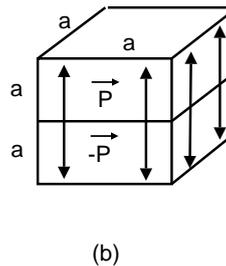
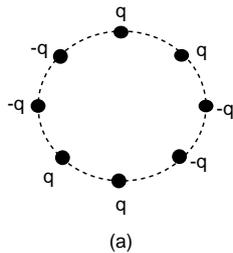


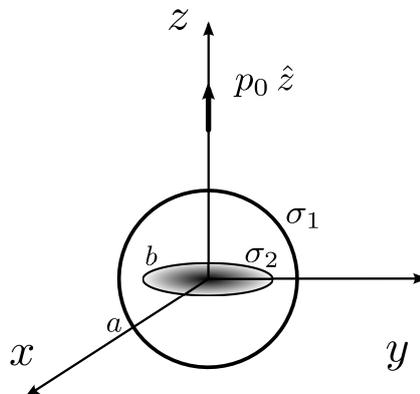
Guía 2: Desarrollo multipolar y medios materiales

Desarrollo multipolar

1. (a) Probar que los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica son necesariamente nulos, salvo el monopolar.
- (b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. Generalizar.
- (c) Dado el desarrollo multipolar de dos distribuciones de carga $\rho_1(\mathbf{r})$ y $\rho_2(\mathbf{r})$, ¿cómo es el desarrollo multipolar de la distribución total $\rho_1 + \rho_2$. ¿Y si son tres? Generalizar.
2. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga (en el caso de tener momento cuadrupolar, determinar sus ejes principales):
 - (a) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
 - (b) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error porcentual cometido si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual, a distancias del orden de 1 m de su centro.
 - (c) Dos distribuciones lineales formadas por una sucesión equiespaciada, a distancia s , de cargas: la primera con tres cargas en el siguiente orden $q, -2q, q$; y la segunda con cuatro cargas, $-q, 3q, -3q, q$. Analizar el límite cuando $s \rightarrow 0$ con $qs^2 \rightarrow \text{cte}$.
 - (d) Una distribución plana constituida por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternativamente en los vértices de un cuadrado de lado s . Analizar el límite cuando $s \rightarrow 0$ con $qs^2 \rightarrow \text{cte}$.
 - (e) Ocho cargas puntuales distribuidas sobre un círculo como muestra la figura (a).
 - (f) Dos cubos con polarización uniforme unidos como muestra la figura (b).



3. Una cáscara esférica de radio a tiene una distribución de carga $\sigma_1 = \sigma_0 \cos \theta$. En el interior de la cáscara, perpendicular al eje z y centrado en el origen, se encuentra un disco de radio b con carga superficial $\sigma_2 = (\frac{r}{a} - c) \sigma_0$. Sobre el eje z , a una distancia d del origen, hay un dipolo puntual $\mathbf{p} = p_0 \hat{z}$. Encontrar los valores de c y p_0 para que el primer momento multipolar no nulo sea el cuadrupolar, y calcular, en ese caso, el potencial para puntos lejanos.



4. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio a con una densidad superficial de momento dipolar \mathbf{P} perpendicular al disco. Hacer el cálculo para los puntos situados sobre el eje del mismo. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos y muy lejanos. Graficar e interpretar los resultados.
5. La distribución de carga $\rho(\mathbf{r})$ de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del orden de 10^{-13} cm. El potencial de los núcleos se aproxima en general por $\phi = Ze/r$, lo que equivale a suponer que $\rho(\mathbf{r})$ está distribuido de forma esféricamente simétrica. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar Q distinto de cero.
- (a) Para simplificar, considere $\rho(\mathbf{r})$ uniforme en un elipsoide de revolución de semiejes a y b . Calcule Q respecto de ejes apropiados. La carga total es $q = Ze$.
- (b) ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de Q_{zz} ?
- (c) Ponga números: para $Z = 63$, $Q_{zz}/e = 2.5 \times 10^{-24}$ cm². Suponiendo que el radio medio es $R = \frac{a+b}{2} = 7 \times 10^{-13}$ cm, determinar la diferencia $(a - b)/R$.
- (d) Un núcleo de los descritos en (a) está en el origen, con su eje de simetría alineado con el eje z . Además, hay un campo eléctrico externo con simetría cilíndrica y con una variación espacial caracterizada por $\partial E_z/\partial z \neq 0$. Muestre que la energía de interacción entre el cuadrupolo y el campo es

