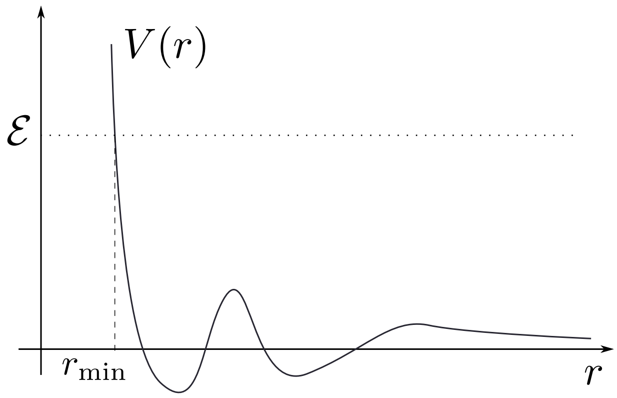
FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre 2010

Notas de la práctica sobre la Guía 8: radiación

1 Problema 1

(a) Este problema pide encontrar la energía radiada por una carga que se mueve en un potencial central $V(r)$. En realidad el problema es más simple que eso, porque la partícula se mueve siempre en línea recta. Cae desde el infinito y es empujada de nuevo hacia infinito por la fuerza central.



Durante ese movimiento acelerado la partícula emite radiación. Se dice que el movimiento es no relativista, de manera que la potencia instantánea emitida por la partícula está dada por la fórmula de Larmor

$$P(t) = \frac{2}{3c^3} q^2 \, \ddot{r}(t)^2. \tag{1}$$

La energía total emitida es la integral en el tiempo de la potencia,

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{\infty} dt \; P(t). \tag{2}$$

Si dejáramos t como variable de integración deberíamos resolver la ecuación de movimiento y averiguar $\ddot{r}(t)$. Ese camino es poco práctico. Ustedes saben que en los problemas de potencial central es más fácil dejar expresadas las magnitudes en función de la distancia al centro de fuerzas. Lo que haremos será cambiar variables pasando de t a r. Al hacer el cambio de variables hay que tener cuidado con el hecho de que $r(t)$ no es una función 1 a 1. Si el punto de retorno en la órbita ocurre en $t = 0$, la función $r(t)$ es una función par,

$$r(t) = r(-t). \tag{3}$$

Uno puede cambiar de variables partiendo la trayectoria en dos ramas, la de ida y la de vuelta. Como el movimiento es simétrico respecto del instante $t = 0$, en definitiva quedará algo así

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{\infty} dt \; P(t) = 2 \int_{0}^{\infty} dt \; P(t) = 2 \int_{r_{\rm min}}^{\infty} \frac{dr}{\dot{r}} \; P(r). \tag{4}$$

Todo lo que necesitamos para escribir el integrando como una función de r es $\dot{r}(r)$ y $\ddot{r}(r)$. La velocidad sale de la ecuación para la energía,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = \mathcal{E} \longrightarrow \dot{r}(r) = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\mathcal{E} - V(r)}. \tag{5}$$

Aquí $\mathcal{E}$ es la energía inicial. Asumiendo que el potencial en el infinito es cero

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2, \tag{6}$$

donde v_0 es la velocidad en $t \longrightarrow -\infty$. Alternativamente, puede escribirse $\mathcal{E} = V(r_{\min})$, pues en $r_{\min}$ toda la energía de la partícula es potencial. Por otro lado, la aceleración como función de r puede obtenerse directamente de la derivada del potencial,

$$\ddot{r}(r) = -\frac{1}{m}V'(r). \tag{7}$$

Luego,

$$\Delta W = \frac{4q^2}{3m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty} dr\, \frac{[V'(r)]^2}{\sqrt{\mathcal{E} - V(r)}}. \tag{8}$$

(b) Ahora se pide evaluar el resultado anterior cuando el potencial $V(r)$ es debido a una carga en el origen, del mismo signo que q,

$$V(r) = \frac{qQ}{r}. \tag{9}$$

Resulta

$$\Delta W = \frac{4q^2}{3m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty} dr\, \left(\frac{qQ}{r^2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{qQ}{r}}}. \tag{10}$$

La integral puede resolverse con algunos cambios de variable

$$\begin{aligned}\int_{r_{\min}}^{\infty} dr\, \left(\frac{qQ}{r^2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{qQ}{r}}} &= \frac{1}{qQ}\int_{1/\mathcal{E}}^{\infty} dx\, \frac{1/x^4}{\sqrt{\mathcal{E} - \dfrac{1}{x}}} \overset{x=1/y}{=} -\frac{1}{qQ}\int_{\mathcal{E}}^{0} dy\, \frac{y^2}{\sqrt{\mathcal{E} - y}} \\ &\overset{\text{partes}\times 3}{=} \frac{1}{qQ}\left(2y^2\sqrt{\mathcal{E} - y} + \frac{8}{3}y(\mathcal{E} - y)^{3/2} + \frac{16}{15}(\mathcal{E} - y)^{5/2}\right)\Bigg|_{\mathcal{E}}^{0} = \frac{1}{qQ}\,\frac{16\mathcal{E}^{5/2}}{15}.\end{aligned} \tag{11}$$

Escribiendo $\mathcal{E}$ en términos de la velocidad inicial queda

$$\Delta W = \frac{8mv_0^5}{45c^3}\frac{q}{Q}. \tag{12}$$

Organizando un poco las cantidades puede verse qué fracción de la energía cinética inicial ha sido radiada (y también que las unidades den bien)

$$\Delta W = \left[\frac{16}{45}\left(\frac{v_0}{c}\right)^3\left(\frac{q}{Q}\right)\right] \times \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{13}$$

Mientras $v_0 \ll c$, la energía radiada es también mucho menor que la energía inicial.

