FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre 2011

Guía 6: Relatividad

■ **Problema 1.** (Aberración relativista.) Una fuente de luz que está en reposo en el sistema S' emite, según las observaciones hechas en este sistema, luz de frecuencia ω' en todas direcciones. La misma fuente es observada desde un sistema S, respecto del cual la fuente se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{z}$.

a) A partir de la transformación del cuadrivector número de onda k'^{μ}, encuentre la dirección de propagación en S de la luz que en S' se propaga en la dirección dada por los ángulos φ' y θ'. Encuentre las relaciones entre las siguientes funciones en los dos sistemas: $\sin\theta, \cos\theta$ y $\tan\theta/2$.

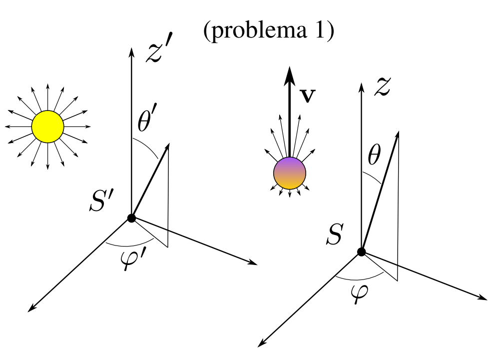
b) Halle la relación entre los ángulos de propagación en los dos sistemas, pero esta vez a partir de las fórmulas de transformación de velocidades para una partícula que se mueve a velocidad c.

c) La luz que en S' se emite según una cierta dirección y dentro de un ángulo sólido $d\Omega' = \sin\theta'\, d\varphi' d\theta'$ se propaga en S dentro de un ángulo $d\Omega$. Encuentre la relación entre $d\Omega'$ y $d\Omega$.

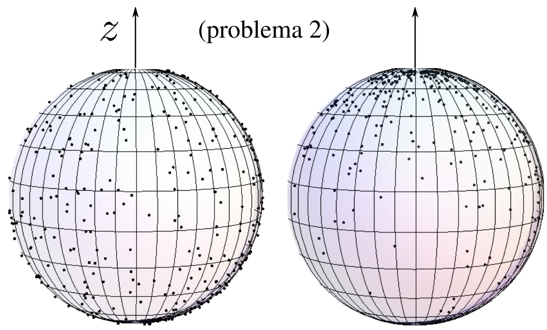
d) A partir de las fórmulas de transformación de k^{μ}, encuentre la frecuencia $\omega(\varphi, \theta)$ de la luz que se propaga, según el sistema S, en la dirección determinada por los ángulos φ y θ.

e) Encuentre nuevamente la relación entre las frecuencias en uno y otro sistema en función de la dirección de observación en S, pero esta vez de manera geométrica, analizando la emisión de frentes de onda en el sistema S y teniendo en cuenta la dilatación temporal.

f) La distancia de la fuente al origen de S es mínima en $t = 0$, cuando toma el valor d. Grafique cualitativamente la frecuencia $\omega_0(t)$ que registra un observador en el origen de S como función del tiempo. Indique con precisión los valores asintóticos de ω_0 cuando $t \longrightarrow \pm\infty$, el instante de tiempo en que la luz llega al origen perpendicular al eje z y con qué frecuencia lo hace (Doppler transverso).



(problema 1)



(problema 2)

el cielo según $\mathcal{O}$ — el cielo según $\mathcal{O}'$

■ **Problema 2.** (El cielo relativista.) Suponga que para cierto observador $\mathcal{O}$ la esfera celeste consiste en una distribución uniforme de estrellas, con N estrellas por ángulo sólido. Un segundo observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{z}$ respecto del primero. En determinado instante los dos observadores se encuentran en la misma posición.

a) ¿Cuál es la distribución de estrellas por unidad de ángulo sólido $N'(\varphi', \theta')$ que ve $\mathcal{O}'$? Grafique sus resultados para distintos valores de $\gamma(v)$ ¿Qué pasa cuando $\gamma(v) \gg 1$? Analice los efectos sobre la visibilidad de las estrellas debidos al corrimiento Doppler de la frecuencia.

b) Suponga que el observador $\mathcal{O}$ ve una pequeña constelación formada por 3 estrellas en triángulo, con posiciones angulares (θ, φ), $(\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1)$ y $(\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2)$. Encuentre las posiciones angulares de las mismas estrellas según $\mathcal{O}'$. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos definidos por la constelación según sea vista por uno y otro observador?

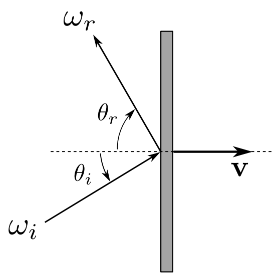
■ **Problema 3.** Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i, como muestra la figura.

a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.

