Física Teórica 3 − 1er. cuatrimestre de 2012

Guía 2: *Procesos estocásticos − Cadenas de Markov*

1. Calcular la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $N = \sum_{i=1}^{M} X_i$, donde X_i son variables aleatorias estadísticamente independientes que toman el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1 - p$. Dar ejemplos de variables aleatorias distribuidas de esta forma.

2. Calcular el límite $M \to \infty, p \to 0, Mp = \lambda$ de la distribución binomial
$$p_n = \left(\begin{array}{c} M \\ n \end{array} \right) p^n (1-p)^{M-n}.$$
Dar ejemplos de variables aleatorias distribuidas de esta forma.

3. Obtener el valor medio y la dispersión de las distribuciones binomial y de Poisson.

4. Para ilustrar la tendencia hacia el equilibrio, Ehrenfest propuso el siguiente modelo: en dos urnas se distribuyen N bolas numeradas de 1 a N. Cada segundo se elije al azar una de ellas y se la transfiere a la otra urna.

   (a) Muestre que el proceso así definido es una cadena de Markov, cuya matriz de transición es
   $$T_{n,n'} = \frac{n}{N}\, \delta_{n-1,n'} + \left(1 - \frac{n}{N}\right)\, \delta_{n+1,n'}$$
   donde n es el número de bolas en una urna.

   (b) Mostrar que la solución estacionaria es una binomial.

5. (a) Una cadena de Markov posee un estado transitorio y uno absorbente. ¿Qué forma tiene la matriz de transición asociada?

   (b) Considere la siguiente matriz de transición. ¿Para qué valores de $0 \leq a, b \leq 1$ la cadena de Markov resulta absorbente?
   $$\left(\begin{array}{cc} 1-a & a \\ b & 1-b \end{array} \right).$$

6. Cuatro cuadras separan de un bar la casa de un hombre. Si el hombre se encuentra en cualquiera las 3 esquinas intermedias, dirigirá su caminar hacia su casa o hacia el bar con igual probabilidad. Pero si llega a alguno de estos dos sitios, allí se detendrá.

   (a) Encuentre la matriz de transición del problema. Exprésela en la forma canónica.

   (b) ¿Cuánto tiempo vagará por las calles el buen hombre antes de detenerse?

   (c) ¿Con qué probabilidad acabará en el bar?

7. Tres tanques, A, B y C, pelean entre sí, y tienen probabilidades $1/2, 1/3$ y $1/6$, respectivamente, de destruir al tanque al que disparan. Los tanques disparan al unísono y cada uno elige como blanco al oponente más peligroso aún no destruido.

(a) Encuentre la cadena de Markov correspondiente, utilizando como estados subconjuntos de tanques no destruidos. (Ayuda: hay un estado que puede ser omitido).

(b) Encuentre $\mathbf{N}$, $\mathbf{Nc}$ y $\mathbf{NR}$ e interprete.

8. Un preso, de apellido Smith, se encuentra en prisión con 1 peso en su poder. Si tuviera 8 podría pagar su fianza. Un guardia accede a jugar una serie de apuestas con él. Si el preso apuesta A pesos, gana A pesos con probabilidad 0.4 o los pierde con probabilidad 0.6. Encuentre la probabilidad de que gane 8 pesos antes de perder todo su dinero cuando sigue cada uno de estos dos procedimientos:

   (a) apuesta 1 peso cada vez

   (b) apuesta cada vez lo máximo posible, pero no más de lo necesario para alcanzar los 8 pesos.

   ¿Cuál resulta, por lo tanto, la mejor estrategia? ¿Y si inicialmente tuviera 3 pesos?

9. En una urna $\mathcal{A}$ se colocan dos bolas blancas, mientras que en una urna $\mathcal{B}$ se colocan cuatro bolas rojas. A cada paso del proceso se selecciona al azar una bola de cada urna y se intercambian.

   (a) Encuentre la matriz de transición, sus autovalores y autovectores.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar dos bolas rojas en la urna $\mathcal{A}$ luego de tres pasos? ¿Y luego de varios pasos?