(c) Ahora se dice que la carga incidente es un positrón, e incide sobre un protón. Las dos partículas tienen la misma carga $q = Q$, pero la masa del protón es unas 2 mil veces mayor que la del positrón. No se trata de una carga fija, pero al haber tal desproporción entre las masas, es en principio justificado usar los resultados anteriores. Tendremos

$$\frac{\Delta W}{\mathcal{E}} = \frac{16}{45}\left(\frac{v_0}{c}\right)^3. \tag{14}$$

Estrictamente hablando, la energía del positrón cuando $t \longrightarrow \infty$ no será igual a la energía inicial. Parte se habrá perdido en forma de radiación. Podemos calcular la velocidad final del positrón escribiendo

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \mathcal{E} - \Delta W. \tag{15}$$

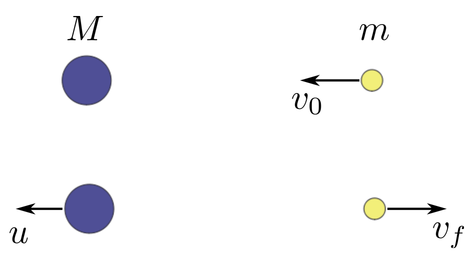
Como $\Delta W/\mathcal{E} \ll 1$, resulta

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\mathcal{E} - \Delta W} \approx v_0\left(1 - \frac{\Delta W}{2\mathcal{E}}\right). \tag{16}$$

Luego

$$\frac{v_0 - v_f}{v_0} \approx \frac{8}{45}\left(\frac{v_0}{c}\right)^3. \tag{17}$$

Para calcular este resultado hemos tenido en cuenta la energía radiada pero hemos supuesto que la masa del protón era infinita. En realidad el protón retrocede un poco durante el choque y en el estado final tendrá una velocidad distinta de cero. Para ver cuál es la velocidad final del positrón cuando se tiene en cuenta la masa finita del protón, pero no la pérdida de energía por radiación, hay que resolver las ecuaciones de conservación de impulso y energía de las dos partículas.



Si el protón tiene masa M y una velocidad final u, entonces

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}Mu^2,$$

$$mv_0 = -mv_f + Mu. \tag{18}$$

Esto da

$$u = \frac{2m}{M+m}\, v_0, \qquad v_f = \frac{M-m}{M+m}\, v_0. \tag{19}$$

Teniendo en cuenta que $m \ll M$, es

$$v_f \approx \left(1 - \frac{2m}{M}\right) v_0,$$

$$\frac{v_0 - v_f}{v_0} \approx \frac{2m}{M} \approx 10^{-3}. \tag{20}$$

Comparando con la ec. (17), puede verse que el efecto de la masa finita del protón dominará sobre las pérdidas de energía por radiación cuando v_0 sea del orden o menor que $c/5$.

No es mucho más difícil resolver el problema en el caso general en que las dos partículas tienen masa finita. Basta usar los resultados conocidos de mécanica para el problema de dos cuerpos, asumiendo que el potencial electrostático representa bien la interacción mutua. Supongamos que una partícula de masa m_1 y carga q_1 incide desde infinito con velocidad v_0 sobre una partícula de masa m_2 y carga q_2. Las dos cargas tienen el mismo signo. Puede demostrarse que la energía radiada por cada partícula es

$$\Delta W_i = \frac{8}{45}\, \frac{q_i^2}{q_1 q_2}\, \frac{\mu^3}{m_i^2}\, v_0^5, \tag{21}$$

donde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida. Aquí no hay ninguna hipótesis sobre una partícula mucho pesada que la otra. Ahora bien, ¿es posible a partir de este resultado determinar la corrección a las velocidades finales de cada partícula, ec. (19)? Lo que quiero decir: ¿cómo se distribuye la pérdida de energía entre las dos partículas?

2 Problema 2

Este problema es la versión relativista del anterior. La carga Q en el origen está fija, y desde infinito y de manera frontal incide una carga q, del mismo signo que Q. La velocidad inicial es tan alta que no pueden usarse las fórmulas no relativistas: inicialmente, $\gamma_0 = 1/\sqrt{1-\beta_0^2}$ no puede aproximarse por la unidad.

La potencia instantánea viene dada por la fórmula de Larmor relativista,

$$P(t) = \frac{2q^2\gamma^6}{3c}\left[\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2\right]. \tag{22}$$

En este problema, como la velocidad y la aceleración son paralelas,

$$P(t) = \frac{2q^2\gamma^6\,\dot{\beta}^2}{3c}. \tag{23}$$

La energía radiada es la integral de la potencia,

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{\infty} dt\; P(t). \tag{24}$$

Al igual que en el problema anterior, no es necesario resolver la ecuación de la trayectoria. Conviene pasar a otra variable de integración; lo que se propone es usar γ. Si el punto de mínimo acercamiento se alcanza en $t = 0$, puede escribirse

$$\Delta W = 2\int_0^\infty dt\ P(t) = 2\int_1^{\gamma_0} \frac{d\gamma}{\dot{\gamma}}\ P(\gamma). \tag{25}$$

Para escribir la función $P(\gamma)$ es necesario conocer $\dot{\beta}$ como función de γ. En el enunciado del problema figura el siguiente resultado

$$m\gamma(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = q\Big[\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\boldsymbol{\beta}\Big], \tag{26}$$

que permite escribir la aceleración en función de los campos y de la velocidad. Dejaremos la demostración de esta fórmula para después. Aplicada al caso del problema, donde $\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{E}$ es paralelo a la velocidad, queda

$$m\gamma\dot{v} = qE(1-\beta^2) \longrightarrow \dot{\beta} = \frac{qE}{mc\gamma^3}. \tag{27}$$

La otra cosa necesaria para poder hacer la integral (25) es conocer $\dot{\gamma}$ como función de γ. Al final del problema quedará demostrado que, tal como sucede en mecánica no relativista,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}, \tag{28}$$

donde

$$\mathcal{E} = mc^2\gamma. \tag{29}$$

Es decir,

$$mc^2\dot{\gamma} = qEv \longrightarrow \dot{\gamma} = \frac{qE\beta}{mc}. \tag{30}$$

Aquí se usó que durante la trayectoria de regreso, que es sobre la que estamos integrando, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} = Ev$.

En definitiva, el integrando en la ec. (25) será

$$\frac{2P(\gamma)}{\dot{\gamma}} = \frac{4q^2\gamma^6}{3c}\,\frac{mc}{qE\beta}\left(\frac{qE}{mc\gamma^3}\right)^2 = \frac{4q^2}{3c}\,\frac{qE}{mc\beta} = \frac{4q^2}{3c}\,\frac{qE}{mc}\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}. \tag{31}$$

Debido a que el campo eléctrico es función de la posición, esto todavía no es una función explícita de γ. Es necesario escribir r como función de γ, lo que haremos a partir de la ecuación de conservación de la energía. La ec. (28) puede reescribirse como

$$d\mathcal{E} = q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}. \tag{32}$$

Integrada a lo largo de la trayectoria de la partícula, resulta

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = q\int_{\mathcal{C}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{r}. \tag{33}$$

Aquí $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_0$ son los extremos de la trayectoria sobre la que se está integrando. Si el campo es electrostático, esta integral sólo depende de los extremos y sirve como definición del potencial,

