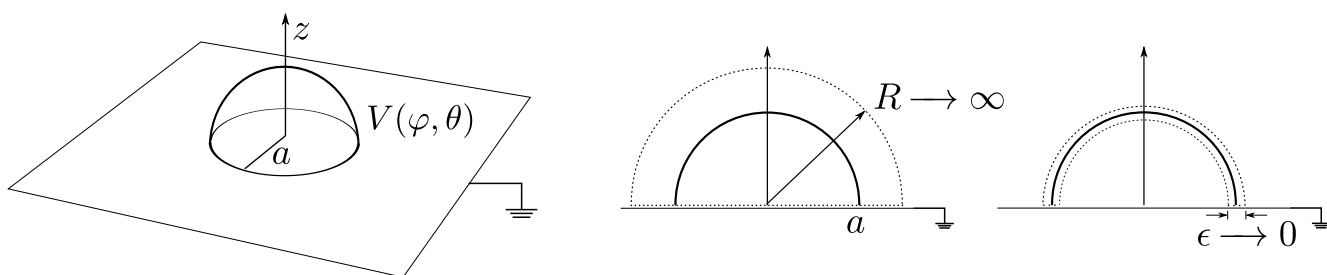


Física teórica 1 – 1er. cuatrimestre 2011 – Primer parcial, con soluciones (16/5/2011)

Problema 1. Sobre un plano infinito a potencial cero hay una semiesfera de radio a , como muestra la figura. Sobre la semiesfera el potencial es $V(\varphi, \theta) = V_0 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$.

- Encuentre el potencial en todo el espacio. (Objetivo: cuentas cero.)
- Encuentre la fuerza sobre la semiesfera integrando el tensor de Maxwell sobre alguna de las dos superficies propuestas. (*Sugerencia:* elegir la que haga el cálculo más simple.)
- ¿Puede elegirse $V(\varphi, \theta)$ o la distribución de carga sobre la semiesfera de modo que experimente una fuerza horizontal? Si se reemplazara la semiesfera por una superficie menos simétrica, a cierto potencial o con cierta distribución de carga, ¿se podría fabricar un vehículo propulsado horizontalmente por la fuerza electrostática con el plano? Justifique.



■ **Solución.** (a) El problema puede resolverse por imágenes. El potencial cero sobre el plano puede conseguirse eliminando el plano conductor y reemplazando la semiesfera por una esfera cuyo potencial $\tilde{V}(\varphi, \theta)$ coincida con $V(\varphi, \theta)$ en el casquete superior y se prolongue en el casquete inferior de manera antisimétrica respecto del plano $z = 0$. La antisimetría de la condición de contorno asegurará que el potencial para el problema auxiliar sea antisimétrico respecto del plano $z = 0$ y, por lo tanto, cero en ese plano. De esta manera, en el semiespacio $z \geq 0$ se cumplirán todas las condiciones del problema original.

Si queremos completar el potencial $V(\varphi, \theta)$ sobre toda la esfera para que sea antisimétrico respecto del plano $z = 0$, lo que habrá que hacer es definir

$$\tilde{V}(\varphi, \theta) = \begin{cases} V(\varphi, \theta), & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/2; \\ -V(\varphi, \pi - \theta), & \text{si } \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Esto sería en general. Pero en el caso particular del potencial $V(\varphi, \theta) = V_0 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$, como la función $\sin \theta \cos \theta$ ya es impar respecto de $\theta = \pi/2$, directamente puede escribirse

$$\tilde{V}(\varphi, \theta) = V_0 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi.$$

Entonces, lo que hay que resolver es el potencial en todo el espacio cuando en la superficie de la esfera de radio a es igual a $\tilde{V}(\varphi, \theta)$. La solución de este problema es directa. Dentro de la esfera hay que proponer

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\varphi, \theta) A_{lm} r^l, \quad r \leq a$$

Si la condición de contorno $\tilde{V}(\varphi, \theta)$ se desarrolla en la misma base,

$$\tilde{V}(\varphi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\varphi, \theta) \tilde{V}_{lm},$$

la comparación de las dos expresiones, cuando el potencial se evalúa en $r = a$, implica

$$A_{lm} = \frac{\tilde{V}_{lm}}{a^l}.$$

Del mismo modo, fuera de la esfera debe ser

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\varphi, \theta) \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}, \quad r \geq a.$$

