - \delta(\cos \theta + \cos \theta_0)]$$

Por lo tanto

$$-\frac{\partial \phi^{\text{II}}}{\partial r} \Big|_{r=2b} + \frac{\partial \phi^{\text{I}}}{\partial r} \Big|_{r=2b} = 4\pi \frac{\lambda}{4b} [\delta(\cos \theta - \cos \theta_0) - \delta(\cos \theta + \cos \theta_0)]$$

o sea,

$$\begin{aligned} -\frac{Q}{(2b)^2} + \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left[l(2b)^{l-1} + \frac{a^{2l+1}(l+1)}{(2b)^{l+2}} \right] P_l(\cos \theta) + \\ + \frac{Q}{(2b)^2} + \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{(l+1)}{(2b)^{l+2}} \left[(2b)^{2l+1} - a^{2l+1} \right] P_l(\cos \theta) \\ = \frac{\pi \lambda}{b} [\delta(\cos \theta - \cos \theta_0) - \delta(\cos \theta + \cos \theta_0)] \quad (5) \end{aligned}$$

De esto y usando nuevamente la ortogonalidad de los P_l se obtiene

$$A_l = \frac{\pi \lambda}{(2b)^l} [P_l(\cos \theta_0) - P_l(-\cos \theta_0)]$$

y de ahí,

$$\begin{aligned} B_l &= \pi \lambda \frac{a^{2l+1}}{(2b)^l} [P_l(-\cos \theta_0) - P_l(\cos \theta_0)] \text{ y} \\ B'_l &= \frac{\pi \lambda}{(2b)^l} \left[(2b)^{2l+1} - a^{2l+1} \right] [P_l(\cos \theta_0) - P_l(-\cos \theta_0)]. \end{aligned}$$

Para analizar el desarrollo multipolar escribimos explícitamente el potencial para r grande, i.e., en la zona II:

$$\begin{aligned} \phi^{\text{II}}(r, \theta) &= \frac{Q}{r} + \pi \lambda \frac{1}{2b} [(2b)^3 - a^3] [P_1(\cos \theta_0) - P_1(-\cos \theta_0)] \frac{P_1(\cos \theta)}{r} \\ &+ \pi \lambda \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{2^l b^l} [(2b)^{2l+1} - a^{2l+1}] [P_l(\cos \theta_0) - P_l(-\cos \theta_0)] \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \end{aligned}$$

y usando que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$,

$$\phi^{\text{II}}(r, \theta) = \frac{Q}{r} + \frac{\pi \lambda}{2b} [(2b)^3 - a^3] 2 \cos \theta_0 \frac{\cos \theta}{r} + \dots$$

⁴Si tiene dudas use Gauss para calcular la carga contenida en un volumen en forma de sección de cascarón de espesor ε alrededor de $r = 2b$ y ángulo sólido $d\Omega'$ y haga tender ε a cero. La carga neta encerrada en ese límite es, por definición, $\sigma (2b)^2 d\Omega'$.

podemos observar que el monopolo del potencial vale Q (como *ya* sabíamos) y que dipolo está en la dirección \hat{z} y vale (usé que $\cos \theta_0 = \sqrt{3}/2$)

$$\mathbf{p} = p_z \hat{z} = \frac{\sqrt{3}}{2b} \pi \lambda [(2b)^3 - a^3] \hat{z}.$$

d) Según la definición de la función de Green para condiciones de Dirichlet, el potencial afuera de la esfera conductora se puede escribir

$$\phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r'}_{\mathcal{I}_1} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \phi(\mathbf{r}') \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{n} d^3 r'}_{\mathcal{I}_2}$$

donde \mathcal{V} es el volumen externo a la esfera, es decir, donde está definida la función de Green que tenemos y donde queremos el potencial. $\partial\mathcal{V}$ es la superficie que delimita ese volumen, en este caso la esfera a $r = a$ y el infinito, y la normal \hat{n} es externa a cada una de esas superficies.