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = -q\left[\phi(r) - \phi(r_0)\right], \tag{34}$$

donde ϕ se calcula igual que siempre,

$$\phi(r) = \int_r^\infty dr\,\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r}. \tag{35}$$

La conservación de la energía, ec. (34), puede expresarse en la forma

$$mc^2\gamma + q\phi(r) = mc^2\gamma_0. \tag{36}$$

Ésta es la generalización relativista de la ec. (5) y permite escribir r como función de γ. En verdad lo que necesitamos en la ec. (31) es $qE(r)$. Operando un poco resulta

$$qE(r) = \frac{qQ}{r^2} = \frac{1}{qQ}\,\left[mc^2(\gamma_0 - \gamma)\right]^2. \tag{37}$$

Ya podemos escribir

$$\Delta W = \frac{4}{3}\,\frac{q}{Q}\,mc^2\int_1^{\gamma_0} d\gamma\,\frac{\gamma(\gamma_0 - \gamma)^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}. \tag{38}$$

La integral se resuelve haciendo el cambio de variables $\sqrt{\gamma^2 - 1} = u$. El resultado final es

$$\Delta W = \frac{4}{3}\,\frac{q}{Q}\,mc^2\gamma_0\left[(2 + \gamma_0^2)\,\frac{\beta_0}{3} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}\right)\right]. \tag{39}$$

Pueden verificar que cuando $\beta_0 \ll 1$ se recupera el resultado del problema anterior.

2.1 La aceleración y la potencia en términos de la fuerza

Para demostrar la ec. (26),

$$m\gamma(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = q\Big[\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\boldsymbol{\beta}\Big], \tag{40}$$

vamos a partir de la ecuación para el impulso,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \tag{41}$$

donde

$$\mathbf{p} = m\gamma\,\mathbf{v}. \tag{42}$$

La derivada temporal de $\mathbf{p}$ se escribe a través de las derivadas de γ y de $\mathbf{v}$,

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\gamma}\,\mathbf{v} + m\gamma\,\dot{\mathbf{v}}. \tag{43}$$

Ahora bien, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, así que

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{c^2}\gamma^3\, \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}. \tag{44}$$

Luego,

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{c^2}m\gamma^3\,(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})\;\mathbf{v} + m\gamma\,\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \tag{45}$$

Para despejar $\dot{\mathbf{p}}$, de alguna forma hay que calcular $\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}$. Eso puede lograrse proyectando la ecuación en la dirección de $\mathbf{v}$,

$$m\gamma^3(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})\beta^2 + m\gamma(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{46}$$

que implica

$$m\gamma^3\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{47}$$

Usando esto en la ec. (45) se obtiene

$$m\gamma\,\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} - \frac{1}{c^2}\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\;\mathbf{v}. \tag{48}$$

Cuando $\mathbf{F}$ es la fuerza de Lorentz se recupera la ec. (40).

La ecuación para la potencia, usada al escribir la ec. (28), puede obtenerse a partir de los resultados anteriores. Queremos calcular $d\mathcal{E}/dt$, donde $\mathcal{E} = m\gamma c^2$. A partir de la ec. (44), la ec. (47) puede reescribirse como

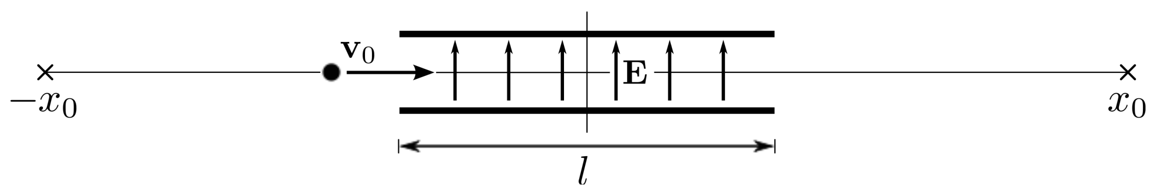
$$m\dot{\gamma}c^2 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{49}$$

que no es otra cosa que lo que queremos calcular

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{\gamma}c^2 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{50}$$

3 Problema 3

En este problema, una partícula relativista atraviesa un capacitor de placas paralelas.



Se dice que la partícula viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse. Esta es una aproximación. Sin aceleración no hay radiación. Si no hubiera campo eléctrico entre las placas, la partícula seguiría la trayectoria

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}_0 t. \tag{51}$$

Estamos fijando el origen del tiempo de manera que la partícula pasa por el centro del capacitor en $t = 0$. Lo que puede decirse es que la trayectoria verdadera será

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \delta\mathbf{r}(t). \tag{52}$$

Si queremos calcular la aceleración, por ejemplo, la aplicación de la fórmula (26) da

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m\gamma(\mathbf{v})}\Big[\mathbf{E} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\boldsymbol{\beta}\Big]. \tag{53}$$

Aquí habría que escribir

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\delta}\mathbf{r}, \tag{54}$$

y desarrollar todas las funciones en potencias de la perturbación. La aproximación propuesta consiste en quedarse sólo con el término de orden cero,

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q\mathbf{E}}{m\gamma_0}, \tag{55}$$

con $\gamma_0 = \gamma(\mathbf{v}_0)$. Hasta el mismo orden, la potencia instantánea es

$$P = \frac{2q^2}{3c}\gamma_0^6\Big[\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta}_0\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2\Big] = \frac{2q^2}{3c}\gamma_0^6\left[\frac{q\mathbf{E}}{mc\gamma_0}\right]^2 = \frac{2q^4}{3m^2c^3}\gamma_0^4\,E^2. \tag{56}$$

Despreciando la desviación, la partícula tarda un tiempo l/v_0 en atravesar el capacitor, entonces la energía total radiada será

$$\Delta W = \frac{Pl}{v_0}. \tag{57}$$

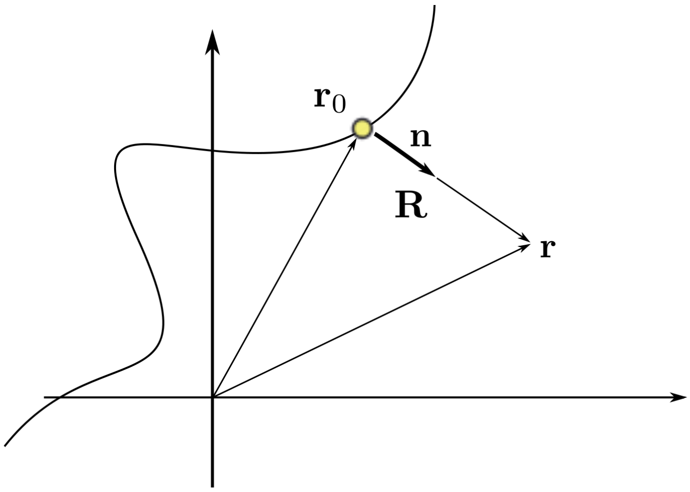
Podemos estimar la desviación que lleva la partícula al salir del capacitor. Según la ec. (55), al salir del capacitor la partícula tendrá una velocidad en la dirección del campo dada por

$$v_y = \frac{qEl}{mv_0\gamma_0}. \tag{58}$$

Aquí se ve que para v_0 suficientemente grande, siempre se puede hacer v_y tan chico como se quiera.