   (c) Expresar el vector probabilidad $\mathbf{P}(s)$ en términos de los autovectores a izquierda y derecha.

10. Cada segundo una bacteria tiene probabilidad 2/3 de reproducirse dividiendose en dos. Si el número de bacterias n es mayor o igual a 4, la falta de alimento produce una gran mortalidad, sólo logra sobrevivir una bacteria y la población vuelve a $n = 1$. Analizando el proceso como una cadena de Markov:

   (a) Escribir la matriz de transición.

   (b) Encontrar el estado estacionario.

   (c) Si inicialmente tenemos 2 bacterias, ¿cuál es el estado del sistema 2 segundos después?

   (d) Si modificamos el problema diciendo que cada segundo las bacterias tienen además cierta probabilidad p de morir ¿cuál es el estado estacionario y qué características tiene? (En este caso no es necesario hacer cuentas).

11. Las ecuaciones maestras que dependen de variables estocásticas discretas generalmente son más fáciles de resolver utilizando la denominada función generatriz, definida como:

$$F(z,t) = \sum_n p(n,t) z^n,$$

   donde $P(n,t)$ es la probabilidad regida por la ecuación maestra en cuestión.

   (a) Demostrar que

$$F(1,t) = 1, \qquad \partial_z F(1,t) = \langle n \rangle_t\,, \qquad \partial_{zz} F(1,t) = \left\langle n^2 \right\rangle_t - \langle n \rangle_t\,.$$

(b) La ecuación maestra

$$\dot{p}_n = p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n \qquad (-\infty < n < \infty)$$

representa la denominada caminata aleatoria simétrica. Hallar la ecuación diferencial que rige la evolución de la función generatriz correspondiente y resolver dicha ecuación para un estado inicial con probabilidad 1 para $n = 0$. Expandiendo $F(z,t)$ en potencias de z, demostrar que

$$p_n(t) = e^{-2t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+|n|}}{l!\,(l+|n|)!}.$$

[Al margen de lo que se pide demostrar, conocido el desarrollo de las funciones de Bessel I_n, uno podría también escribir $p_n(t) = e^{-2t} I_n(2t)$.]

12. En una caminata unidimensional al azar, la probabilidad de moverse hacia la derecha es α y hacia la izquierda es β. Escribir la ecuación maestra correspondiente. Utilizando la transformación

$$p_n(t) = q_n(t) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n/2} \exp\left[-\left(\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}\right) t\right],$$

encuentre la ecuación que satisface $q_n(t)$. A partir de ahí, encuentre la solución para $p_n(t)$ en el caso en que $p_n(0) = \delta_{n0}$, y calcule $\langle n \rangle$. ¿A qué situación física corresponde este proceso?

13. Sea un proceso de Markov continuo en el tiempo cuyo rango consiste de enteros n y cuya matriz de transición es tal que sólo permite transiciones entre sitios adyacentes. Si r_n es la probabilidad por unidad de tiempo de que estando en n ocurra una transición hacia $n-1$, y g_n la correspondiente para que ocurra hacia $n+1$:

    (a) Escriba la ecuación maestra correspondiente.

    (b) Encuentre una ecuación para la evolución temporal de $\langle n \rangle$ (tenga en cuenta que tanto r_n como g_n pueden depender de n).

    (c) Suponiendo que el rango está acotado a los enteros $n \geq 0$, resuelva la ecuación anterior para el caso $r_n = \alpha n$ y $g_n = \beta$ y halle la solución estacionaria. Discuta el caso $\beta = 0$.

14. Una muestra radioactiva tiene a $t = 0$ n_0 núcleos activos. Si la probabilidad de decaimiento de un núcleo activo por unidad de tiempo es α:

    (a) Encontrar la ecuación maestra para el número de núcleos activos.

    (b) Encontrar la ecuación de evolución para la función generatriz $F(z,t)$.

    (c) Encontrar la condición inicial $F(z,0)$ y buscar una solución del tipo $F(z,t) = \phi\left[(1-z)\,e^{-\alpha t}\right]$.

    (d) Calcular $\langle n \rangle$ y $\sigma = \left(\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2\right)^{1/2}$.