El cálculo de \mathcal{I}_1 es directo,

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\mathcal{V}} r'^2 dr' d(\cos \theta) d\varphi \overbrace{\frac{\lambda}{4b} \delta(r' - 2b) (\delta(\cos \theta' - \cos \theta_0) - \delta(\cos \theta' + \cos \theta_0))}_{\text{densidad de carga de los anillos}} \times \underbrace{4\pi \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r'^l_{<}}{r'^{l+1}_{>}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}_{\text{función de Green}}$$

Puesto que el problema tiene simetría azimutal (la carga no depende de φ), la integración en φ de los armónicos esféricos es distinta de cero sólo si $m = 0$.⁵ Integrando en r' y φ' obtenemos

$$(2\pi)4\pi \sum_l \frac{(2b)^2}{2l+1} \left[\frac{r'^l_{<}}{r'^{l+1}_{>}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{2br} \right)^{l+1} \right] \int d(\cos \theta') Y_{l0}(\theta', \varphi') Y_{l0}(\theta, \varphi) \frac{\lambda}{4b} \times [\delta(\cos \theta - \cos \theta_0) - \delta(\cos \theta + \cos \theta_0)]$$

que escribiendo $Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$ da

$$\mathcal{I}_1 = \lambda b 2\pi \sum_l \left[\frac{r'^l_{<}}{r'^{l+1}_{>}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{2br} \right)^{l+1} \right] [P_l(\cos \theta_0) - P_l(-\cos \theta_0)] P_l(\cos \theta)$$

En esta expresión $r_{<} = \min\{2b, r\}$ y $r_{>} = \max\{2b, r\}$.

Para calcular la contribución de superficie del Teorema de Green, \mathcal{I}_2 , tengo en cuenta que el potencial es constante en las dos superficies contenidas en $\partial\mathcal{V}$ y que

⁵Recordar que $Y_{lm} = A P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ y que $\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} d\varphi = \frac{e^{im\varphi}}{im} \Big|_0^{2\pi} = 0$ para $m \neq 0$.

además en la superficie en infinito $V = 0$. Así solo queda la contribución en $r = a$ que se escribe

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{1}{4\pi} V_0 \int_{\partial V_1} \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \overbrace{(-\hat{r})}^{\hat{n}} a^2 d\Omega' = \frac{Q}{4\pi a} \int \left. \frac{\partial G_D}{\partial r'} \right|_{r'=a} a^2 d\Omega'$$

Para hacer la derivada de G_D tenemos en cuenta que integrando en $r' = a$ estoy en el caso $r > r'$, es decir, $r_< = r'$ y $r_> = r$ en $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Lo que significa que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_D}{\partial r'} &= 4\pi \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \left[\frac{l r'^{l-1}}{r^{l+1}} + (l+1) \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1} r'^{l+2}} \right] \\ \left. \frac{\partial G_D}{\partial r'} \right|_{r'=a} &= 4\pi \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \left[\frac{l a^{l-1}}{r^{l+1}} + (l+1) \frac{a^{l-1}}{r^{l+1}} \right] \\ &= 4\pi \sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{a^{l-1}}{r^{l+1}} \end{aligned}$$

Y entonces debido a la ortogonalidad de los $Y_{lm}(\theta', \varphi')$ solo sobrevive el término con $l = m = 0$

$$\begin{aligned} \int \left. \frac{\partial G_D}{\partial r'} \right|_{r'=a} a^2 d\Omega' &= 4\pi a^2 \frac{a^{-1}}{r} Y_{00}(\theta, \varphi) \int Y_{00}(\theta', \varphi') d\Omega' \\ &= \frac{4\pi a}{r} \text{ o sea } \mathcal{I}_2 = \frac{Q}{r}. \end{aligned}$$

Sumando \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 y sabiendo quién es $r_<$ y $r_>$ se obtiene el mismo resultado de antes.

