Física Teórica 3 − 1er. cuatrimestre de 2012

Guía 10: *Fenómenos críticos*

1. (Pathria §11.2): Considere la ecuación de estado de Van der Waals para un mol de gas,

$$(V-b)\left(P+\frac{a}{V^2}\right)=RT.$$

   (a) Deduzca las expresiones que vinculan a las magnitudes críticas, P_c, T_c y V_c con las constantes a y b.

   (b) Demuestre que la ecuación de estado de VdW puede escribirse en forma adimensional como

$$\left(\mathcal{P}+\frac{3}{\mathcal{V}}\right)(3\mathcal{V}-1)=8\mathcal{T},$$

   donde $\mathcal{P}=P/P_c$, $\mathcal{V}=V/V_c$ y $\mathcal{T}=T/T_c$ representan la presión, el volumen y la temperaturas medidas en unidades correspondientes a las cantidades críticas.

   (c) Expanda la ecuación anterior alrededor del punto crítico en términos de las variables $p=\mathcal{P}-1$, $v=\mathcal{V}-1$ y $t=\mathcal{T}-1$, y muestre que

$$p=4t-6tv-\frac{3}{2}v^3+9tv^2.$$

   d) Considere la región de coexistencia líquido−vapor para $T<T_c$. Muestre que cerca del punto crítico, el parámetro de orden es $v\propto(-t)^{1/2}$.

2. [A. Hankey and H. E. Stanley, Phys. Rev. B **6**, 3515 (1972).] Sea λ cualquier número positivo.

   (a) Se dice que una función de una variable es homogénea si satisface $f(\lambda x)=g(\lambda)f(x)$. Demuestre que $g(\lambda)=\lambda^p$ para algún p.

   (b) Análogamente, una función de dos variables es homogénea si cumple que $f(\lambda x,\lambda y)=g(\lambda)f(x,y)$. Demostrar que $g(\lambda)=\lambda^p$ para algún p.

   (c) Una función homogénea generalizada de dos variables cumple que $f(\lambda^a x,\lambda^b y)=g(\lambda)f(x,y)$. Demostrar que $g(\lambda)$ es igual a λ^c para algún c. Demostrar también que

$$f(x,y)=|x|^{c/a}g_\pm\left(y/|x|^{b/a}\right),$$

   donde g_+ corresponde a $x>0$ y g_- a $x<0$. (Existe una expresión análoga invirtiendo los roles de x e y. Notar además que hay sólo dos exponentes independientes, c/a y b/a, lo que corresponde al hecho de que c puede elegirse siempre igual a 1 redefiniendo a y b.)

3. (Stanley, *Introduction to phase transitions...*, §11.2-3): La hipótesis de scaling de Widom supone que, cerca del punto crítico, la energía libre de Gibbs de un sistema magnético es una función homogénea generalizada,

$$G(\lambda^a t,\lambda^b H)=\lambda G(t,H),$$

donde $t=(T-T_c)/T_c$ es la temperatura reducida y H es el campo magnético.

(a) Calcular los exponente críticos α, β, γ y δ en función de a y b.

(b) Verificar que se satisfacen las igualdades:

i. Identidad de Griffiths, $\alpha = 2 - \beta(1+\delta)$.

ii. Identidad de Rushbrooke, $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$.

iii. Identidad de Widom, $\gamma = \beta(\delta - 1)$.

4. (Grupo de renormalización para el modelo de Ising unidimensional. Dalvit, problema 5.28.) El hamiltoniano de un modelo de Ising unidimensional infinito es

$$H = -b \sum_i s_i - K \sum_i s_i s_{i+1},$$

donde cada s_i puede tomar los valores ± 1 y donde $b = \beta\mu B$ y $K = \beta J$. La función de partición es

$$Z(K,b) = \sum_{s_i = \pm 1} e^{-\beta H}.$$

(a) Escriba la función de partición como dos sumas, una sobre los espines en posiciones pares y otra sobre los espines en posiciones impares,

$$Z(K,b) = \sum_{s_{2i}} \sum_{s_{2i+1}} e^{-\beta H}.$$

Haciendo explícitamente la suma sobre los espines impares (por ejemplo usando la matriz de transferencia) muestre que la función de partición obedece una ecuación de la forma

$$Z(K,b) = Z_0(K,b) Z(\bar{K}, \bar{b}),$$

donde $\bar{K}(K,b)$ y $\bar{b}(K,b)$ son parámetros efectivos de interacción para el sistema que consiste sólo en los espines de sitios pares. Si se definen $\tau = e^{-4K}$ y $\eta = e^{-2b}$, encuentre los parámetros renormalizados $\bar{\tau}$ y $\bar{\eta}$ correspondientes en términos de τ y de η.

(b) Para una cadena lineal infinita la operación anterior puede ser repetida indefinidamente, dando lugar a una secuencia de parámetros renormalizados τ_n y η_n. Un punto fijo de la transformación es un par de valores (τ^*, η^*) tal que $\bar{\tau}(\tau^*, \eta^*) = \tau^*$ y $\bar{\eta}(\tau^*, \eta^*) = \eta^*$. Suponga que los parámetros iniciales difieren poco de los del punto fijo, $\tau = \tau^* + \delta\tau$ y $\eta = \eta^* + \delta\eta$, donde $\delta\tau$ y $\delta\eta$ son cantidades pequeñas. Se dice que el punto fijo es estable con respecto a las perturbaciones en τ si $\delta\tau_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, e inestable si $\delta\tau_n$ aumenta al repetir la transformación. Análogamente se define la estabilidad respecto de η. Muestre que $(\tau^*, \eta^*) = (0, 1)$ es un punto fijo inestable respecto de los dos parámetros.

(c) Use la transformación de grupo de renormalización para mostrar que, cerca de $T = 0$ y $B = 0$, la magnetización por espín sigue la siguiente ley de escala

$$m(T,B) \simeq \mathcal{M}\left(b\tau^{-\Delta}\right),$$

y encuentre el exponente Δ.