Y la comparación de esta función evaluada en $r = a$ con el potencial \tilde{V} da

$$B_{lm} = a^{l+1} \tilde{V}_{lm}.$$

En general, tanto dentro como fuera de la esfera puede escribirse

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\varphi, \theta) a \tilde{V}_{lm} \frac{r^l}{r^{l+1}}. \quad (1)$$

Ahora bien, una somera inspección de los armónicos esféricos permite ver en seguida que el potencial $\tilde{V}(\varphi, \theta) = V_0 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$ es una combinación lineal de los armónicos con $l = 2$. De manera que la suma en l en la solución (1) incluye sólo el término $l = 2$, y queda

$$\Phi(\mathbf{r}) = a \frac{r^2}{r^3} \left[\sum_{m=-2}^2 Y_{2,m}(\varphi, \theta) \tilde{V}_{2,m} \right].$$

Pero lo que ha quedado escrito ahí es el propio potencial. Finalmente,

$$\Phi(\mathbf{r}) = a V_0 \frac{r^2}{r^3} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi.$$

Este potencial, restringido a la región $0 \leq \theta \leq \pi/2$, resuelve el problema original de la semiesfera y el plano.

(b) De las dos superficies propuestas, la que hará más simple el cálculo del flujo del tensor de Maxwell es la primera. Esta superficie tiene dos partes: una que coincide con el plano conductor y otra que encierra la semiesfera original a través de una semiesfera de radio R . Si $R \rightarrow \infty$, sobre esta semiesfera no es necesario hacer ninguna integral, pues el campo eléctrico decae como $1/r^4$ y, a lo sumo, la integral del tensor de Maxwell dará algo de orden $R^2/R^8 = R^{-6}$. Queda sólo la integral sobre el plano, que se simplifica grandemente porque ahí el campo eléctrico es perpendicular al plano, de manera que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_{z=0} = \frac{1}{4\pi} \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n} \right] = \frac{1}{8\pi} E^2|_{z=0} \mathbf{n}.$$

Como la normal exterior es $-\hat{z}$, es

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}|_{z=0} = -\frac{1}{8\pi} E^2|_{z=0} \hat{z}.$$

Entonces, la fuerza sobre la semiesfera vendrá a través de una integral en todo el plano $z = 0$,

$$\mathbf{F} = -\frac{\hat{z}}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho E^2|_{z=0}. \quad (2)$$

Debido a que el potencial se escribe de maneras distintas dentro y fuera de la semiesfera, habrá que dividir la integral en ρ en dos intervalos.

Dentro de la semiesfera,

$$\Phi(\mathbf{r}) = aV_0 \frac{r^2}{a^3} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi = \frac{V_0}{a^2} xz.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -(x\hat{z} + z\hat{x}) \frac{V_0}{a^2},$$

y sobre el plano $z = 0$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{z=0} = -\frac{xV_0}{a^2} \hat{z}, \quad \rho < a.$$

Por otro lado, fuera de la semiesfera puede escribirse

$$\Phi(\mathbf{r}) = a^3V_0 \frac{xz}{r^5}.$$

Lo que da

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -(x\hat{z} + z\hat{x}) \frac{a^3V_0}{r^5} + 5xz \frac{a^3V_0}{r^7} \mathbf{r}.$$

Sobre el plano $z = 0$ queda

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{z=0} = -\frac{xa^3V_0}{r^5} \hat{z}, \quad \rho > a.$$

Finalmente, escribiendo $x = \rho \cos\varphi$, la integral (2) es

$$\mathbf{F} = -\frac{\hat{z}}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \left[\int_0^a \rho d\rho \left(\frac{\rho V_0}{a^2} \right)^2 + \int_a^\infty \rho d\rho \left(\frac{a^3V_0}{\rho^4} \right)^2 \right] = -\frac{5}{96} V_0^2 \hat{z}.$$

(c) Se pregunta ahora si es posible elegir un potencial sobre la esfera, u otro tipo de superficie, de manera que la fuerza tenga también una componente horizontal. Acabamos de ver que aunque el potencial sobre la esfera no tenía simetría de revolución en φ , la fuerza resultante dio en \hat{z} . El resultado es general y la fuerza nunca puede tener una componente horizontal. La manera más directa de demostrarlo es a través del tensor de Maxwell. Si el objeto que está sobre el plano es acotado, la fuerza podrá calcularse tal como hicimos más arriba para la semiesfera, es decir, integrando el flujo del tensor de Maxwell sobre el plano conductor. Pero como el campo es normal al plano, el producto $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{E})$ tiene ahí la dirección z , y por lo tanto su integral, que da la fuerza neta, está en z únicamente.

