FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre de 2011

Guía 8: Radiación

1. Una partícula no relativista de carga Ze, masa m y energía cinética inicial $\mathcal{E}$ incide frontalmente sobre un centro de fuerzas fijo. La interacción es repulsiva y está descripta por un potencial $V(r)$ que es mayor que $\mathcal{E}$ a distancias suficientemente cercanas al origen.

   (a) Mostrar que la energía total radiada está dada por

   $$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{Z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2 \frac{dr}{\sqrt{V\left(r_{\min}\right)-V(r)}},$$

   donde $r_{\min}$ es la distancia de mínimo acercamiento al centro de fuerzas. (Jackson)

   (b) Si la interacción es Coulombiana, $V(r) = ZZ'e^2/r$, mostrar que la energía total irradiada es

   $$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{Zmv_0^5}{Z'c^3},$$

   donde v_0 es la velocidad de la carga incidente en el infinito. (Jackson)

   (c) Como caso particular, considerar un positrón que incide con sobre un protón. Si la velocidad inicial del positrón en el infinito es v_0, estimar su velocidad final como resultado de la perdida de energía por radiación, despreciando el movimiento del protón. ¿Cómo está polarizada la radiación? Despreciando ahora los efectos de la pérdida de energía por radiacíón, pero teniendo en cuenta la masa finita del protón, estimar la velocidad final del positrón. Compare los dos resultados para la velocidad final.

2. Este problema es la versión relativista del anterior. Una partícula relativista de carga q y masa m que se mueve sobre el eje x incide sobre una partícula de carga Q fija en el origen. Las dos cargas tienen el mismo signo. Inicialmente, en $x \longrightarrow \infty$ y $t \longrightarrow -\infty$, la partícula de masa m está caracterizada por un factor relativista γ_0.

   (a) Demuestre primero que para una partícula de masa m y carga q

   $$m\gamma(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = q\Big[\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\ \boldsymbol{\beta}\Big].$$

   Esta fórmula se usa mucho en los problemas relativistas para obtener $\dot{\mathbf{v}}$.

   (b) Encuentre x como función de γ. ¿Cuál es la distancia de mínimo acercamiento?

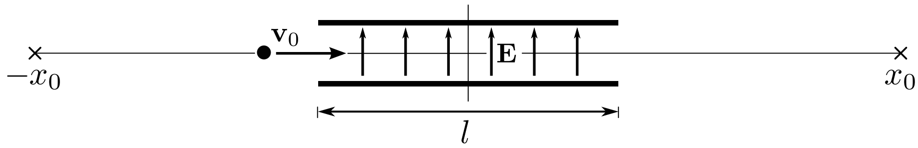
   (c) Encuentre $\dot{v}$ como función de γ.

   (d) Encuentre $\dot{\gamma}$ como función de γ.

   (e) Escriba la potencia radiada como función de (¿lo adivinan?) γ.

   (f) Escriba la energía total radiada como una integral, $\Delta W = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma\, f(\gamma)$, dando los valores de γ_1, γ_2 y la función f en términos de los datos del problema.

3. Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud l. El campo $\mathbf{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular a $\mathbf{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.



   a) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.
   b) Escriba la expresión del campo eléctrico de radiación y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y muy alejados de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

4. Una partícula cargada efectúa un movimiento circular uniforme con frecuencia ω. En la aproximación no relativista, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ completos. Para los campos de radiación, calcular el valor medio temporal de la distribución de potencia y la intensidad total irradiada por ciclo, y analizar la polarización del campo en función de la dirección.

5. Una partícula de carga $-e$ y masa m gira alrededor de otra mucho más pesada de carga Ze. El radio de la órbita circular es inicialmente R. Estimar el tiempo que tarda la partícula en caer al centro debido a la pérdida de energía por radiación y calcular el número de vueltas que realiza antes de caer. Asumir que el movimiento es no relativista.

6. Una carga q realiza un movimiento armónico sobre el eje z, $z(t') = a\cos(\omega_0 t')$. Mostrar que la potencia instantánea irradiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP\,(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 c\beta^4}{4\pi a^2}\frac{\sin^2(\theta)\cos^2(\omega_0 t')}{\left[1+\beta\cos(\theta)\sin(\omega_0 t')\right]^5}, \qquad \text{donde} \quad \beta = a\omega_0/c \qquad \text{(Jackson)}.$$

7. El radio de un anillo circular es una función del tiempo $a(t) = r_0\cos^2\omega t$. En todo momento $\dot{a}/c \ll 1$. El anillo tiene carga q distribuida uniformemente.

