**Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2012**

**Guía 3:** *Teoría cinética – Ecuación de Boltzmann*

1. Considere un gas clásico descripto por la función de distribución de una partícula $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, y sea $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ una cierta magnitud asociada a una partícula del gas. Escriba las expresiones para:

   (a) La densidad $n$ de partículas en el punto $\mathbf{r}$ y al tiempo $t$.

   (b) El valor medio de $\alpha$ en el punto $\mathbf{r}$ y al tiempo $t$.

   (c) El flujo de $\alpha$ a través de un elemento de área con normal $\mathbf{n}$ que se mueve con velocidad $\mathbf{u}_0$. Usualmente se toma $\mathbf{u}_0 = 0$ o $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{v} \rangle$, la velocidad media del gas. Como casos particulares de flujo considere:

      i. La densidad de corriente, suponiendo que cada partícula tiene carga $q$. Aquí se toma $\mathbf{u}_0 = 0$.

      ii. El flujo de energía cinética. Aquí se toma $\mathbf{u}_0 = 0$.

      iii. El flujo térmico, es decir, el flujo de energía cinética medido en un sistema que se mueve con la velocidad media local del gas, a través de una superficie con $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{v} \rangle$.

      iv. El llamado *tensor de presión*, $P_{ij}$, definido como el tensor simétrico cuya componente $i, j$ es el flujo de la componente $\mathbf{i}$ de impulso lineal referido a la velocidad media del gas a través de un elemento de área de normal $\mathbf{j}$ que se mueve con la velocidad media del gas: $\alpha_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m\,(v_i - \langle v_i \rangle)$, $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{v} \rangle$, donde $m$ es la masa de cada partícula.

2. Escriba la función de distribución de equilibrio de un gas en un potencial externo $V(\mathbf{r})$, en términos de la función de distribución de equilibrio cuando $V = 0$.

3. Sea $n_0$ la densidad del aire en la superficie terrestre. Determine la densidad $n_z$ a una altura $z$ suponiendo equilibrio y temperatura uniforme. Desprecie la variación de $g$ con la altura.

4. Demostrar que la integral en el espacio de velocidades del término de colisión es idénticamente nula si y sólo si se cumple la ecuación de continuidad. *Nota*: suponga que la fuerza exterior actuante sobre las partículas cumple $\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} = 0$ (observe que esta condición incluye el caso de una fuerza magnética, proporcional a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$).

5. Calcular la viscosidad y la conductividad térmica de un gas monoatómico diluido. Para ello siga los siguientes pasos:

   (a) Considere que el fluido se halla encerrado entre dos placas paralelas separadas por una distancia $L$. La placa en $z = 0$ está quieta, mientras que la placa en $z = L$ se mueve en la dirección $x$ con velocidad $u_x$. Las capas de fluido que se hallan debajo del plano $z =$ cte. ejercen un esfuerzo tangencial $P_{zx}$ (componente $zx$ del tensor de presión) sobre el fluido que se halla por encima de ellas. Si $\partial u_x/\partial z$ es pequeño se cumple que $P_{zx} = -\eta \partial u_x/\partial z$ donde $\eta$ es el coeficiente de viscosidad. Encuentre una expresión para dicho coeficiente y observe que el mismo es proporcional al tiempo de relajación $\tau$.

(b) Considere ahora que el gas está en reposo pero existe un pequeño gradiente de temperatura en la dirección $z$. Calcule el flujo térmico en la situación estacionaria y demuestre que es proporcional a $-\partial T/\partial z$. Calcule el coeficiente de proporcionalidad (conductividad térmica $\kappa$). *Ayuda:* considere que $f^o$ es una distribución maxwelliana con $n = n(z)$ y $\beta = \beta(z)$. Relacione $\partial n/\partial z$ con $\partial\beta/\partial z$ pidiendo que $\langle v_z \rangle = 0$, esto es, que no haya convección.

(c) Halle el cociente $\kappa/\eta$ y vea que es independiente de $T$ y de $\tau$.

6. Calcule, utilizando la ecuación de Boltzmann en la aproximación de tiempo de relajación, la conductividad eléctrica de un gas maxwelliano de electrones con un fondo iónico neutralizado (esta es una buena aproximación para un plasma: suponer los iones fijos y que la corriente es debida sólo a los electrones).

7. Considere un gas maxwelliano en estado estacionario sometido a un pequeño gradiente de temperatura unidimensional. La densidad de partículas es homogénea.

   (a) Proponga como solución de la ecuación de Boltzmann una maxwelliana local, con $T = T(z)$, más una pequeña corrección.

   (b) Calcule la velocidad media e interprete el resultado.

   (c) Escriba la ecuación de continuidad para ese gas.

   (d) A partir de lo obtenido en b) y c) deduzca la dependencia de $T$ con $z$ y también la de la presión con $z$.

   (e) Calcule el flujo térmico y compare con lo obtenido en el problema $5{-}2$.

8. Sea $H = \displaystyle\int d^3v f(v,t) \log f(v,t)$ donde $f(v,t)$ es arbitraria excepto por las condiciones

$$\int d^3v f(v,t) = n, \qquad \int d^3v f(v,t) \left[\tfrac{1}{2}mv^2\right] = E,$$

donde $n$ y $E$ son constantes prefijadas. Muestre que $H$ es mínimo cuando $f$ es la distribución de Maxwell-Boltzmann.