Había otras formas de demostrar lo anterior sin recurrir al tensor de Maxwell. El mismo hecho de que el campo sea perpendicular al plano permitía afirmar que la fuerza *sobre el plano* iba a estar en la dirección z . Pero por acción y reacción la fuerza sobre el cuerpo debía ser igual y opuesta y, por lo tanto, estar en z .

También era posible usar argumentos de simetría o basados en consideraciones energéticas. Supongamos que sobre el plano haya un cuerpo de cualquier forma, cargado con cierta densidad de carga ρ , que puede ser superficial o no. Entonces la fuerza sobre el cuerpo puede pensarse como debida a la imagen del cuerpo por el plano. Ahora bien, para cada par de cargas, una en el cuerpo y otra en su imagen, podemos encontrar un segundo par cuya fuerza de interacción cancela la componente horizontal de la fuerza de interacción entre el primer par de cargas. Luego, la resultante horizontal de la fuerza es cero.



Formalmente, podríamos escribir la fuerza que ejerce la imagen del cuerpo sobre el cuerpo integrando la fuerza de Coulomb,

$$\mathbf{F} = - \int_{\text{cuerpo}} d^3r \int_{\text{imagen}} d^3r' \rho(\mathbf{r}) \rho_{\text{img}}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

donde ρ_{img} es la densidad de carga asociada a la imagen. Como la imagen del cuerpo difiere de éste sólo en una reflexión por el plano $z = 0$, la integral sobre la imagen puede llevarse al mismo dominio que la integral sobre el cuerpo, teniendo el cuidado de cambiar z' por $-z'$,

$$\mathbf{F} = - \int_{\text{cuerpo}} d^3r \int_{\text{cuerpo}} d^3r' \rho(x, y, z) \rho_{\text{img}}(x', y', -z') \frac{(x - x') \hat{x} + (y - y') \hat{y} + (z + z') \hat{z}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2]^{3/2}}.$$

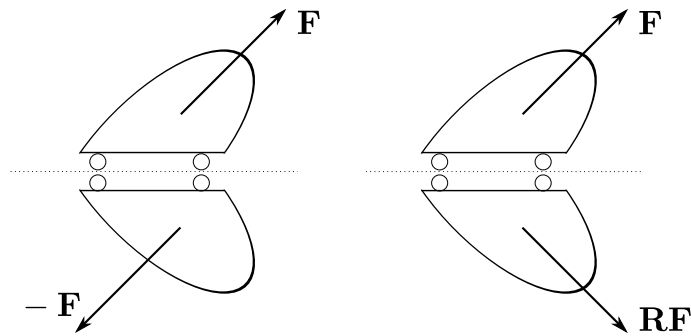
Ahora bien, la densidad de la imagen en el punto $(x', y', -z')$ es menos la densidad del cuerpo en el punto (x', y', z') , de modo que

$$\mathbf{F} = \int_{\text{cuerpo}} d^3r \int_{\text{cuerpo}} d^3r' \rho(x, y, z) \rho(x', y', z') \frac{(x - x') \hat{x} + (y - y') \hat{y} + (z + z') \hat{z}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2]^{3/2}}.$$

El integrando en esta expresión es antisimétrico respecto del intercambio de x por x' o de y por y' , de forma que en esas dos direcciones la integral debe anularse y ser únicamente

$$\mathbf{F} = \hat{z} \int_{\text{cuerpo}} d^3r \int_{\text{cuerpo}} d^3r' \rho(x, y, z) \rho(x', y', z') \frac{z + z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2]^{3/2}}.$$

Otra forma de convencerse de que la fuerza no puede tener componente horizontal es pensando que verdaderamente hay una distribución de carga imagen, que por acción y reacción debe experimentar una fuerza igual y opuesta a la que ejerce sobre el cuerpo, como en la figura de abajo a la izquierda.