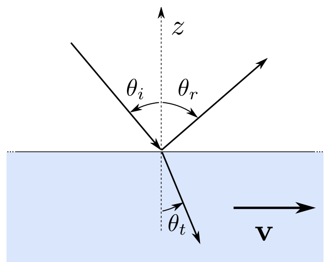
b) Para ángulos de incidencia distintos de cero, el espejo puede moverse con velocidad mayor que la velocidad con que los frentes de onda se acercan a él. ¿Cómo se interpretan las fórmulas del ítem (a)?

c) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo partículas o de sonido contra una pared en movimiento.

■ **Problema 4.** (Fresnel relativista.) En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud $\mathbf{E}$, incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible definir en el laboratorio un ángulo análogo al ángulo de Brewster para líquidos en reposo?



(problema 3)



(problema 4)

Problema 5. (Experimento de Fizeau.) Un líquido transparente, que tiene índice de refracción n, real e independiente de la frecuencia, se mueve respecto al laboratorio con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{x}$. Ondas electromagnéticas planas pueden propagarse dentro del líquido en la dirección $\hat{x}$, tanto a favor como en contra de la corriente.

a) Encontrar la relación entre k y ω en el sistema de laboratorio para las ondas que se propagan en el líquido, distinguiendo los casos en que las ondas viajan a favor y en contra de la corriente.

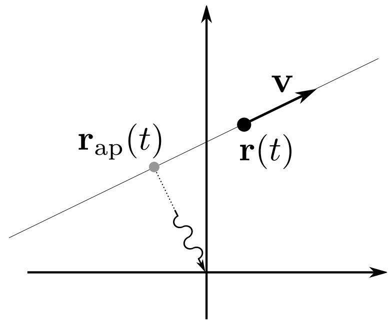
b) A partir de la relación anterior, calcule la velocidad de propagación de las ondas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible que la luz no logre remontar la corriente en el sistema de laboratorio?

c) Demuestre que, a primer orden en v, la velocidad de las ondas en el sistema de laboratorio es

$$u = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

d) Suponga que el índice de refracción n depende de ω. ¿Cómo se modifica, siempre a primer orden en v, el resultado del ítem anterior?

■ **Problema 6.** (Tiempos retardados, posiciones y velocidades aparentes.) Una partícula se mueve según la ecuación $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, con $|\mathbf{v}| < c$. Encuentre su trayectoria aparente vista por un observador en el origen.



Dos métodos son sugeridos: 1) Directamente calculando el tiempo retardado. 2) Definiendo para cada instante t un sistema de referencia cuyo origen pase por el observador y que se mueva con la partícula, y usando la fórmula relativista de aberración. Tenga en cuenta, al seguir este segundo método, que para el observador que se mueve con la partícula el tiempo retardado es un concepto innecesario y que, en el instante considerado, los mismos rayos de luz alcanzan tanto al observador en reposo como al observador en movimiento.

Luego, a partir de la trayectoria aparente:

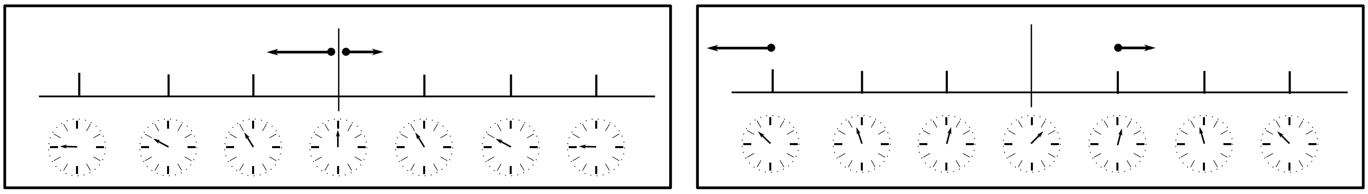
a) Encuentre la velocidad aparente como función del tiempo de una partícula que se mueve sobre el eje x y que pasa por el origen en $t = 0$. ¿Hay velocidades aparentes límite de acercamiento y alejamiento? Para este caso de incidencia frontal, ¿qué es lo que se vería si fuese $|\mathbf{v}| > c$?

b) Encuentre la longitud aparente como función del tiempo de una regla de longitud propia L que se mueve sobre el eje x y cuyo centro pasa por el origen en $t = 0$. ¿Qué relación hay entre la longitud aparente, la longitud propia y la longitud medida en el sistema del observador?

c) Encuentre la forma aparente de una regla que se mueve en la dirección $\hat{x}$, orientada según el eje y y con su punto medio sobre el eje x. Grafique para varios tiempos, incluyendo aquel en que el centro de la regla pasa por el origen.

d) Para hacer en la computadora: grafique para varios tiempos o haga directamente la animación de la forma aparente de una esfera (esfera en su sistema propio) que se mueve a velocidad constante. Experimente variando la posición de mínimo acercamiento del centro de la esfera al origen. Vea con cuidado el caso $\gamma \gg 1$. Asegúrese de graficar en igual escala las tres direcciones. ¿Puede inferir algún resultado general acerca del contorno aparente de la esfera?

