FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre 2010

Guía 1: Método de imágenes, función de Green y separación de variables

Método de imágenes y función de Green

1. Se tiene una esfera conductora de radio a conectada a potencial V, rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ.
   (a) Hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio mediante el método de imágenes, suponiendo conocido el problema de una carga puntual frente a una esfera conductora a tierra.
   (b) Encontrar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora. ¿Es única la distribución de cargas imagen que resuelve el problema?

2. (a) Hallar el potencial electrostático de la distribución del problema anterior utilizando el método de la función de Green.
   (b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green. Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.

3. (a) Se tiene una esfera de radio a conectada a tierra. A una distancia de su centro $d > a$, hay un dipolo puntual $\vec{p} = p_0\hat{z}$. Calcular el potencial y el campo eléctrico en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.
   (b) Ídem que en (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.
   (c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera.
   (d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^3$.
   (e) ¿Cuáles serían el potencial y el campo si la esfera estuviera aislada y descargada?

4. Hallar la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos esferas concéntricas de radios a y b respectivamente. Utilizar el método de imágenes. *Sugerencia*: Es necesario resolverlo a través de una serie infinita de imágenes. Hallar primero una relación de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes y luego escribir la superposición adecuada.

5. Se tiene un contorno mixto que consiste en un plano y una semiesfera de radio a, conectado a tierra como muestra la figura.

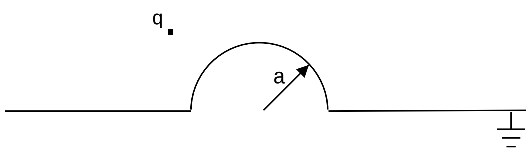

Fig. 1: Problema 5 de Método de imágenes y función de Green

   (a) Calcular la función de Green de esta configuración. ¿Qué método utilizaría? Identificar cada contribución a esta función.
   (b) Se coloca un dipolo puntual a una distancia d de la esfera, directamente sobre su centro, apuntando en la dirección perpendicular al plano. Hallar el potencial en el semiespacio donde se encuentra el dipolo utilizando la función de Green hallada en el punto anterior.

Método de Separación de Variables

1. Se tiene un cubo conductor de lado a conectado a tierra. En su interior hay un plano con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual, como indica la figura 2. Calcule el potencial electrostático en todo punto del espacio.

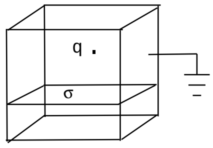

Fig. 2: Problema 1 de Método de Separación de Variables

2. Se coloca un alambre con densidad de carga constante λ equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra. Encuentre el potencial eléctrico en todo punto del espacio utilizando separación de variables. Para ello divida el problema en dos regiones de las siguientes formas:
   (a) Realice un corte vertical, perpendicular a los planos.
   (b) Realice un corte horizontal, paralelo a los planos.
   (c) Compare los resultados obtenidos. ¿Se atreverá a demostrar la igualdad de ambas expresiones?

3. (a) Hallar el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ.
   (b) Alternativamente, obtener primero el potencial de una carga puntual, desarrollado en serie de Fourier de ondas planas en dos dimensiones.
   (c) Utilizando el resultado anterior resuelva directamente la integral de Poisson.
   (d) Esta es en realidad una solución particular de la ecuación de Poisson. ¿Hace falta sumar alguna solución de la ecuación homogénea?

4. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuyo casquete superior está conectado a un potencial V_1 y el inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en otros más simples, que tengan simetría de reflexión bien definida.

5. (a) Encontrar, usando separación de variables, el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas, conductoras, concéntricas conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.
   (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.
   (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?
   (d) Resolver el problema en el caso en que el potencial de las esferas se eleva a V_1 y V_2, respectivamente.
   (e) ¿Cómo se resolvería el problema de una carga puntual entre dos cáscaras esféricas conductoras aisladas con una carga total Q_1 y Q_2, respectivamente?
   (f) Compare el resultado del ítem (a) con la función de Green obtenida, vía método de imágenes, en el problema (4) de la sección anterior. Demuestre la igualdad de ambas expresiones.

6. Una superficie cilíndrica de radio a y altura h, tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potencial V y $-V$. Hallar el potencial en todo punto interior al cilindro.

7. (a) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un disco cargado de radio a con densidad uniforme σ.
   (b) Verificar que, a través de límites adecuados, la expresión obtenida se reduce a las correspondientes a una carga puntual y a un plano infinito.
   (c) ¿El disco puede ser conductor? ¿Por qué?

Problemas de Green relacionados con separación de variables.

1. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:
   (a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.
   (b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro de radio a.

2. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno correspondiente a una estructura con forma de cuarto de cilindro circular infinito, siguiendo estos dos procedimientos:
   (a) Usando directamente separación de variables en el cuarto de cilindro.
   (b) Suponiendo conocida la función de Green para un cilindro circular infinito y usando imágenes. (Opcional y muy simple: encuentre explícitamente la función de Green del cilindro infinito.)

3. (a) Utilizando separación de variables en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.
   (b) Si se coloca una carga q a una altura z entre los planos, obtener una expresión para la densidad de carga y calcular explícitamente la carga total inducida, siempre sobre cada plano.
   (c) Opcional: observe que si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple. La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Alternativamente, ¿se le ocurre alguna manera de obtener la carga total sobre cada plano usando únicamente la ley de Gauss?

Prolongación analítica

1. Se conecta a tierra una esfera conductora de radio a. Concéntrico con ella se coloca un anillo de radio b ($b > a$), cargado uniformemente con carga total Q.
   (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio, usando el método de la función de Green.
   (b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo, utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica. Comparar con el resultado del punto (a). Demuestre la igualdad de los dos resultados.
   (c) Calcular el potencial usando separación de variables y comparar con los resultados anteriores.
   (d) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?
   (e) ¿Cómo resolvería por el método de Green si la esfera estuviera aislada y descargada?

   Fórmulas útiles: $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!}$, $P_0(x) = 1$.

Preguntas Molestas

1. ¿Cuál es el significado físico de la función de Green?
2. ¿Qué relación hay entre el método de la función de Green y el método de imágenes?
3. ¿Cómo se complementan estos dos métodos en la resolución de los problemas?
4. ¿Dónde deben colocarse las cargas imágenes?
5. Una vez colocadas las cargas imágenes, ¿qué sucede con los contornos?
6. ¿Qué relación hay entre la carga total de la distribución imagen y la carga inducida sobre el contorno?
7. Explicar las diferencias entre una solución de la ecuación de Poisson (inhomogénea), de Laplace (dividiendo en zonas) y una solución hallada por superposición. ¿Qué pasa con las condiciones de contorno?
8. ¿Cómo puede calcularse el potencial producido por una carga puntual en el centro de un cilindro conductor de radio a y altura h a potencial V? ¿En cuántas variables se presenta problema de Sturm-Liouville?
9. Una carga puntual está ubicada en el origen de coordenadas, dentro de una caja cilíndrica a potencial cero. La caja está definida por $z = -h/2$, $z = h/2$ y $r = a$.
   (a) Se plantea la posibilidad de encarar el problema por dos métodos distintos: dividiendo en zonas y resolviendo Laplace o directamente por Poisson . Discutir por qué uno de ellos es muy poco práctico en este problema.
   (b) Se puede calcular el potencial planteando problema de Sturm-Liouville en cualquiera de las tres variables. Entonces, ¿no debería ser $\phi = 0$ la única solución?