Problema 3

a) Las fuentes del campo \mathbf{H} se escriben en general como

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 4\pi \rho_M, \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{libre}}$$

donde la densidad de cargas magnéticas es $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ y $\mathbf{J}_{\text{libre}}$ son las corrientes libres. Puesto que el imán permanente del problema tiene magnetización uniforme $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$, no tenemos cargas magnéticas en volumen ($\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ en volumen). Sin embargo, sí tenemos densidades superficiales de carga de magnetización en algunas de las superficies que delimitan el imán. Sabiendo que la σ s de magnetización se escriben en general como $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$ donde \hat{n} es la normal exterior al volumen de material magnético, vemos que en este problema tenemos σ_M solo en las tapas del imán. En la tapa superior $\hat{n} = \hat{z}$ y por lo tanto $\sigma_{M+} = M_0 \hat{z} \cdot \hat{z} = M_0$, mientras que en la inferior $\sigma_{M-} = M_0 \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = -M_0$. En las tapas laterales (internas y externas) al tener $\hat{n} \propto \hat{r}$ ⁶ son cero ($\mathbf{M} \cdot \hat{r} = 0$!). Por otro lado como no hay corrientes libres ($\mathbf{J}_{\text{libre}} = 0$) tenemos que $\nabla \times \mathbf{H} = 0$. Esto nos permitirá definir un potencial para \mathbf{H} análogamente a lo que sucede con el campo electrostático.

⁶ Atención! estoy usando coordenadas cilíndricas (r, φ, z) .

Desde el punto de vista del campo magnético \mathbf{B} , tenemos que sus fuentes son

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\overbrace{\mathbf{J}_{\text{libre}}}^0 + \mathbf{J}_{\text{M}} \right)$$

donde las corrientes de magnetización son $\mathbf{J}_{\text{M}} = c\nabla \times \mathbf{M}$. En volumen, $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ implica que no hay corrientes de magnetización en volumen, pero sin embargo las hay en superficie pues $\mathbf{M} \times \hat{n} \neq 0$ en las superficies laterales internas y externas del imán. En particular,

$$\begin{cases} \text{en } r = a \text{ (radio interno)} & \mathbf{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{z} \times (-\hat{r}) = -M_0 \hat{\phi} \\ \text{en } r = b \text{ (radio externo)} & \mathbf{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{z} \times \hat{r} = M_0 \hat{\phi} \end{cases}$$

O sea que las fuentes de \mathbf{B} son dos corrientes superficiales en la dirección $\hat{\phi}$ localizadas sobre superficies distintas.

Puesto que \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} no son tres magnitudes independientes, sino que $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ y \mathbf{M} en este problema es conocido, uno debe elegir si resolver el problema para \mathbf{H} o para \mathbf{B} , y después usando su relación con \mathbf{M} calcular el otro. Así elegimos calcular \mathbf{H} primero. Recapitulando, este cumple con $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ en todo el espacio y $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ excepto en $z = L/2$ y $z = -L/2$ en donde hay carga de magnetización. Estas pueden escribirse como $\sigma_{M+} = M_0 \Theta(r - a) \Theta(b - r)$ y $\sigma_{M-} = -M_0 \Theta(r - a) \Theta(b - r)$.⁷

- b) Para calcular la componente z del campo \mathbf{B} primero obtengo \mathbf{H} y luego uso que $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. El hecho que el rotor de \mathbf{H} sea cero nos permite definir un potencial para \mathbf{H} , $\phi(\mathbf{r})$ tal que $\mathbf{H} = -\nabla\phi$. Usando entonces el análogo eléctrico resuelvo la ecuación de Laplace. Para simplificar un poco los cálculos lo que voy a hacer es calcular el potencial generado por la corona de cargas magnéticas localizada en $z = L/2$ y luego voy a superponer este resultado con el otro $z = -L/2$ y carga opuesta.

