Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2012

Guía 6: *Gas de Fermi*

1. Considere un sistema formado por dos partículas que pueden estar en cualquiera de tres estados, con energías 0, ε y 2ε. El sistema está en contacto con un foco térmico a temperatura T.

   (a) Escriba una expresión para la función de partición Z si:

      i. las partículas obedecen a la estadística de Maxwell–Boltzmann y son distinguibles.

      ii. las partículas obedecen a la estadística de Bose–Einstein.

      iii. las partículas obedecen a la estadística de Fermi–Dirac.

   (b) Suponiendo que $e^{-\beta\epsilon} = \frac{1}{2}$, calcule en unidades de ε la energía media en cada caso y compare.

2. Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio a una temperatura del orden de 10^7 K y a una densidad de unos 10^{10} kg/m^3. Muestre que los átomos de helio deben encontrarse totalmente ionizados y que el gas de electrones resultante puede considerarse como si estuviese a temperatura nula. Datos: la energía de ionización del helio es del orden de 10 eV y $k = 8.6 \times 10^{-5}$ eV/K.

3. Para un gas ideal de N electrones en un volumen V:

   (a) Calcular la energía de Fermi.

   (b) Calcular la energía total E a $T = 0$.

   (c) Muestre que para cualquier temperatura se cumple $E = 3pV/2$. Usando esta relación y lo hallado en (b), encuentre una expresión para la presión p a $T = 0$.

4. Sea un gas de electrones en dos dimensiones sobre un área A.

   (a) Halle una expresión para pV/kT en función de la temperatura y el potencial químico.

   (b) Halle la energía de Fermi en términos del número medio de partículas a temperatura cero.

   (c) Muestre que el potencial químico viene dado, como función de la temperatura, por:

$$\mu(T) = \epsilon_F \left\{ 1 + \frac{1}{\beta\epsilon_F} \ln\left(1 - e^{-\beta\epsilon_F}\right) \right\}.$$

   (d) Calcule el calor específico si el gas está altamente degenerado y muestre que es proporcional a T.

5. Un electrón en un campo magnético H tiene una energía $\pm\mu_B H$, dependiendo de que el espín sea paralelo o antiparalelo al campo. Suponiendo un gas de electrones a temperatura cero en dicho campo:

   (a) Halle el valor máximo de la densidad N/V tal que todos los espines sean paralelos entre sí. ¿Cuánto vale la energía del gas en ese caso?

   (b) Ahora suponga como dato una energía de Fermi mayor que $\mu_B H$. Halle la magnetización y a partir de ella la susceptibilidad.

6. Considere un gas de electrones en el límite ultrarrelativista; en ese caso la energía de una partícula está relacionada con su impulso mediante $\epsilon(p) = cp$.

   (a) Obtenga la relación entre E y N para $T = 0$.

   (b) Obtenga $\mu(T)$ al menor orden no nulo en la temperatura.

   (c) Ídem (a) y (b) para el caso bidimensional.

   (d) Estrictamente hablando, la energía de los electrones está dada por $\epsilon(p) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$, que en el límite ultrarrelativista se reduce a cp y en el límite clásico a $mc^2 + p^2/2m$. Pero en un gas de electrones a $T \neq 0$ siempre habrá partículas con energías tan altas o tan bajas como se quiera. ¿Qué es lo que define que la expresión de $\epsilon(p)$ pueda reemplazarse por su versión clásica o ultrarrelativista? ¿En qué caso habrá que trabajar con la expresión completa?