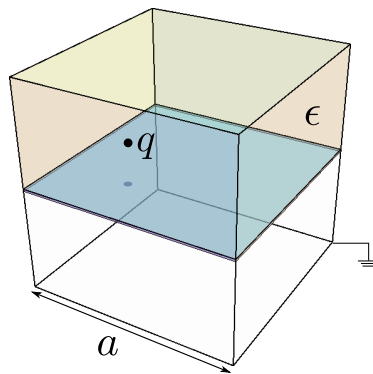


Pero por simetría es evidente que si el cuerpo sufre una fuerza como en la figura, la imagen debe experimentar una fuerza que es el reflejo de aquella. Estas dos cosas sólo pueden ser ciertas si la fuerza es normal al plano.

Otro argumento posible es decir que si el cuerpo experimentara una fuerza horizontal, debería haber una variación de la energía del campo que favoreciera los desplazamientos en la dirección de la fuerza. Pero cualquier desplazamiento horizontal del cuerpo sobre el plano produce un nuevo campo que es simplemente la traslación del campo original. Por lo tanto la energía es la misma y no puede haber fuerzas horizontales.

■ **Problema 2.** El interior de un cubo de lado a está dividido en dos mitades, una de las cuales está ocupada por un dieléctrico de permitividad ϵ y la otra está vacía. Las paredes del cubo están a potencial cero.

- a) Encuentre el potencial dentro del cubo si hay una carga q en la región ocupada por el dieléctrico.
- b) Ídem cuando la carga está en región del cubo sin dieléctrico.



■ **Solución.** (a) El problema puede resolverse por superposición del potencial de una carga neta q/ϵ , en la posición de la carga original, más el potencial de un cuadrado cargado sobre la interfase dieléctrico–vacío. En el interior del cubo, únicamente en esos dos lugares puede haber cargas. Escribamos entonces

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{q/\epsilon}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{pol}}(\mathbf{r}),$$

donde Φ_q es el potencial de una carga q dentro del cubo, y Φ_{pol} el potencial de una distribución superficial, desconocida por el momento, sobre la interfase $z = a/2$ entre el dieléctrico y el vacío. Estos dos potenciales pueden escribirse de manera similar si cada problema se plantea por separación de variables dividiendo en

regiones según la coordenadas z . Supongamos que la carga está en $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. El potencial de la carga apantallada tendrá la siguiente forma

$$\Phi_{q/\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\epsilon} \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh[k_{nm}(a - z_>)] \sinh[k_{nm}z_<], \quad (3)$$

donde

$$k_{nm} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2}.$$

Los coeficientes A_{nm} son, en principio conocidos, si se conoce la función de Green del cubo (más abajo los calculamos). La comparación que define $z_<$ y $z_>$ es entre z y la altura de la carga, z' . En tanto el potencial debido a la distribución de carga sobre la interfase $z = a/2$ será

$$\Phi_{\text{pol}}(\mathbf{r}) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh[k_{nm}(a - \tilde{z}_>)] \sinh[k_{nm}\tilde{z}_<]. \quad (4)$$

Aquí la comparación que define $\tilde{z}_<$ y $\tilde{z}_>$ es entre z y $a/2$.

Las incógnitas del problema terminan siendo los coeficientes B_{nm} . La ecuación que los determina es la continuidad de \mathbf{D} normal a través de la interfase del dieléctrico, puesto que en esa superficie no hay cargas libres,

$$\epsilon \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=a^+/2} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=a^-/2}.$$

Término a término, esto significa

$$\begin{aligned} & \epsilon \left\{ \frac{q}{\epsilon} A_{nm} \sinh[k_{nm}(a - z')] \cosh[k_{nm}a/2] - B_{nm} \cosh[k_{nm}a/2] \sinh[k_{nm}a/2] \right\} \\ & = \left\{ \frac{q}{\epsilon} A_{nm} \sinh[k_{nm}(a - z')] \cosh[k_{nm}a/2] + B_{nm} \sinh[k_{nm}a/2] \cosh[k_{nm}a/2] \right\}. \end{aligned}$$