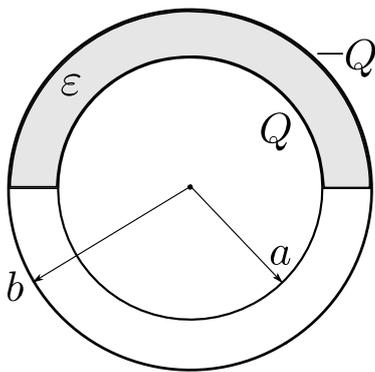
$$W = -\frac{Q_{zz}}{4} \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_0.$$

Medios materiales

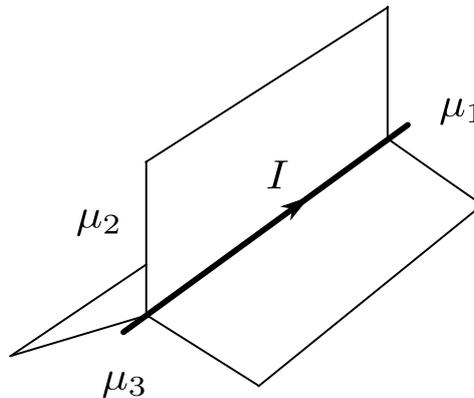
6. **Imán esférico:** Este problema es muy importante, pues permite entender analogías y diferencias con el caso eléctrico y aprender a pensar en términos de “cargas magnéticas”.
- (a) Se tiene una esfera de radio a uniformemente magnetizada con densidad de magnetización $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$.
- Calcular el momento dipolar de la esfera: 1) integrando directamente la densidad de magnetización, 2) calculando el momento dipolar de las cargas magnéticas, 3) calculando el momento dipolar magnético de las corrientes de magnetización. Demuestre la equivalencia de los tres métodos para el caso general de una magnetización $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ definida en todo el espacio. Para obtener esta equivalencia, ¿es necesario imponer alguna condición sobre el comportamiento de $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ cuando $\mathbf{r} \rightarrow \infty$?
 - Calcular los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo puntual igual al momento dipolar total de la esfera. Observe que esto da un cuarto método para calcular el momento dipolar, una vez conocidos los campos en el exterior de la esfera.
 - Calcular el potencial vectorial a partir de la corriente total.
- (b) Se tiene ahora la misma esfera situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad μ .
- Discutir cuidadosamente por qué los métodos utilizados en (ii) y (iii) no sirven para hallar \mathbf{B} en este caso. Utilizar entonces el método de separación de variables. Verificar que si $\mu = 1$ se recupera el resultado anterior.
 - Hallar el momento dipolar total \mathbf{m} inducido en el medio exterior. De los métodos enunciados en el punto (a-i), ¿cuáles son válidos en este caso?
 - Suponga ahora que el medio de permeabilidad μ se extiende únicamente hasta un radio $b > a$, concéntrico con la esfera. Calcule los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} en todo el espacio y encuentre el momento magnético total \mathbf{m} inducido en el medio. Verifique que para $\mu = 1$ obtiene los resultados de (a). Estudie el límite en que $b \rightarrow \infty$ y compare con los resultados para \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{m} de los puntos (b-i) y (b-ii). ¿Qué sucede con \mathbf{m} ?
- (c) Comparando las fuentes del campo en cada caso, probar que una esfera hueca cargada con densidad superficial σ y que rota con velocidad angular $\omega = \omega_0 \hat{z}$ constituye un problema equivalente al de la esfera con magnetización uniforme. A partir de los resultados de los puntos anteriores, por simple identificación, deducir el momento magnético de la esfera rotante y los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} en todo el espacio.