La segunda parte del problema pide calcular el campo eléctrico de radiación en los puntos x_0 y $-x_0$, que están elegidos simétricamente respecto del centro del capacitor. El campo de radiación es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\Big\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\Big\}}{R\,(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right]_{\text{ret}}. \tag{59}$$



El versor $\mathbf{n}$ está en la dirección que une a la carga con el punto de observación, separados por una distancia R. A los efectos de calcular el campo en el punto r a tiempo t, lo que importa es la posición, la velocidad y la aceleración de la carga en el tiempo retardado, es decir, en el tiempo t' en el que se emitió la radiación que llega a tiempo t al observador. El tiempo retardado se determina por la siguiente ecuación

$$c(t-t') = |\mathbf{R}(t')| \longrightarrow t'(\mathbf{r}, t). \tag{60}$$

El subíndice "ret" en la ec. (59) significa que todas las cantidades dentro del corchete deben evaluarse en $t'(\mathbf{r}, t)$.

Vamos a calcular el campo en el punto x_0 a la derecha del capacitor. Siguiendo con la aproximación que consite en despreciar la desviación de la partícula dentro del capacitor, para el punto $\mathbf{r} = x_0\,\hat{x}$ es siempre $\mathbf{n} = \hat{x}$. Además, como la velocidad también está en x,

$$1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = 1 - \beta. \tag{61}$$

En la aproximación que estamos usando, $\beta = \beta_0$. Por otro lado,

$$\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\} = -(1-\beta_0)\,\frac{qE}{mc\gamma_0}\,\hat{y}. \tag{62}$$

Luego, llamando $\mathbf{E}^+$ al campo de radiación en x_0,

$$\mathbf{E}^+(t) = -\frac{q^2 E}{mc^2(1-\beta_0)}\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}\,\frac{\hat{y}}{R_{\rm ret}}. \tag{63}$$

Falta evaluar $R_{\rm ret}$,

$$R_{\rm ret} = x_0 - x(t'). \tag{64}$$

En la guía anterior ya hemos resuelto el problema de la posición retardada o aparente respecto de un observador en el origen. Cambiar el punto de observación se lleva a cabo fácilmente. Para una partícula que se mueve a velocidad constante β y que pasa frente al observador, ubicado en $x = x_0$, a tiempo t_0, la posición relativa aparente es

$$x_{\rm ap}(t) = x(t') - x_0 = \frac{v(t - t_0)}{1 \mp \beta}, \tag{65}$$

donde el signo 'menos' se aplica para $t < t_0$ y el signo 'más' para $t > t_0$. Para el caso del punto x_0 a la derecha del capacitor,

$$t_0 = \frac{x_0}{v}, \tag{66}$$

y además sólo importan los tiempos menores a t_0, mientras la partícula viaja hacia el punto de observación. Así,

$$x_{\rm ap}(t) = \frac{vt - x_0}{1 - \beta_0}. \tag{67}$$

Finalmente,

$$\mathbf{E}^+(t) = -\frac{q^2 E}{mc^2}\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}\,\frac{\hat{y}}{x_0 - v_0 t}. \tag{68}$$

Este campo existe mientras desde el punto de observación la partícula es vista dentro del capacitor. Si la partícula pasa por el centro del capacitor en $t = 0$, quiere decir que entra en $t_1 = -l/2v_0$. Al tiempo t_1 hay que sumarle lo que tarda en llegar la radiación desde $x = -l/2$ a $x = x_0$. Entonces, desde la posición x_0, la partícula es vista entrar al capacitor en

$$t_1^+ = t_1 + \frac{1}{c}\left(x_0 + \frac{l}{2}\right) = \frac{x_0}{c} - \frac{l}{2v_0}\,(1 - \beta_0). \tag{69}$$

De la misma manera, la partícula sale del capacitor en $t_2 = l/2v_0$, pero desde la posición de x_0 eso es visto un tiempo después, en

$$t_2^+ = t_2 + \frac{1}{c}\left(x_0 - \frac{l}{2}\right) = \frac{x_0}{c} + \frac{l}{2v_0}\,(1 - \beta_0). \tag{70}$$

Es fácil verificar que en t_1^+ es $R_{\rm ret} = x_0 + l/2$, y que en t_2^+ es $R_{\rm ret} = x_0 - l/2$, lo que es correcto.

Para el punto $-x_0$, siguiendo los mismos pasos se encuentra

$$\mathbf{E}^-(t) = \frac{q^2 E}{mc^2(1+\beta_0)}\sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}\,\frac{\hat{y}}{R^-_{\rm ret}} = \frac{q^2 E}{mc^2}\sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}\,\frac{\hat{y}}{vt + x_0}. \tag{71}$$

Esta expresión es válida únicamente mientras la partícula es vista, desde $-x_0$, dentro del capacitor. El intervalo comienza en

$$t_1^- = \frac{x_0}{c} - \frac{l}{2v_0}(1 + \beta_0), \tag{72}$$

y termina en

$$t_2^- = \frac{x_0}{c} + \frac{l}{2v_0}(1+\beta_0). \tag{73}$$

Hay que notar varias cosas. Primero, que debido a que la partícula tiene distintas velocidades aparentes según se la observe desde x_0 o desde $-x_0$, el intervalo de tiempo que tarda en atravesar el capacitor, tal como es visto desde esos dos puntos, es diferente en cada caso:

$$t_2^+ - t_1^+ = \frac{l}{v_0}(1-\beta_0), \qquad t_2^- - t_1^- = \frac{l}{v_0}(1+\beta_0). \tag{74}$$

El punto x_0 recibe radiación durante un intervalo $(1-\beta_0)/(1+\beta_0)$ más corto que el punto $-x_0$.