El cuidado que hay que tener para llegar a esta expresión es en escribir correctamente quiénes son $z_<$ y $\tilde{z}_<$ para cada contribución al potencial. Respecto de la carga, la interfase del dieléctrico corresponde a la región $z_< = z$, independientemente de si uno se acerca por encima o por debajo. Pero respecto del potencial Φ_{pol} , por encima de la interfase es $\tilde{z}_< = a/2$, y por debajo $\tilde{z}_< = z$. Agrupando términos y despejando, queda

$$B_{nm} = \frac{q}{\epsilon} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right) \frac{\sinh[k_{nm}(a - z')]}{\sinh[k_{nm}a/2]} A_{nm}.$$

Conocidos los A_{nm} , esto resuelve completamente el problema.

(b) Si la carga está en la región sin dieléctrico hay que modificar los cálculos anteriores levemente. Como la carga no está apantallada, ahora es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_q(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{pol}}(\mathbf{r}).$$

Valen para Φ_q y Φ_{pol} los mismos desarrollos (3) y (4), reemplazando q/ϵ por q , y donde los B_{nm} no son necesariamente los que obtuvimos en el ítem anterior. La condición de continuidad para D normal se escribe de manera ligeramente distinta, porque respecto de la carga la interfase está ahora por encima. Al final queda

$$\begin{aligned} & \epsilon \left\{ -qA_{nm} \cosh[k_{nm}a/2] \sinh[k_{nm}z'] - B_{nm} \cosh[k_{nm}a/2] \sinh[k_{nm}a/2] \right\} \\ & = \left\{ -qA_{nm} \cosh[k_{nm}a/2] \sinh[k_{nm}z'] + B_{nm} \sinh[k_{nm}a/2] \cosh[k_{nm}a/2] \right\}. \end{aligned}$$

Luego, para este segundo problema es

$$B_{nm} = -q \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right) \frac{\sinh[k_{nm}z']}{\sinh[k_{nm}a/2]} A_{nm}.$$

Pueden comprobar que tanto si la carga se acerca a la interfase por encima como por debajo, se obtienen los mismos límites, y equivale a tener una carga de valor $2q(1 + \epsilon)$ en un cubo a tierra, sin dieléctrico.

* * *

Falta calcular los coeficientes A_{nm} . El potencial de una carga q dentro de un cubo a tierra a una altura z' se calcula dividiendo en dos regiones, según sea z mayor o menor que z' , y planteando separación de variables. La forma correcta del potencial es

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = q \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh[k_{nm}(a - z_{>})] \sinh[k_{nm}z_{<}].$$

Los coeficientes A_{nm} se calculan con el salto de la derivada normal del potencial a través del plano $z = z'$,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=z'^-} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=z'^+} = 4\pi\sigma_q.$$

La densidad de carga sobre este plano es

$$\sigma_q(x, y) = q\delta(x - x')\delta(y - y') = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sigma_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right).$$

Los coeficientes σ_{nm} se calculan invirtiendo la serie,

$$\begin{aligned} \sigma_{nm} & = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_0^a dx \int_0^a dy \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right) \sigma_q(x, y) \\ & = \frac{4}{a^2} q \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right). \end{aligned}$$

La condición de salto es entonces

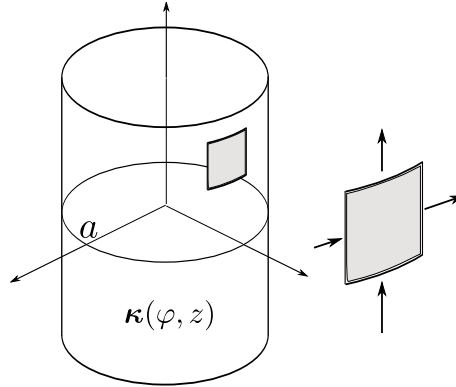
$$qk_{nm}A_{nm} \left\{ \sinh[k_{nm}(a - z')] \cosh[k_{nm}z'] + \cosh[k_{nm}(a - z')] \sinh[k_{nm}z'] \right\} = 4\pi\sigma_{nm},$$

lo que implica

$$A_{nm} = \frac{16\pi}{a^2} \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right) \frac{1}{k_{nm} \sinh[k_{nm}a]}.$$

■ **Problema 3.** Sobre un cilindro infinito de radio a circula una corriente superficial $\boldsymbol{\kappa}(\varphi, z) = \kappa_z(\varphi, z) \hat{z} + \kappa_\varphi(\varphi, z) \hat{\varphi}$. No hay otras corrientes, y la densidad de carga en todo el espacio es independiente del tiempo.