Para calcular el potencial generado por la corona en $z = -L/2$ voy a usar separación de variables en la resolución de la ecuación de Laplace en dos zonas, a saber:

$$\begin{cases} \text{zona I} & z < L/2 \\ \text{zona II} & z > L/2 \end{cases}$$

Además como la densidad de carga superficial tiene simetría cilíndrica voy a expandir la solución en la base de soluciones de la ecuación de Laplace en esas coordenadas.⁸ Antes de hacer esto noto que el dominio en r va hasta infinito y no tiene ninguna condición de contorno particular a un r dado y por lo tanto tendré que usar una base de funciones continua en r . Además la carga tiene simetría azimutal y entonces de todos los elementos de la base solo necesito quedarme con esos que tengan esta simetría. Así puedo escribir el potencial como

$$\begin{aligned} \phi^{\text{I}}(r, z) &= \int_0^\infty A(k) J_0(kr) e^{kz} dk & (z < L/2) \\ \phi^{\text{II}}(r, z) &= \int_0^\infty B(k) J_0(kr) e^{-kz} dk & (z > L/2) \end{aligned}$$

⁷Aquí uso la convención $\Theta(x) = 1$ si $x > 0$ y 0 si $x < 0$.

⁸En realidad también puedo describir una *sola* corona en coordenadas esféricas centradas en el centro de la corona. Pero cuando tenga que superponer este potencial con el de la otra corona corrida en z , no voy a poder hacerlo de manera sencilla. Por esto elegí coordenadas cilíndricas.

Como en el caso eléctrico, la componente tangencial de \mathbf{H} no cambia al atravesar $z = L/2$ y por lo tanto el potencial es continuo. Esto nos lleva a

$$\begin{aligned}\phi^{\text{I}}(r, z = L/2) &= \phi^{\text{II}}(r, z = L/2) \\ \int_0^\infty A(k) J_0(kr) e^{kL/2} dk &= \int_0^\infty B(k) J_0(kr) e^{-kL/2} dk\end{aligned}$$

Entonces usando que $J_0(kr)$ es ortogonal a $J_0(k'r)$,⁹ uno muestra que $A(k)e^{kL/2} = B(k)e^{-kL/2}$ por lo tanto si yo defino $C(k) = A(k)e^{kL/2} = B(k)e^{-kL/2}$ el potencial lo escribo

$$\begin{aligned}\phi^{\text{I}}(r, z) &= \int_0^\infty C(k) J_0(kr) e^{k(z-L/2)} dk \\ \phi^{\text{II}}(r, z) &= \int_0^\infty C(k) J_0(kr) e^{-k(z-L/2)} dk\end{aligned}$$

Para determinar $C(k)$ usamos el salto de \mathbf{H} en la superficie $z = L/2$.

$$\begin{aligned}(\mathbf{H}^{\text{II}} - \mathbf{H}^{\text{I}}) \Big|_{z=L/2} \cdot \hat{z} &= 4\pi\sigma_{M+} \\ -\frac{\partial\phi^{\text{II}}}{\partial z} \Big|_{z=L/2} + \frac{\partial\phi^{\text{I}}}{\partial z} \Big|_{z=L/2} &= 4\pi M_0 \Theta(r-a) \Theta(b-r) \\ \int_0^\infty C(k) 2kJ_0(kr) dk &= 4\pi M_0 \Theta(r-a) \Theta(b-r)\end{aligned}$$

Nuevamente multiplicamos por $J_0(k'r)r$ e integramos de 0 a infinito, usando la ortogonalidad tenemos que

$$C(k') = 2\pi M_0 \int_a^b J_0(k'r) r dr.$$

La integral puede hacerse usando que $d(xJ_1(x))/dx = xJ_0(x)$. Obteniéndose

$$C(k) = \frac{2\pi M_0}{k} [bJ_1(kb) - aJ_1(ka)]$$

y por lo tanto el potencial puede resumirse en

$$\phi(r, z) = 2\pi M_0 \int_0^\infty \frac{1}{k} [bJ_1(kb) - aJ_1(ka)] J_0(kr) e^{-k|z-L/2|} dk$$

Finalmente para obtener el potencial total, superpongo el generado por la corona de $\sigma_{M-} = -\sigma_{M+}$ centrada en $z = -L/2$, así

$$\phi_{\text{total}}(r, z) = 2\pi M_0 \int_0^\infty \frac{1}{k} [bJ_1(kb) - aJ_1(ka)] J_0(kr) [e^{-k|z-L/2|} - e^{-k|z+L/2|}] dk$$