Los campos de radiación predominan a grandes distancias, de modo que podemos suponer que la situación que interesa es $x_0 \gg l$, y que tanto para x_0 como para $-x_0$ es $R_{\rm ret} \approx x_0$. Por lo tanto, el campo de radiación en esos dos puntos es aproximadamente constante entre los límites de tiempo que calculamos antes. Comparemos los valores de los campos en esta situación, ecs. (63) y (71),

$$\mathbf{E}^+ \simeq -\frac{q^2 E}{mc^2(1-\beta_0)}\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}\,\frac{\hat{y}}{x_0}, \qquad \mathbf{E}^- \simeq \frac{q^2 E}{mc^2(1+\beta_0)}\sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}\,\frac{\hat{y}}{x_0}. \tag{75}$$

La relación entre los módulos es

$$\frac{|\mathbf{E}^+|}{|\mathbf{E}^-|} = \left(\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\right)^2 > 1. \tag{76}$$

Ésta es la relación entre las intensidades recibidas en x_0 y $-x_0$. Ya lo hemos visto varias veces: la radiación tiende a concentrase en la dirección de $\mathbf{v}$. La energía total recibida en cada punto es proporcional a la intensidad y al intervalo de tiempo. En x_0 la intensidad es mayor, pero el intervalo de tiempo es menor. Sin embargo, el primer efecto domina sobre el segundo,

$$\left(\frac{t_2^+ - t_1^+}{t_2^- - t_1^-}\right)\frac{|\mathbf{E}^+|}{|\mathbf{E}^-|} = \frac{1+\beta_0}{1-\beta_0} > 1. \tag{77}$$

4 Problema 4

En este problema una partícula no relativista sigue una trayectoria circular de radio a con velocidad angular constante ω. Primero se pide calcular los campos completos de la partícula. Si la partícula sigue la trayectoria $\mathbf{r}_0(t)$, estos campos vienen dados en general por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{(1-\beta^2)\,(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3 R^2} + \frac{\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}}{c\,R\,(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right]_{\rm ret}, \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{n}]_{\rm ret}\times\mathbf{E}, \tag{78}$$

donde

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t), \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}. \tag{79}$$

Si la partícula es no relativista, a más bajo orden en β resulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{c\,R}\right]_{\rm ret}, \qquad \mathbf{B} = q\left[\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{R^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{c\,R}\right)\times\mathbf{n}\right]_{\rm ret}. \tag{80}$$

Todas las cantidades referidas a la partícula deben evaluarse en el tiempo retardado $t'(\mathbf{r},t)$ que se obtiene de resolver la ecuación

$$c(t-t') = R(t'). \tag{81}$$

A partir de ahora siempre se tratará de un movimiento acotado, como el de la partícula en la órbita circular. Para calcular t' hay que separar en varios casos, de acuerdo a la magnitud relativa de tres cantidades: la longitud característica de la órbita de la partícula, la distancia $|\mathbf{r}|$ y la longitud de onda típica de la radiación. Para un movimiento circular de frecuencia ω, la longitud característica asociada al movimiento de la partícula es el radio de la órbita, y la longitud de onda λ es de orden c/ω.

Hay que notar que en los problemas no relativistas λ siempre es mucho mayor que la longitud típica asociada al movimiento de la partícula: si el tiempo característico es $1/\omega$ y la longitud típica es a, la velocidad característica de la partícula es ωa, y tiene que ser mucho menor que c; de manera que $\omega a/c \ll 1$, pero esto es lo mismo que decir que $a/\lambda \ll 1$.

El caso más sencillo de analizar ocurre cuando la distancia de observación $|\mathbf{r}|$ es mucho mayor que λ y, por lo tanto, que a. Es la llamada zona de radiación, porque ahí los campos dominantes son los que decaen como $1/r$. [La condición $|\mathbf{r}| \gg \lambda$, aunque al parecer no se usará luego en ningún lado, ya está implícita al haber despreciado los términos proporcionales a β al pasar de (78) a (80).] Cuando $r \gg a$, puede escribirse

$$R(t) = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)| \approx r. \tag{82}$$

Si se usa esta aproximación en la ecuación para el tiempo retardado resulta

$$t' = t - \frac{r}{c}. \tag{83}$$

El error cometido al usar este valor de t' para evaluar cantidades asociadas al movimiento de la partícula puede estimarse del siguiente modo. Vayamos un paso más en la aproximación y escribamos

$$R(t) = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)| \approx r - \hat{r}\cdot\mathbf{r}_0(t'). \tag{84}$$

La ecuación para t' implica

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r}\cdot\mathbf{r}_0(t')}{c}. \tag{85}$$

El error que se está cometiendo al usar (83) es, por lo tanto, de orden $\delta t' = a/c$. Este error será despreciable si en esa escala de tiempo las funciones asociadas al movimiento de la partícula cambian poco, es decir, si $\omega\delta t' \ll 1$, lo que implica $\omega a/c \sim \beta \ll 1$. Esta condición ya estaba implícita, de manera que la aproximación

(83) es válida. Para un movimiento relativista, la aproximación (82) puede ser perfectamente válida, pero no así la aproximación (83). Entonces, en el caso no relativista para $r \gg \lambda$ los campos podrán aproximarse por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{\hat{r}\times(\hat{r}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{c\,r}\right]_{t-r/c}, \qquad \mathbf{B} = q\left[\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{r^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{c\,r}\right)\times\hat{r}\right]_{t-r/c}. \tag{86}$$

En los primeros términos de cada campo se reconocen el campo de Couloumb y el de Biot$-$Savart. Los términos que decaen como $1/r$ determinan los campos de radiación,

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{\hat{r}\times(\hat{r}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{c\,r}\right]_{t-r/c}, \qquad \mathbf{B}_{\rm rad} = \hat{r}\times\mathbf{E}_{\rm rad}. \tag{87}$$

Estos campos corresponden a la aproximación dipolar eléctrica.