7. Calcular los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} en todo punto del espacio producidos por:
- Un imán cilíndrico, de radio a y longitud L , caracterizado por una densidad de magnetización uniforme \mathbf{M} paralela al eje del cilindro.
 - Un solenoide de las mismas dimensiones por el que circula una corriente I , y que tiene n espiras por unidad de longitud.
8. Por un cable rectilíneo de radio a circula una corriente I . Concéntrico con el cable hay un cilindro de hierro dulce ($\mu = 1000$) de radio interior b y exterior c . Dentro y fuera del cilindro hay vacío. La permeabilidad del cable vale 1.
- Calcular y graficar \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} en todo punto del espacio.
 - ¿Es efectivo el cilindro de hierro dulce para apantallar el campo magnético en la zona $r > a$?
 - Encontrar la densidad de corriente de magnetización en volumen y en superficie y las cargas de magnetización.
 - Explicar la relación entre cada campo y sus fuentes.
9. Considere una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ϵ_1 sumergida en otro medio de permitividad ϵ_2 . A una distancia $d < a$ del centro de la esfera se encuentra una carga q .
- Halle el potencial electrostático en todo punto del espacio.
 - Halle las densidades de carga de polarización en volumen y superficie.
10. Se tiene una esfera homogénea de permitividad ϵ y radio b , concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ y radio a . El conjunto se halla sumergido en un campo eléctrico uniforme al infinito $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$.
- Calcular el potencial en todo punto del espacio.
 - Hallar la distribución de cargas inducidas en $r = b$. (*Sugerencia:* pensar que se puede resolver directamente la ecuación de Poisson o dividir la región en zonas.)
11. (a) En un medio de constante dieléctrica ϵ se sumerge una esfera conductora de radio a cargada con una carga total Q . Hallar los campos \mathbf{E} y \mathbf{D} en todo punto del espacio y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.
- (b) La misma esfera conductora del caso anterior se conecta ahora a una batería de potencia V . Resolver lo mismo del caso anterior. Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, se manifiesta una diferencia esencial entre ellos: la dependencia de los campos con ϵ . Explicar las causas de esta diferencia.
12. Un medio dieléctrico de permitividad ϵ ocupa el semiespacio con $z < 0$. A una altura $d > 0$ sobre el dieléctrico hay una carga q .
- Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio: (i) usando separación de variables en coordenadas cartesianas, y (ii) usando separación de variables en coordenadas cilíndricas.
 - Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga q . Es decir, escriba $\phi = \phi_q + \phi_r$, donde ϕ_q es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial, ϕ_r ?
 - Inspirándose en el resultado anterior, vuelva a resolver el problema usando el método de imágenes.
 - ¿A qué se reduce la solución cuando $\epsilon \rightarrow \infty$? ¿Puede dar alguna interpretación física de este resultado?
 - Generalize los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad ϵ_1 y el inferior por un medio con permitividad ϵ_2 .
 - Encuentre la función de Green para todo el espacio según las condiciones del ítem anterior. (Notar que la carga puede estar en cualquier posición, por encima y por debajo del plano $z = 0$.)

13. Las esferas de la figura tienen radios a y b , son conductoras y están aisladas. La esfera de radio a tiene una carga libre Q y la de radio b , $-Q$. Entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ el espacio entre las esferas está ocupado por un medio dieléctrico homogéneo de permitividad ϵ .
- 1) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio.
 - 2) Encuentre los campos \mathbf{E} y \mathbf{D} en la región entre las dos esferas.
 - 3) Encuentre la distribución de carga libre, de polarización y de carga neta.



Problema 13



Problema 14

14. Una corriente I fluye por un cable delgado a lo largo del eje z (ver figura). Tres semiplanos que forman entre sí ángulos α_1 , α_2 y α_3 ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$) se intersectan a lo largo de ese eje. Las regiones entre los planos tienen permeabilidades μ_1 , μ_2 y μ_3 . Encuentre \mathbf{B} y \mathbf{H} en todo el espacio e interprete físicamente el resultado.

Preguntas Molestas

1. (a) ¿Cuál es el cuadrupolo de un dipolo ideal?
 (b) ¿Cuál es el dipolo de una carga puntual? ¿Y el cuadrupolo?
 (c) ¿De qué dependen las respuestas a las preguntas anteriores?
2. Al resolver un problema interno usando el método de imágenes. ¿Cuál es la contribución de las cargas imágenes a los momentos multipolares?
3. ¿Cuáles son los momentos multipolares no nulos de las siguientes distribuciones?
 (a) Cilindro infinito cargado con una densidad arbitraria.
 (b) Un dipolo en la dirección z rodeado por una cáscara esférica conductora conectada a tierra no concéntrica con él.
4. En el caso de un cuerpo con densidad de magnetización permanente \mathbf{M}

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}.$$

Como $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, tenemos que:

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \mathbf{B},$$

o sea que \mathbf{M} , que es constante, es proporcional a \mathbf{B} , que en principio puede ser arbitrario (¿o no?), y siempre con la misma constante de proporcionalidad. ¿Cuál es el error en ese razonamiento?

5. Encontrar el campo magnético en todo punto del espacio producido por un toro de sección circular con una magnetización uniforme de la forma $\mathbf{M} = M_0\hat{\phi}$. ¿Cómo cambian los resultados si el toro está sumergido en un medio de permeabilidad μ ?