- a) Considere un elemento de área como el de la figura. Haciendo el balance de las corrientes que entran y salen de ese elemento, demuestre que $(\partial\kappa_z/\partial z) + (1/a)(\partial\kappa_\varphi/\partial\varphi) = 0$.

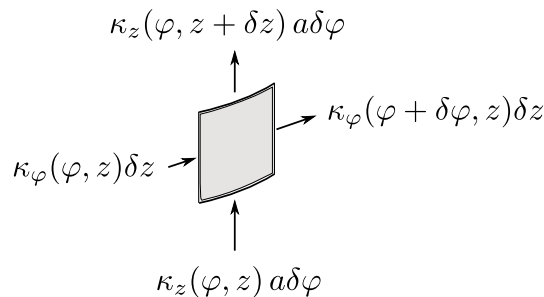


- b) Suponga que la corriente sobre el cilindro es $\boldsymbol{\kappa}(\varphi, z) = \kappa_0 \cos \lambda z \cos \varphi \hat{z} + \kappa_\varphi(\varphi, z) \hat{\varphi}$, con $\lambda \geq 0$. Encuentre κ_φ , con la condición de que si $\lambda = 0$ sea $\kappa_\varphi = 0$.
- c) Para la corriente del ítem (b), encuentre \mathbf{B} a partir de un potencial escalar, discontinuo en $\rho = a$.

Ayuda: una función $f(\varphi, z)$ en el cilindro infinito puede desarrollarse como

$$f(\varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left\{ [A_\nu(k) \cos \nu\varphi + B_\nu(k) \sin \nu\varphi] \cos kz + [C_\nu(k) \cos \nu\varphi + D_\nu(k) \sin \nu\varphi] \sin kz \right\}.$$

Solución. (a) A través de cada lado del elemento de área entran o salen las corrientes mostradas en la figura. Como no hay acumulación de carga, la suma de todas las corrientes debe ser igual a cero.



Eso implica

$$\kappa_z(\varphi, z + \delta z) a \delta \varphi + \kappa_\varphi(\varphi + \delta \varphi, z) \delta z = \kappa_z(\varphi, z) a \delta \varphi + \kappa_\varphi(\varphi, z) \delta z.$$

Tomando el límite $\delta\varphi \rightarrow 0$, $\delta z \rightarrow 0$, se obtiene la relación buscada,

$$\frac{\partial\kappa_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial\kappa_\varphi}{\partial\varphi} = 0.$$

(b) Para una corriente de la forma

$$\boldsymbol{\kappa}(\varphi, z) = \kappa_0 \cos \lambda z \cos \varphi \hat{z} + \kappa_\varphi(\varphi, z) \hat{\varphi},$$

la relación demostrada en el ítem anterior significa

$$\frac{\partial \kappa_\varphi(\varphi, z)}{\partial \varphi} = \lambda a \kappa_0 \sin \lambda z \cos \varphi,$$

lo que a su vez implica

$$\kappa_\varphi(\varphi, z) = \lambda a \kappa_0 \sin \lambda z \sin \varphi + f(z).$$

La condición de que se anule si $\lambda = 0$, permite elegir $f(z) = 0$. Así que, en definitiva,

$$\boldsymbol{\kappa}(\varphi, z) = \kappa_0 \left(\cos \lambda z \cos \varphi \hat{z} + \lambda a \sin \lambda z \sin \varphi \hat{\varphi} \right).$$

(c) Tanto dentro como fuera del cilindro $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. De manera que en esas regiones podrá escribirse

$$\mathbf{B}_1 = -\nabla \Phi_1, \quad \mathbf{B}_2 = -\nabla \Phi_2.$$

(Usamos el índice 1 para indicar la región $\rho < a$, y el índice 2 para la región $\rho > a$.) Además al ser $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ los potenciales en cada región cumplen Laplace. Las condiciones que habrá que pedir son la continuidad de \mathbf{B} normal a través del cilindro y el salto de la componente tangencial; es decir,