Lo que sigue puede omitirse; lo fundamental sigue a partir de la ec. (93). Otro caso sencillo se da cuando $|\mathbf{r}|$ no es necesariamente mucho mayor que $|\mathbf{r}_0(t)|$. La aproximación consiste en reemplazar $\mathbf{r}_0(t')$ por $\mathbf{r}_0(t)$ en la ecuación para el tiempo retardado. Para justificar el reemplazo, lo que hay que notar es que si $\dot{\mathbf{r}}_0$ es mucho menor que c, el teorema del valor medio asegura que

$$\frac{|\mathbf{r}_0(t)-\mathbf{r}_0(t')|}{t-t'} \ll c. \tag{88}$$

Dicho de otra manera

$$|\mathbf{r}_0(t)-\mathbf{r}_0(t')| \ll c(t-t'). \tag{89}$$

Escribamos ahora

$$R(t') = \Big|\big[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)\big] + \big[\mathbf{r}_0(t)-\mathbf{r}_0(t')\big]\Big|. \tag{90}$$

Si esto tiene que ser igual $c(t-t')$ y el módulo del segundo corchete es mucho menor que $c(t-t')$, entonces el peso de la igualdad cae sobre el primer término,

$$R(t') \approx |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)| = R(t). \tag{91}$$

Entonces, en las expresiones (80) donde aparecen explícitamente $\mathbf{R}_{\rm ret}$, $R_{\rm ret}$ y $\mathbf{n}_{\rm ret}$ alcanza con usar $\mathbf{R}(t)$, $R(t)$ y $\mathbf{n}(t)$. La única otra cantidad que falta evaluar es $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ret}$. Veremos que el tiempo retardado que aparece en el argumento de $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ puede aproximarse reemplazando también $R(t')$ por $R(t)$ en la ec. (81),

$$t' = t - \frac{R(t)}{c}. \tag{92}$$

Para estimar el error que se está cometiendo al calcular t' de esta forma, supongamos que el movimiento es acotado. (El caso del movimiento no acotado necesita un poco más de cuidado.) Si la longitud característica del movimiento de la partícula es a, entonces $R(t)$ puede diferir de $R(t')$ a lo sumo en una cantidad de orden a. Un error de este orden en $R(t')$ se traslada en un error $\delta t' \sim a/c$ en la determinación de t'. Para que este error pueda ser ignorado, $\delta t'$ debe ser pequeño comparado con el tiempo típico del movimiento de la partícula, es decir, $\omega\delta t' \ll 1$, lo que implica de nuevo la condición de movimiento no relativista.

La conclusión es que para una partícula no relativista en movimiento acotado, siempre puede usarse $t' = t - R(t)/c$. Cuando, además, $|\mathbf{r}| \gg \lambda \gg |\mathbf{r}_0(t)|$, es posible tratar a la partícula como si estuviera en el origen y escribir $t' = t - r/c$.

Volviendo al problema de la partícula en la órbita circular y a los campos de radiación en la zona $r \gg \lambda \gg a$, ec. (87),

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r}, t) = q \left[\frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{c\, r} \right]_{t-r/c}, \qquad \mathbf{B}_{\rm rad} = \hat{r} \times \mathbf{E}_{\rm rad}. \tag{93}$$

El origen del tiempo puede elegirse de tal modo que sea

$$\mathbf{r}_0(t) = a \cos\omega t \; \hat{x} + a \sin\omega t \; \hat{y}. \tag{94}$$

La aceleración es

$$\dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{r}_0. \tag{95}$$

Los campos de radiación son perpendiculares a la línea de observación, dirigida según el versor $\mathbf{r}$. De manera que la base natural para describirlos es la formada por los versores $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ asociados al punto de observación $\mathbf{r}$. Conviene llevar todo a esa base. Alcanza en este problema con escribir $\hat{x}$ y $\hat{y}$ en términos de la base $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ asociada al punto $\mathbf{r}$. Hay un asunto práctico aquí, y es que es más o menos sencillo escribir los versores de esféricas en términos de los versores cartesianos, pero no lo es tanto leer los versores cartesianos en términos de los esféricos. Así,

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \sin\theta \, \cos\varphi \; \hat{x} + \sin\theta \, \sin\varphi \; \hat{y} + \cos\theta \; \hat{z}, \\
\hat{\theta} &= \cos\theta \, \cos\varphi \; \hat{x} + \cos\theta \, \sin\varphi \; \hat{y} - \sin\theta \; \hat{z}, \\
\hat{\varphi} &= -\sin\varphi \; \hat{x} + \cos\varphi \; \hat{y}.
\end{aligned} \tag{96}$$

El truco consiste en notar que los mismos coeficientes que aparecen en estos desarrollos, aparecen en los desarrollos inversos. Esto es evidente si se escribe, por ejemplo,

$$\hat{r} = (\hat{r} \cdot \hat{x}) \; \hat{x} + (\hat{r} \cdot \hat{y}) \; \hat{y} + (\hat{r} \cdot \hat{z}) \; \hat{z}, \tag{97}$$

y así para los otros versores. Entonces, si queremos escribir $\hat{x}$ en la base de esféricas, será

$$\hat{x} = (\hat{x} \cdot \hat{r}) \; \hat{r} + (\hat{x} \cdot \hat{\theta}) \; \hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\varphi}) \; \hat{\varphi}, \tag{98}$$

donde cada coeficiente puede ser leído de las ecs. (96). En definitiva, deberían poder escibir

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \sin\theta \, \cos\varphi \; \hat{r} + \cos\theta \, \cos\varphi \; \hat{\theta} - \sin\varphi \; \hat{\varphi}, \\
\hat{y} &= \sin\theta \, \sin\varphi \; \hat{r} + \cos\theta \, \sin\varphi \; \hat{\theta} + \cos\varphi \; \hat{\varphi}, \\
\hat{z} &= \cos\theta \; \hat{r} - \sin\theta \; \hat{\theta}.
\end{aligned} \tag{99}$$

A partir de aquí puede escribirse $\dot{\mathbf{v}}$ en la base de versores esféricos asociados a $\mathbf{r}$. Identidades trigonométricas de por medio,

$$\dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 a \left[\sin\theta\, \cos(\omega t - \varphi)\, \hat{r} + \cos\theta\, \cos(\omega t - \varphi)\, \hat{\theta} + \sin(\omega t - \varphi)\, \hat{\varphi}\right]. \tag{100}$$

Es sencillo calcular ahora el doble producto vectorial que aparece en el campo $\mathbf{E}_{\text{rad}}$,

$$\hat{r} \times (\hat{r} \times \dot{\mathbf{v}}) = \omega^2 a \left[\cos\theta\, \cos(\omega t - \varphi)\, \hat{\theta} + \sin(\omega t - \varphi)\, \hat{\varphi}\right]. \tag{101}$$

Luego,

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\omega^2 a}{c^2 r} \left[\cos\theta\, \cos(\omega t' - \varphi)\, \hat{\theta} + \sin(\omega t' - \varphi)\, \hat{\varphi}\right]_{t'=t-r/c}. \tag{102}$$