   (a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}$, indicando separadamente las contribuciones de los términos dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.
   (b) Graficar cualitativamente $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}$ sobre la superficie de una esfera.
   (c) Calcular la potencia media emitida por unidad de ángulo sólido. Graficar cualitativamente en función de la dirección.
   (d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones.

8. Ídem al anterior para dos cargas q y $-q$ que giran en el plano xy con frecuencia ω, separadas una distancia d. ¿Cuál es la frecuencia de la radiación emitida?

9. Ídem al anterior para dos cargas iguales de valor q.

10. Una esfera de radio a con magnetización uniforme $\mathbf{M}$ rota con velocidad angular constante alrededor de un eje que pasa por el centro de la esfera y forma un ángulo α con $\mathbf{M}$.

    (a) Calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, la distribución angular de potencia y la intensidad total irradiada por período.

    (b) Calcular el flujo de $\mathbf{L}$ que se lleva el campo.

11. **"Magnetars"**. El pulsar SGR 1806-20 rota con un período $T = 7{,}5$s (esto es una velocidad de 30.000 km/h en su superficie). La velocidad de frenado de esta rotación es inusualmente alta en términos astronómicos, siendo $\dot{T} = 8 \times 10^{-11}$. Calcule el máximo campo magnético sobre la superficie del pulsar, asumiendo que su masa y su radio son los típicos de este tipo de estrellas ($m = 1{,}4 M_{\odot} = 2{,}8 \times 10^{30}$ kg, $r = 10$ km) y que el frenado en la rotación se produce debido a la pérdida de energía por radiación. Suponga además que la velocidad angular es perpendicular al momento magnético de la estrella. [K. T. McDonald, "Magnetars", Am J. Phys. **68** (2000) 775.]

12. Una extensión del problema anterior: cuántas ciudades como Buenos Aires podrían iluminarse con la energía que emite la Tierra debido a la rotación diurna de su momento magnético.

13. Un dipolo eléctrico rota en el plano xy con frecuencia ω. Demostrar que el momento angular del campo electromagnético que atraviesa la superficie de una esfera de radio R centrada en el dipolo es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = c \int (\mathbf{r} \times \mathbf{g})\, R^2 d\Omega \qquad \text{(Panofsky §14)},$$

    donde $\mathbf{g} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) / (4\pi c)$ es la densidad de momento lineal. Calcular la potencia total irradiada y el cociente entre los valores medios de L_z y de la energía que atraviesan por unidad de tiempo la superficie. Interpretar este resultado en términos de fotones de energía $\hbar\omega$.

14. Considere una antena delgada de longitud d, orientada según el eje z y con una corriente de la forma

$$I(t, z) = I \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \sin \omega t.$$

    Encuentre los campos exactos en la zona de radiación y la potencia media radiada por unidad de ángulo sólido. Analice la polarización.

15. Ídem al problema anterior para una espira circular de radio a con corriente $I(t) = I_0 \sin \omega t$.

16. La corriente superficial sobre el plano xy es cero para $t < 0$ y vale $\kappa\, \hat{x}$ para $t > 0$. La densidad de carga es cero en todo el espacio. Encuentre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ para todo tiempo.

Preguntas Molestas

1. ¿Cuál es la característica fundamental de los campos de radiación?

2. ¿Qué relación cumplen los campos de radiación eléctrico y magnético suficientemente lejos de sus fuentes?

3. Para un conjunto de n electrones libres en movimiento arbitrario, puede demostrarse (hacerlo) que el momento dipolar eléctrico total es proporcional a la posición del centro de masa del sistema. Por lo tanto, (demostrarlo) no hay radiación dipolar eléctrica. Además, también se demuestra (demostrarlo) que tampoco hay radiación dipolar magnética. Por lo tanto, ¿electrones acelerados no irradian?

4. La corriente en una espira circular está formada por cargas en movimiento. Aunque el valor de la corriente sea constante y uniforme en la espira, las cargas en movimiento circular están aceleradas. ¿Emite radiación este sistema?

5. Si calculamos los campos de radiación hasta el orden dipolar magnético, ¿qué términos debemos considerar?