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\rho} = 0, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \times \hat{\rho} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{\kappa}.$$

Como los potenciales satisfacen Laplace, en cada región admitirán un desarrollo en cilíndricas de la forma

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left\{ [A_\nu(k) \cos \nu \varphi + B_\nu(k) \sin \nu \varphi] \cos kz \right. \\ \left. + [C_\nu(k) \cos \nu \varphi + D_\nu(k) \sin \nu \varphi] \sin kz \right\} I_\nu(k\rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left\{ [\tilde{A}_\nu(k) \cos \nu \varphi + \tilde{B}_\nu(k) \sin \nu \varphi] \cos kz \right. \\ \left. + [\tilde{C}_\nu(k) \cos \nu \varphi + \tilde{D}_\nu(k) \sin \nu \varphi] \sin kz \right\} K_\nu(k\rho). \end{aligned}$$

Comparando término a término, la condición de continuidad de \mathbf{B} normal implica,

$$A_\nu(k) I'_\nu(ka) = B_\nu(k) K'_\nu(ka),$$

y lo mismo para cada par de coeficientes. Esto puede asegurarse redefiniendo los potenciales del siguiente modo

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left\{ [A_\nu(k) \cos \nu \varphi + \dots] I_\nu(k\rho) K'_\nu(ka), \right.$$

$$\left. \Phi_2(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left\{ [A_\nu(k) \cos \nu \varphi + \dots] K_\nu(k\rho) I'_\nu(ka), \right. \right.$$

con los mismos coeficientes A_ν, B_ν , etc., en las dos expresiones.

Para escribir la condición de salto del campo magnético tangencial hay que calcular \mathbf{B} a cada lado del cilindro y tomar el producto vectorial con $\hat{\rho}$. Eso va a dar un par de ecuaciones, una en la dirección \hat{z} y la otra en $\hat{\phi}$. Cualquiera de las dos será suficiente para determinar los coeficientes A_ν , etc. Por ejemplo, podemos usar

$$(B_{1z} - B_{2z}) = \frac{4\pi}{c} \kappa_\varphi = \frac{4\pi}{c} \lambda a \kappa_0 \sin \lambda z \sin \varphi.$$

Calculemos entonces \mathbf{B} en la dirección z a cada lado del cilindro. Será, término a término,

$$\left[B_{1z}|_{\rho=a} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{\rho=a} \right]_\nu(k) = k \left\{ [A_\nu(k) \cos \nu\varphi + B_\nu(k) \sin \nu\varphi] \sin kz \right. \\ \left. - [C_\nu(k) \cos \nu\varphi + D_\nu(k) \sin \nu\varphi] \cos kz \right\} I_\nu(ka) K'_\nu(ka),$$

$$\left[B_{2z}|_{\rho=a} = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{\rho=a} \right]_\nu(k) = k \left\{ [A_\nu(k) \cos \nu\varphi + B_\nu(k) \sin \nu\varphi] \sin kz \right. \\ \left. - [C_\nu(k) \cos \nu\varphi + D_\nu(k) \sin \nu\varphi] \cos kz \right\} I'_\nu(ka) K_\nu(ka).$$

Al hacer la diferencia se forma la combinación $I_\nu K'_\nu(ka) - I'_\nu K_\nu(ka) = -1/(ka)$. Debido a que la corriente κ_φ ya está escrita como un producto de funciones trigonométricas en z y en φ , la comparación con la diferencia de los campos es directa y da

$$A_\nu = C_\nu = D_\nu = 0,$$

$$B_\nu(k) = -\frac{4\pi}{c} \lambda a^2 \kappa_0 \delta(k - \lambda) \delta_{\nu,1}.$$

Luego,

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \lambda a^2 \kappa_0 I_1(\lambda\rho) K'_1(\lambda a) \cos \lambda z \sin \varphi,$$

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \lambda a^2 \kappa_0 I'_1(\lambda a) K_1(\lambda\rho) \cos \lambda z \sin \varphi.$$