Puesto que $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ tenemos que

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \underbrace{-\nabla\phi_{\text{total}} + 4\pi M_0 \hat{z}}_{\mathbf{H}} & \text{dentro del imán} \\ \underbrace{-\nabla\phi_{\text{total}}}_{\mathbf{H}} & \text{fuera del imán} \end{cases}$$

⁹ $\int_0^\infty r J_0(kr) J_0(k'r) dr = 1/k \delta(k - k')$

Y en particular la componente \hat{z} es

$$B_z = \begin{cases} 2\pi M_0 \int_0^\infty [bJ_1(kb) - aJ_1(ka)] J_0(kr) \left[e^{-k|z-L/2|} - e^{-k|z+L/2|} \right] dk \\ \quad + 4\pi M_0, & \text{dentro del imán} \\ 2\pi M_0 \int_0^\infty [bJ_1(kb) - aJ_1(ka)] J_0(kr) \left[e^{-k|z-L/2|} \text{signo}(z - L/2) \right. \\ \quad \left. - e^{-k|z+L/2|} \text{signo}(z + L/2) \right] dk, & \text{fuera del imán} \end{cases}$$

- c) Ahora el mismo imán permanente se sumerge en un medio de permeabilidad uniforme μ . Formalmente las ecuaciones de Maxwell para \mathbf{H} siguen siendo

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{libre}} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \rho_M$$

Sin embargo, la magnetización total cambió pues además de la magnetización permanente del imán $M_0 \hat{z}$ tenemos la magnetización del medio de permeabilidad μ . Sabemos además que en la zona del medio magnético $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ y como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ siempre, deducimos que $\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ya que μ es constante en el medio. Esto nos demuestra que no hay fuentes nuevas de \mathbf{H} en volumen. Sin embargo, ¿Qué sucede con la fuentes en superficie? Por un lado tenemos las fuentes en superficie que usamos en b), pero ahora en las superficies que limitan el imán pero del lado del medio permeable tenemos $\mathbf{M} = \frac{\mu-1}{4\pi} \mathbf{H}$ y entonces las nuevas σ de magnetización son

$$\sigma_\mu = \mathbf{M} \cdot \hat{n} = \frac{\mu-1}{4\pi} \mathbf{H} \cdot \hat{n}$$

donde \hat{n} es la normal externa al medio magnético. Del valor del campo \mathbf{H} obtenido en la parte b) del ejercicio podemos ver que \mathbf{H} no tiene sólo dirección \hat{z} sino que existe un H_r y por lo tanto habría en principio σ_μ en las tapas laterales (internas y externas) del imán producto de la magnetización del medio. Obviamente no podemos usar el campo hallado en b) para calcular σ_μ ya que la presencia del medio magnético alterará su valor. Lo que uno tiene que hacer es resolver nuevamente el problema de Laplace para el potencial de \mathbf{H} , ϕ . Pero en este caso uno *tiene* que incorporar más zonas para estar seguro que en cada zona no hay cargas. En particular una gran zona sería dentro del imán y otra fuera del imán. Para usar separación de variables en coordenadas cilíndricas se tendría entonces que dividir el espacio por ejemplo así (no es única la manera).

$$\text{zona I (dentro del imán)} \quad a < r < b \quad \& \quad -L/2 < z < L/2$$

$$\text{zona II (fuera del imán)} \quad z > L/2 \quad \& \quad \forall r$$

$$\text{zona III (fuera del imán)} \quad z < L/2 \quad \& \quad \forall r$$

$$\text{zona IV (fuera del imán)} \quad r > b \quad \& \quad -L/2 < z < L/2$$

$$\text{zona V (fuera del imán)} \quad r < a \quad \& \quad -L/2 < z < L/2$$

La soluciones de la ecuación de Laplace en cada una de estas zonas se tendrían que empalmar luego usando la continuidad de la componente tangencial de \mathbf{H} (no hay corrientes libres) y la continuidad de la componente normal de \mathbf{B} al atravesar

cada superficie de separación de zonas. La continuidad de la componente normal de \mathbf{B} se traduce en cada zona usando que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ donde hay medio permeable y $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi M_0\hat{z}$ donde hay imán permanente.