FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre de 2011

Guía 7: Formulación covariante

■ **Problema 1.** Un sistema inercial S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto de un sistema S. Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.

a) Si en S hay un campo tensorial $A^{\mu\nu\cdots}(t, \mathbf{r})$, encuentre el campo $A'^{\mu\nu\cdots}(t', \mathbf{r}')$ según el sistema S'.

b) Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre los campos $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S'.

c) Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana y encuéntrela explícitamente.

■ **Problema 2.** Transforme los campos estáticos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ medidos en un sistema S hasta otro sistema S' que se mueve con velodidad $\mathbf{v}$ respecto del primero, considerando los siguientes casos: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Proponga ejemplos para cada situación.

■ **Problema 3.** En un sistema S, en cierto instante de tiempo y cierto punto del espacio se miden campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Demostrar que:

a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.

b) La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.

c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único este sistema?

■ **Problema 4.** En un sistema de referencia inercial S, el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.

a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.

b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \to \pi/2$. Verificar el comportamiento de los invariantes.

■ **Problema 5.** Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro. Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

■ **Problema 6.** Una barra infinitamente larga y de sección circular está cargada uniformemente en volumen.

a) Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo a la barra. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación directa de los campos.

b) Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Primero, a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S', y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv \frac{1}{c} F^\mu_{\ \nu} j^\nu$ es el cuadrivector que es generalización covariante de la densidad de fuerza. Como "yapa" del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.

■ **Problema 7.** Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

$$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c\,R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

b) A partir de estos potenciales, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c) - \mathbf{m} \times \frac{[3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3}, \\
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n} \times \frac{[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3}, \\
\mathbf{E} &= \mathbf{B} \times \mathbf{v}/c,
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor $\mathbf{p}$.

■ **Problema 8.** *Ley de Biot y Savart revisada.* Un hilo con corriente I se encuentra sobre el eje x. La corriente puede atribuirse a una densidad lineal de carga de valor λ_0 que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$, es decir $I = \lambda_0 v$. Calcule el campo magnético integrando el campo producido por cada elemento de carga, siguiendo dos métodos:

a) A partir de la expresión relativista del campo magnético de una carga en movimiento uniforme escrito en términos de las cantidades actuales a tiempo t. Es decir, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$, con

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{n}/\gamma^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2} R^2},$$

donde $\mathbf{R} = R\,\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$ y ψ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{R}$. La trayectoria de la carga es $\mathbf{r}(t) = x_0 + vt\,\hat{x}$. Notar que todas las cantidades están evaluadas en el tiempo t.

b) A partir de la expresión relativista del campo magnético de una carga en movimiento uniforme escrito en términos de las cantidades retardadas. Es decir, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$, con

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = q \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \right]_{\text{ret}}.$$

Para este segundo método, lo importante es la imagen de la línea de cargas en movimiento. Usted ha visto en los problemas de la guía anterior que la longitud de la imagen de una regla depende de la posición del observador y del tiempo de observación. Entonces, antes de poder integrar el campo de toda la línea de cargas, deberá calcular cuál es la densidad lineal de carga $\lambda(x)$ "vista" desde $\mathbf{r}$.

Lo que hay que notar al final de este problema es que aunque el campo de cada elemento de carga tiene correcciones relativistas, el campo de todo el hilo sigue estando dado por la ley de Bioy y Savart. Para una discusión de este tema ver Jackson 3ra. ed., nota al pie de la página 176, en la sección "Biot and Savart Law".

■ **Problema 9.** Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso lineal de las partículas ¿Hay en ello alguna contradicción?

■ **Problema 10.** Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:

a) Movimiento en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x. La condición inicial es $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.

b) Movimiento en un campo magnético uniforme y estático.

c) Movimiento en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ cruzados, perpendiculares entre sí, uniformes y estáticos. Considerar los tres casos posibles: (a) $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ y (c) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

■ **Problema 11.** Un observador está en el origen de coordenadas. A una distancia L hay una fuente de partículas de masa m y carga q. El observador tiene un reloj y puede ver la posición de las partículas a través de un telescopio. El observador registra la posición $x_{\rm ap}(t)$ de una partícula, tal como él mismo la ve, en función del tiempo t marcado por su propio reloj. El resultado de estos registros es la gráfica de la figura. En la gráfica están indicadas las formas que adopta $x_{\rm ap}$ fuera de la zona recuadrada. Lo que ocurre dentro del recuadro es más complicado, la partícula avanza y retrocede varias veces.

a) Teniendo en cuenta los efectos del retardo, encuentre la posición $x(t)$ de la partícula como función del tiempo en las regiones fuera de la zona recuadrada en la figura, donde se conoce $x_{\rm ap}(t)$.

b) Encuentre las energías de la partícula al dejar la fuente y al llegar al observador.

c) Asumiendo que entre la fuente y el observador, y dirigido según la línea que los une, hay un campo eléctrico estático, encuentre su promedio espacial a lo largo de la trayectoria de la partícula.