■ **Problema 7.** A la medianoche, un observador en el origen ve que dos partículas se emiten en sentidos opuestos desde su posición, y se alejan a velocidades constantes, aunque diferentes. En la página siguiente, la figura de la izquierda muestra la imagen del mundo que tiene el observador en ese momento. Naturalmente, relojes lejanos son vistos a una hora progresivamente más temprana. Un tiempo después, la visión del mundo que tiene el observador se muestra en la figura de la derecha. La partícula más veloz llega a los relojes lejanos a una hora que es aún anterior a la medianoche, es decir, anterior al momento de ser emitida desde el origen. La partícula lenta siempre llega a los relojes lejanos después de que han dado las doce. A partir de las figuras y de lo que sabe acerca de velocidades y posiciones aparentes, explique qué está pasando aquí.



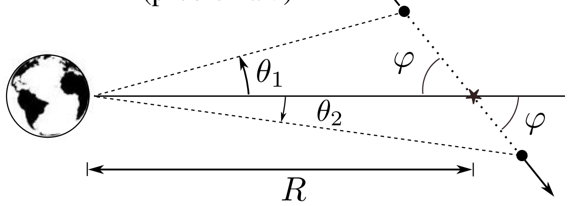
■ **Problema 8.** (Velocidades superlumínicas I: *jets*.) Desde un mismo punto en el cielo, a una distancia R de varios miles de años luz de la Tierra, se ven partir dos objetos en direcciones opuestas. Desde la Tierra, lo que se puede medir directamente son sus velocidades angulares **aparentes** en el cielo, $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ y $\omega_2 = \dot{\theta}_2$. La figura muestra lo que se ve desde la Tierra en un dado instante, aunque el ángulo φ es, en principio, desconocido. Los ángulos θ_i son del orden del segundo de arco. Suponiendo que los dos objetos se mueven con la misma velocidad v:

a) Encuentre ω_1 y ω_2 en función de R, φ y v, y a partir de ahí despeje v y φ en función de las cantidades medibles, ω_1, ω_2 y R.

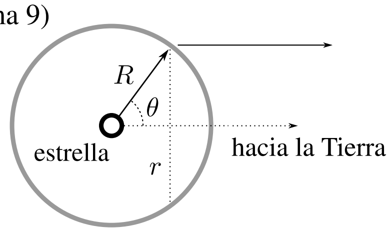
b) ¿Bajo qué condiciones es la velocidad transversal aparente de alguno de los objetos mayor que c?

c) En la práctica, R no se conoce con precisión, pero puede obtenerse otra ecuación que evite la necesidad de conocer R para calcular v. Suponga que la misma línea de emisión, de frecuencia propia ν_0, puede identificarse en los dos objetos. Debido al efecto Doppler, la línea tendrá frecuencias ν_1 y ν_2, según cuál objeto se observe. Halle v en función de ν_0, ν_1 y ν_2.

(problema 8)



(problema 9)



■ **Problema 9.** (Velocidades superlumínicas II: ecos de luz.) Considere una estrella a una distancia d de varios años luz de la Tierra, y rodeada por una cáscara esférica de polvo de radio $R \ll d$. Esta cáscara absorbe y reemite en forma instantánea toda la luz emitida por la estrella. La estrella experimenta repentinamente una explosión de supernova, donde se emite un pulso muy intenso de luz en todas direcciones y que ilumina simultáneamente toda la cáscara. Sin embargo, como distintos puntos de la cáscara están a distinta distancia de la Tierra, un observador ve que la cáscara se ilumina progresivamente a partir del centro de la línea de visión. El efecto neto es el de un anillo fuertemente iluminado, cuyo radio r aumenta primero desde cero y luego decrece hasta desaparecer. Demuestre que $dr/dt = c \cot \theta$, de manera que para $\theta < 45°$ la expansión del anillo es superlumínica.

Analice la evolución del eco luminoso si en lugar de haber una cáscara de polvo rodeando la estrella, entre ésta y la Tierra se interpone un delgado plano de polvo, normal a la línea de visión. ■