A menos de una fase que depende de r y de φ, lo que hay en cada punto son dos campos oscilando en direcciones perpendiculares,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\theta(t) = E_0 \cos\theta\, \cos(\omega t - \xi)\, \hat{\theta}, \\ \\ \mathbf{E}_\varphi(t) = E_0\, \sin(\omega t - \xi)\, \hat{\varphi}, \end{cases} \tag{103}$$

donde $\xi = \varphi + \omega r/c$ y $E_0 = q\omega^2 a/(c^2 r)$. Los dos campos están en fase pero, salvo en $\theta = 0$, tienen amplitudes diferentes, $E_\theta = E_0 \cos\theta$ y $E_\varphi = E_0$. Cuando $\theta = 0$ las amplitudes con las mismas y la polarización es circular. En $\theta = \pi$, la polarización es lineal, en la dirección the φ. Entre uno y otro valor extremo de θ la polarización de manera gradual cambia entre circular y lineal. [FIGURA: se las debo]

La intensidad de la radiación observada en $\mathbf{r}$ está dada por el vector de Poynting. La intensidad se define como

$$I = \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}, \tag{104}$$

y representa el flujo de energía lejos del punto de emisión, por unidad de superficie y en la dirección paralela al flujo. Que el vector de Poynting de los campos de radiación está en la dirección de $\hat{r}$ se ve directamente

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{rad}} \times \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{rad}} \times (\hat{r} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}) = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2\, \hat{r}. \tag{105}$$

Aquí se ha usado que $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ es perpendicular a $\hat{r}$. Como el elemento de área normal a $\hat{r}$ es $dA = r^2 d\Omega$, la intensidad por unidad de ángulo sólido se define multiplicando por r^2. Suele notarse así

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = r^2\, \mathbf{S} \cdot \mathbf{r} = \frac{c}{4\pi} r^2\, |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2. \tag{106}$$

Puesto que los campos de radiación decaen como $1/r$, esta magnitud depende de la distancia sólo a través del tiempo retardado. Lejos del punto de emisión, los únicos campos que importan son los de radiación, de manera que tiene sentido calcular la intensidad usando sólo estos campos. A partir de la ec. (93), resulta

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \left|\hat{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right|^2_{\text{ret}} = \frac{q^2}{4\pi c} \left[\dot{\beta}^2\, \sin^2\psi\right]_{\text{ret}}, \tag{107}$$

donde ψ es el ángulo que forman $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ y $\hat{r}$. Para la partícula en la órbita circular podemos aplicar este resultado general, pero en realidad como ya habíamos calculado el campo $\mathbf{E}_{\rm rad}$ es más simple usar directamente la ec. (102) y escribir

$$r^2|\mathbf{E}_{\rm rad}|^2 = \left(\frac{q\omega^2 a}{c^2}\right)^2 \Big[1 - \sin^2\theta\, \cos^2(\omega t - \omega r/c - \varphi)\Big]. \tag{108}$$

Entonces,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q\omega^2 a}{c^2}\right)^2 \Big[1 - \sin^2\theta\, \cos^2(\omega t - \omega r/c - \varphi)\Big]. \tag{109}$$

Promediando en el tiempo se obtiene la potencia media,

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} \right\rangle = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q\omega^2 a}{c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = \frac{c}{8\pi}\left(\frac{q\omega^2 a}{c^2}\right)^2 \left(1 + \cos^2\theta\right). \tag{110}$$

La distribución de potencia el patrón característico de una emisión dipolar. [FIGURA: próximamente]

En los problemas no relativistas no hay distinción entre la potencia emitida y la potencia recibida porque $dt'/dt = 1$. Antes escribimos $dP(t)/d\Omega$ como la intensidad por ángulo sólido en el punto de recepción,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\Big[\dot{\beta}^2\, \sin^2\psi\Big]_{\rm ret}. \tag{111}$$

Tiene sentido decir que la radiación recibida en t fue emitida en $t' = t - r/c$. Así, la cantidad

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\Big[\dot{\beta}(t')^2\, \sin^2\psi(t')\Big] \tag{112}$$

puede pensarse como la energía emitida a tiempo t'. (Esto no es válido para movimientos relativistas; ver el problema 6.) Todo aparece evaluado a tiempo t', y no se hace referencia a ningún punto de recepción. La notación es convencional, no debe pensarse que la función $dP(t')/dt$ sea la misma que $dP(t)/d\Omega$. Ahí el nombre de la variable es importante. La integral de $dP(t')/d\Omega$ en todo el ángulo sólido da la potencia total emitida por la partícula a tiempo t',

$$P(t') = \int d\Omega\, \frac{dP(t')}{d\Omega}. \tag{113}$$

A partir del resultado general (107) puede escribirse

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\Big[\dot{\beta}^2\,(1 - \cos^2\psi)\Big],$$

$$\int d\Omega\, \frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\int d\Omega\,(1 - \cos^2\psi). \tag{114}$$

Todas las cantidades están evaluadas en t', sin hacer referencia a t. Recordemos que ψ es el ángulo entre $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ y $\hat{r}$, y es una función complicada del tiempo, de φ y de θ. Para calcular integrales angulares como la de arriba, un camino que suele simplificar los cálculos es elegir un nuevo sistema de ejes en donde el nuevo eje z esté en la dirección del vector relevante al problema. En este caso el vector relevante es $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. El ángulo ψ será el ángulo θ del nuevo sistema, y lo que habrá que calcular es

$$\int d\Omega\ (1 - \cos^2\theta). \tag{115}$$

Así escrita de esta manera la integral se hace muy fácil,

$$\int d\Omega\ (1 - \cos^2\theta) = \int_0^{2\pi} c\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ (1 - \cos^2\theta) = \frac{8\pi}{3}. \tag{116}$$

Luego,

$$P(t') = \frac{2q^2}{3c}\dot{\beta}(t')^2 = \frac{2q^2}{3c^3}\,\ddot{r}(t')^2. \tag{117}$$

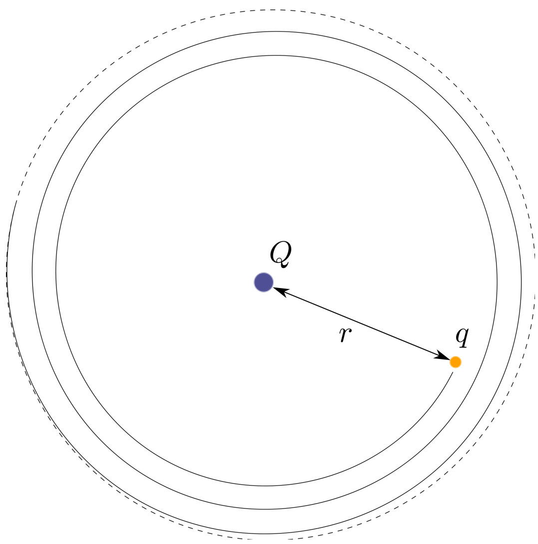
No es ninguna sorpresa que hayamos obtenido la fórmula de Larmor. Para la partícula en la órbita circular $\ddot{r} = \omega^2 a$, entonces

$$P(t') = \frac{2q^2\omega^4 a^2}{3c^3}. \tag{118}$$

Es natural que esta potencia no dependa del tiempo, porque todos los puntos de la órbita son equivalentes.

