

FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre 2010

Guía 5: Formulación Covariante del Campo Electromagnético.

1. (a) A partir de la expresión del tensor de intensidad del campo electromagnético, obtener las leyes de transformación de los campos eléctrico y magnético al cambiar de sistema de referencia inercial. Analizar los siguientes casos particulares: 1) $\mathbf{B} = 0, \mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0, \mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0, \mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0, \mathbf{B} \perp \mathbf{v}$.
 (b) Demostrar que si \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares en un sistema de referencia inercial, entonces lo son en cualquier otro.
 (c) Probar que si $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ en un sistema inercial de referencia, esto se cumple en cualquier otro sistema.
 (d) Mostrar que si \mathbf{E} es perpendicular a \mathbf{B} y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces hay un sistema en el cual sólo hay campo eléctrico o solamente magnético. ¿Siempre hay solución? Si es así, ¿esta solución es única?
2. En un sistema de referencia inercial S , se tiene un campo eléctrico que forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.
 (a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos eléctrico y magnético sean paralelos.
 (b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \rightarrow \pi/2$. En cada caso verificar el comportamiento de los invariantes del campo electromagnético.
3. Un cilindro de longitud infinita tiene densidad uniforme de carga y por él circula, además, una corriente uniforme paralela al eje del cilindro.
 (a) Encontrar un sistema de referencia en el cual hay sólo campo magnético o eléctrico. ¿Es único este sistema?
 (b) Hallar el valor de los campos en el nuevo sistema.
4. Una barra infinitamente larga y de sección circular está cargada uniformemente en volumen.
 (a) Calcular los campos eléctrico y magnético en un sistema de referencia que se mueve paralelo a la barra de dos maneras distintas: 1) a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, 2) por transformación directa de los campos.
 (b) Ahora se tienen dos barras como la anterior dispuestas una paralela a la otra y en reposo relativo. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud con que se atraen en un sistema de referencia que se mueve paralelo a las barras (S') es la misma que en el sistema en el que las barras están en reposo (S), por dos métodos: 1) en base a las interacciones electrostáticas y magnetostáticas en S' , más las leyes de transformación de los campos, 2) demostrando que el objeto f^μ definido según: $f^\mu \equiv \frac{1}{c} F^\mu_\nu j^\nu$ es un cuadrivector, y es la generalización covariante de la fuerza de Lorentz. Como "yapa" del punto anterior obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.
5. Un dipolo magnético puntual \mathbf{m} se encuentra en reposo en el origen de un sistema S' , por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto al sistema de laboratorio S .
 (a) Demostrar que en S los potenciales, a primer orden en β , son

$$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c R^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (1)$$

con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S .

- (b) A partir de estos potenciales, calcular \mathbf{E} y \mathbf{B} en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c) - \mathbf{m} \times \frac{[3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n} \times \frac{[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{B} \times \mathbf{v}/c, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, y donde $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es "el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor \mathbf{p} ".

6. Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso lineal de las partículas, pese a que la ley de interacción entre las partículas es invariante frente a traslaciones. ¿Hay en ello alguna contradicción?

7. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x . Tomar como condición inicial $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no-relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.
8. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un campo magnético uniforme y estático.
9. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un fondo electromagnético uniforme y estático, tal que el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico. Considerar los tres casos posibles:
 - (a) $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ y (c) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.
10. Encontrar la relación entre los ángulos de incidencia y de reflexión para una onda plana que incide sobre un espejo perfecto en movimiento, considerando sólo los siguientes casos
 - (a) El espejo se mueve con velocidad v paralela a su superficie.
 - (b) El espejo se mueve con velocidad v perpendicular a su superficie.

Si la onda incidente tiene frecuencia ω , ¿cuál es, en cada caso, la frecuencia de la onda reflejada?
11. Una nave sobrevuela paralelamente con velocidad v el océano de un planeta de enorme tamaño. El índice de refracción del océano es n (con $\mu = 1$), y el índice de refracción de la atmósfera puede tomarse igual al del vacío. Para medir su altitud, la nave envía constantemente una onda plana contra la superficie del planeta. En el sistema de referencia que se mueve con la nave, la onda plana viaja perpendicularmente hacia la superficie del océano y su campo eléctrico tiene módulo E' y es paralelo a la velocidad relativa entre la superficie y la nave.
 - a) ¿Para qué valor de v la nave no recibe ninguna onda reflejada?
 - b) Calcule la intensidad de la onda reflejada recibida por la nave como función de v .

Preguntas Molestas

1. ¿Es posible que una partícula viaje con velocidad mayor que c ?
2. ¿Es posible enviar señales a velocidades mayores que la de la luz? ¿Qué ocurre con la causalidad? (Visualizarlo en un diagrama de espacio-tiempo).
3. Una barra rígida forma un ángulo α con el eje x . En el instante inicial el centro de la barra está en el origen y toda la barra se mueve con velocidad v según el eje y . Determine la velocidad w del punto a de intersección de la barra con el eje x . ¿Puede ser $w > c$? ¿Puede utilizarse este sistema para enviar señales a velocidades mayores que c ?
4. Un faro rota uniformemente con velocidad angular ω , emitiendo una señal luminosa. Si tomamos 2 puntos a y b muy alejados del faro, la señal pasa de a a b a velocidad mayor que c . ¿Contradice esto la Relatividad?
5. ¿Es compatible con la Relatividad la existencia de cuerpos perfectamente rígidos?
6. ¿En qué caso se conserva y en qué caso no, la dirección de una barra al hacer una transformación de Lorentz?
7. En un sistema de referencia S , el intervalo entre dos eventos dados es de tipo espacial. ¿Es posible encontrar un sistema S' tal que el intervalo entre los mismos eventos sea de tipo temporal?
8. ¿Cómo pueden graficarse los ejes de un sistema S' que se mueve con respecto a S en el diagrama de espacio-tiempo de S ? ¿Qué ocurre con el cono de luz en ambos sistemas? ¿Cómo se ve en estos diagramas la relatividad de la simultaneidad?
9. El vector de onda de una onda plana, ¿es un invariante? ¿Qué tiene que ver esto con la aberración de la luz?
10. ¿Cuál es la ley de transformación de la fuerza de Lorentz?
11. ¿Por qué en el marco de la relatividad espacial no tiene sentido hablar de campo eléctrico o magnético, sino del campo electromagnético?
12. ¿En el caso de una carga en movimiento, si uno compara las líneas de campo eléctrico vistas desde el sistema S' en el que la carga está en reposo, con las líneas de campo vistas desde S , se ve que en este último caso las líneas se encuentran comprimidas en la dirección del movimiento. ¿No se contradice esto con el hecho de que E_{\parallel} se conserva?
13. ¿Cómo se escriben las leyes de conservación de la energía y del impulso en forma covariante?