5 Problema 5

Este problema trata sobre la caída la caída de una partícula cargada al centro de fuerzas. En esencia se trata de estimar cuánto tiempo tarda un electrón en un átomo clásico en caer hasta el núcleo.



Como en los otros problemas de pérdida de energía por radiación, uno asume que los efectos dinámicos de la radiación son secundarios y despreciables en los intervalos de tiempo característicos del movimiento. Instante a instante la órbita se calcula como si la energía de la partícula se conservase. Tal vez recuerden este resultado: para una partícul de carga $-q$ en órbita circular alrededor de otra mucho más pesada de carga Q, la energía total es igual a un medio de la energía potencial, e igual menos la energía cinética

$$\mathcal{E}(r) = -\frac{qQ}{2r}, \qquad \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{qQ}{2r}. \tag{119}$$

Para este tipo de órbitas la energía es función únicamente del radio. (En el caso de órbitas elípticas también hay que escribir una ecuación para el momento angular.) La pérdida de energía por radiación está dada por la fórmula de Larmor no relativista. Si la aceleración se escribe en términos de la fuerza, queda

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\frac{2q^2}{3c^3}\left(\frac{qQ}{mr^2}\right)^2. \tag{120}$$

Ahora bien, la energía depende del tiempo a través de r, de manera que

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{E}(r)}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{2q^2}{3c^3}\left(\frac{qQ}{m^2r^2}\right)^2. \tag{121}$$

Usando la ec. (119) para escribir $d\mathcal{E}/dr$, resulta

$$r^2\frac{dr}{dt} = -\frac{4q^3Q}{3m^2c^3}. \tag{122}$$

Si el radio inicial es r_0,

$$r(t) = \left(r_0^3 - \frac{4q^3Qt}{m^2c^3}\right)^{1/3} = \left(r_0^3 - \frac{4q^3Qt}{m^2c^3}\right)^{1/3} = r_0\left[1 - 16\frac{c}{r_0}\frac{q}{Q}\left(\frac{|\mathcal{E}_0|}{mc^2}\right)^2 t\right]^{1/3}, \tag{123}$$

donde $|\mathcal{E}_0| = qQ/2r_0$. La última forma de escribir el resultado muestra que las unidades son las correctas y además los factores quedan agrupados formando cantiades que tienen algún significado. El tiempo de caída es el tiempo al cual $r(t) = 0$,

$$t^* = \frac{r_0^3m^2c^3}{4q^3Q} = \frac{1}{16}\frac{r_0}{c}\frac{Q}{q}\left(\frac{mc^2}{|\mathcal{E}_0|}\right)^2. \tag{124}$$

Para el átomo de hidrógeno, si se acuerdan que $r_0 \approx 5.3\times10^{-9}\,\mathrm{cm}$, $mc^2 \approx 511$ keV y que la energía del nivel fundamental es 13.6 eV, el tiempo de caída es

$$t^* \approx 1.5\times10^{-11}\,\mathrm{s}. \tag{125}$$

Pero si no se acuerdan de esos valores deberán usar que,

$$q = Q \approx 4.8\times10^{-10}\,\mathrm{esu}, \qquad m \approx 9.1\times10^{-28}\,\mathrm{g}. \tag{126}$$

El número de vueltas entre $t = 0$ y $t = t^*$ es

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t^*} dt\,\omega(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{r_0} dr\,\frac{\omega(r)}{|dr/dt|}. \tag{127}$$

La frecuencia como función del radio se obtiene de la aceleración,

$$mr\omega^2 = \frac{q^2}{r^2} \longrightarrow \omega = \frac{q}{m^{1/2}r^{3/2}}. \tag{128}$$

Luego, usando la ec. (122) para escribir $|dr/dt|$,

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{r_0} dr \, \frac{q}{\sqrt{mr^3}}\frac{3r^2\, m^2c^3}{4q^4} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc^2}{q^2/r_0}\right)^{3/2} \approx 2\times 10^5. \tag{129}$$

Obtuvimos todos estos resultados asumiendo que los efectos de la pérdida de energía por radiación son despreciables en tiempos del orden de los del movimiento orbital y que el movimiento es no relativista. Si lo primero es cierto, lo que disminuye el radio en un ciclo debe ser mucho menor que el valor del propio radio,

$$\frac{\dot{r}}{\omega} \ll r, \tag{130}$$

que es lo mismo que decir

$$\frac{\omega r}{\dot{r}} \gg 1. \tag{131}$$

Esto prácticamente ya lo calculamos antes al escribir el integrando en la ec. (127). Reacomodando un poco las cantidades, debería ser entonces

$$\frac{3}{4}\left(\frac{mc^2}{q^2/r}\right)^{3/2} \gg 1. \tag{132}$$

Inicialmente este número es un factor 10 mayor que N, es decir, vale alrededor de 2×10^6, pero disminuye conforme decrece r. Mientras sea

$$r \gg \frac{q^2}{mc^2} \tag{133}$$

la aproximación será válida, pero eventualmente el radio alcanzará valores en donde eso deje de ser cierto. La cantidad $r^* = q^2/(mc^2)$ aparece con mucha frecuencia en los problemas donde se estudia el efecto de la radiación sobre el movimiento de las partículas. Recibe el nombre de radio clásico del electrón y es aproximadamente igual a 2.8×10^{-13} cm.

Veamos si acaso antes o después de que deje de valer la aproximación anterior puede ocurrir que el electrón se vuelva relativista. Tenemos que comparar su velocidad con la velocidad de la luz. La aproximación no relativista vale mientras sea $\omega r \ll c$. Deberían poder escribir que eso equivale a pedir

$$\sqrt{\frac{mc^2}{q^2/r}} \gg 1. \tag{134}$$

Pero de nuevo esto implica la condición (133). Las dos aproximaciones son válidas en el mismo intervalo de distancias, aunque por las potencias a las que aparece r en las ecs. (132) y (134), la primera que falla es la aproximación no relativista.